Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Волков, О неотрицательном решении системы уравнений с симметрической циркулянтной матрицей, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 170–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm731>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:27:53

УДК 512.644+519.65

О НЕОТРИЦАТЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧЕСКОЙ ЦИРКУЛЯНТНОЙ МАТРИЦЕЙ

Ю. С. Волков

Для системы уравнений с симметрической циркулянтной матрицей найдены условия на вектор правой части, обеспечивающие положительность решения системы. В качестве приложения полученных результатов исследована задача положительной сплайн-интерполяции положительных функций на равномерных сетках.

Библиография: 12 названий.

Стандартные процессы интерполяции сплайнами обычно требуют решения линейных систем вида

$$Ax = d \quad (1)$$

с ленточной матрицей коэффициентов A . Необходимость наследования интерполянтom таких характеристик исходных данных, как положительность, монотонность или выпуклость, приводит к необходимости изучения вопроса о положительном (неотрицательном) решении системы уравнений (1) при положительной правой части d .

При исследовании условий монотонности и выпуклости кубических и параболических сплайнов Мирошниченко [1] применил специальное преобразование трехдиагональной системы уравнений с неотрицательными коэффициентами, приводящее к системе с матрицей монотонного вида (матрица M *монотонна*, если из условия $Mx \geq 0$ следует $x \geq 0$). Эта идея оказалась очень полезной и плодотворной, она нашла широкое применение при получении достаточных условий монотонности и/или выпуклости для различных обобщений кубических сплайнов [2]–[4]. В дальнейшем Завьялов [5] в развитие идеи Мирошниченко получил условие неотрицательности решения системы (1) для якобиевых матриц. Однако для матриц с шириной ленты больше 3 такой подход уже не работает.

В данной заметке мы будем считать, что ленточная матрица A системы (1) является циркулянтной

$$A = \text{circ}(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, 1, 0, \dots, 0, 1, a_1, \dots, a_{n-1}), \quad (2)$$

где первая определяющая строка [6] матрицы A имеет вид $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, 1, 0, \dots, 0, 1, a_1, \dots, a_{n-1})$. В задачах сплайн-интерполяции система (1) с такой матрицей возникает при периодической интерполяции на равномерной сетке [7].

Цель работы состоит в нахождении невырожденной квадратной матрицы G такой, что матрица $M = GA$ будет монотонной. Тогда для системы (1) условием, гарантирующим неотрицательность решения, будет

$$Gd \geq 0. \quad (3)$$

Кроме того, нас интересуют условия на вектор d в терминах ограничения на отношения соседних его компонент, обеспечивающие выполнение неравенства (3).

Введем матрицу перестановок

$$P = \text{circ}(0, \dots, 0, 1).$$

Тогда любой циркулянт A вида (2) может быть записан [6] следующим образом:

$$A = P^{-n} Q_A(P),$$

где

$$Q_A(z) = z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + \dots + a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + 1$$

– многочлен, связанный с матрицей A . Заметим, что многочлен $Q_A(z)$ удовлетворяет тождеству

$$Q_A(z) \equiv z^{2n} Q_A\left(\frac{1}{z}\right).$$

Следовательно, справедливо разложение многочлена $Q_A(z)$ на множители

$$Q_A(z) = (z-1)^{m_1} (z+1)^{m_2} (z-z_1) \left(z - \frac{1}{z_1}\right) \cdots (z-z_m) \left(z - \frac{1}{z_m}\right), \quad (4)$$

$$m_1 + m_2 + 2m = 2n,$$

для некоторых, вообще говоря, комплексных чисел z_ν , $\nu = 1, \dots, m$.

Сформулируем наш основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть корни многочлена $Q_A(z)$, связанного с циркулянтной матрицей A вида (2), вещественны и среди них нет чисел ± 1 . Тогда матрица GA монотонна, где

$$G = G_1 G_2 \cdots G_n,$$

$$G_\nu = \begin{cases} -\text{circ}\left(z_\nu + \frac{1}{z_\nu}, 1, 0, \dots, 0, 1\right), & z_\nu < 0, \\ -I, & z_\nu > 0, \end{cases}$$

числа z_ν и $1/z_\nu$ – корни многочлена $Q_A(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку среди нулей многочлена $Q_A(z)$ нет чисел ± 1 , то представление (4) будет иметь вид

$$Q_A(z) = (z - z_1) \left(z - \frac{1}{z_1} \right) (z - z_2) \left(z - \frac{1}{z_2} \right) \cdots (z - z_n) \left(z - \frac{1}{z_n} \right).$$

Заметим, что

$$(z - z_\nu) \left(z - \frac{1}{z_\nu} \right) = z^2 - \left(z_\nu + \frac{1}{z_\nu} \right) z + 1, \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Тогда

$$Q_A(z) = \prod_{\nu=1}^n \left(z^2 - \left(z_\nu + \frac{1}{z_\nu} \right) z + 1 \right). \quad (6)$$

Каждый многочлен второй степени (5) соответствует циркулянту

$$A_\nu = \text{circ} \left(-z_\nu - \frac{1}{z_\nu}, 1, 0, \dots, 0, 1 \right). \quad (7)$$

Таким образом, ленточная циркулянтная матрица A вида (2) равна произведению трехдиагональных циркулянтов A_ν , т.е. $A = A_1 A_2 \cdots A_n$.

Корни z_ν и $1/z_\nu$ многочлена $Q_A(z)$ вещественны и отличны от ± 1 , поэтому выполнено неравенство

$$\left| z_\nu + \frac{1}{z_\nu} \right| > 2, \quad (8)$$

которое является условием диагонального преобладания матрицы (7). Следовательно, все A_ν , $\nu = 1, \dots, n$, являются матрицами с диагональным преобладанием.

Пусть корень z_ν многочлена $Q_A(z)$ отрицателен. В этом случае все элементы трехдиагональной матрицы A_ν неотрицательны. Для системы уравнений

$$A_\nu x = d$$

с такой матрицей применимо преобразование Мирошниченко [1], в результате которого получаем систему

$$G_\nu A_\nu x = G_\nu d$$

с монотонной матрицей $G_\nu A_\nu$, где

$$G_\nu = -\text{circ} \left(z_\nu + \frac{1}{z_\nu}, 1, 0, \dots, 0, 1 \right). \quad (9)$$

Если же корень z_ν многочлена $Q_A(z)$ положителен, то смена знаков элементов матрицы A_ν превращает ее в монотонную. В этом случае $G_\nu A_\nu$ монотонна с

$$G_\nu = -I, \quad (10)$$

т.е. $G_\nu A_\nu = -A_\nu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЭТИХ ТЕОРЕМ НЕПОСРЕДСТВЕННО ВЫТЕКАЕТ ИЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.

Теорема 2 (корни многочлена $Q_A(z)$, связанного с матрицей системы, только положительные) говорит о том, что решение системы уравнений (1) при неотрицательной правой части d всегда будет либо неотрицательным (n четно), либо наоборот неположительным (n нечетно). Вопрос о положительности (неотрицательности) решения при положительной правой части d , если у многочлена $Q_A(z)$ есть отрицательные корни, не так тривиален. Мы даем ответ на этот вопрос в виде ограничений на отношение соседних компонент вектора правой части d .

Введем следующую характеристику матрицы A :

$$q^*(A) = \frac{Q_A(1) + (-1)^n Q_A(-1)}{Q_A(1) - (-1)^n Q_A(-1)}. \quad (12)$$

Если все корни многочлена $Q_A(z)$ отрицательны, то на основании представления (6) и неравенства (8) заключаем, что

$$(-1)^n Q_A(-1) > 0.$$

Таким образом, характеристику $q^*(A)$, определенную равенством (12), можно записать так:

$$q^*(A) = \frac{Q_A(1) + |Q_A(-1)|}{Q_A(1) - |Q_A(-1)|}.$$

Поскольку в случае отрицательных корней многочлена $Q_A(z)$ его коэффициенты неотрицательны, то ясно, что

$$q^*(A) > 1.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть все корни многочлена $Q_A(z)$, связанного с циркулянтной матрицей A вида (2), отрицательны и $Q_A(-1) \neq 0$. Вектор Gd будет положительным, если положителен d , и его соседние компоненты отличаются не более чем в q раз при

$$q < q^*(A). \quad (13)$$

Доказательству предположим две леммы.

ЛЕММА 1. Пусть соседние компоненты положительного вектора d отличаются не более чем в q раз. Тогда при

$$\alpha_\nu > 2q \quad (14)$$

компоненты вектора $G_\nu d$ также положительны, где

$$G_\nu = \text{circ}(\alpha_\nu, -1, 0, \dots, 0, -1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для отношения соседних компонент вектора d введем обозначение $\lambda_i = d_i/d_{i+1}$. Тогда

$$(G_\nu d)_i = -d_{i-1} + \alpha_\nu d_i - d_{i+1} = \left(-\lambda_{i-1} + \alpha_\nu + \frac{1}{\lambda_i}\right) d_i. \quad (15)$$

Поскольку по условию величины λ_{i-1} и λ_i лежат в промежутке $[1/q, q]$, то выражение $(G_\nu d)_i$ минимально при $\lambda_{i-1} = q$ и $\lambda_i = 1/q$ и, следовательно, всегда положительно при выполнении неравенства (14). Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда отношение соседних компонент вектора $G_\nu d$ не превосходит величины

$$\frac{\alpha_\nu q - 2}{\alpha_\nu - 2q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (15), запишем отношение соседних компонент вектора $G_\nu d$:

$$\frac{(G_\nu d)_i}{(G_\nu d)_{i+1}} = \frac{(-\lambda_{i-1} + \alpha_\nu + 1/\lambda_i)d_i}{(-\lambda_i + \alpha_\nu + 1/\lambda_{i+1})d_{i+1}} = \frac{\lambda_i(-\lambda_{i-1} + \alpha_\nu) - 1}{-\lambda_i + \alpha_\nu - 1/\lambda_{i+1}}.$$

Ясно, что это выражение является убывающей функцией по переменным λ_{i+1} и λ_{i-1} на интервале $[1/q, q]$. Поэтому справедлива оценка

$$\frac{(G_\nu d)_i}{(G_\nu d)_{i+1}} \leq \frac{\lambda_i(-1/q + \alpha_\nu) - 1}{-\lambda_i + \alpha_\nu - q}.$$

А выражение справа максимально при $\lambda_i = q$. Итак,

$$\frac{(G_\nu d)_i}{(G_\nu d)_{i+1}} \leq \frac{\alpha_\nu q - 2}{\alpha_\nu - 2q}.$$

Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Доказательство проведем индукцией по n .

Пусть $n = 1$. В этом случае матрица A трехдиагональная:

$$A = \text{circ}(a_1, 1, 0, \dots, 0, 1),$$

соответственно $Q_A(z) = z^2 + a_1 z + 1$. Справедливость теоремы следует из леммы 2 на основании эквивалентности неравенств (13) и (14). Здесь $G = G_1$ с $\alpha_1 = a_1$ и

$$\frac{Q_A(1) - Q_A(-1)}{Q_A(1) + Q_A(-1)} = \frac{a_1}{2}.$$

Теперь предположим, что утверждение теоремы верно для $n = k$. Покажем, что тогда оно будет справедливым и для $n = k + 1$.

Ясно, что многочлен $Q_A(z)$, связанный с матрицей A , можно представить в виде

$$Q_A(z) = \tilde{Q}(z)(z^2 + \alpha_{k+1}z + 1),$$

где $\alpha_{k+1} = -z_{k+1} - 1/z_{k+1} > 2$, а z_{k+1} и $1/z_{k+1}$ — некоторые из корней многочлена $Q_A(z)$. Многочлен $\tilde{Q}(z)$ может быть связан с некоторой матрицей $\tilde{A}$ вида (2), его степень равна $2k$. Матрицу, приводящую $\tilde{A}$ к монотонной (см. теорему 3), обозначим $\tilde{G}$. Тогда $G = \tilde{G}G_{k+1}$, где

$$G_{k+1} = \text{circ}(\alpha_{k+1}, -1, 0, \dots, 0, -1).$$

Прежде всего заметим, что

$$q < \frac{\alpha_{k+1}}{2}. \quad (16)$$

В самом деле, по условию теоремы $q < q^*(A)$, где согласно (12)

$$q^*(A) = \frac{Q_A(1) + (-1)^{k+1}Q_A(-1)}{Q_A(1) - (-1)^{k+1}Q_A(-1)}.$$

Учитывая, что

$$Q_A(1) = (\alpha_{k+1} + 2)\tilde{Q}(1), \quad Q_A(-1) = -(\alpha_{k+1} - 2)\tilde{Q}(-1), \quad (17)$$

имеем

$$q^*(A) = \frac{\tilde{Q}(1)(\alpha_{k+1} + 2) + (-1)^k\tilde{Q}(-1)(\alpha_{k+1} - 2)}{\tilde{Q}(1)(\alpha_{k+1} + 2) - (-1)^k\tilde{Q}(-1)(\alpha_{k+1} - 2)}.$$

Поскольку $\alpha_{k+1} > 2$ и $(-1)^k\tilde{Q}(-1) < \tilde{Q}(1)$, имеет место неравенство

$$q^*(A) < \frac{(\alpha_{k+1} + 2) + (\alpha_{k+1} - 2)}{(\alpha_{k+1} + 2) - (\alpha_{k+1} - 2)} = \frac{\alpha_{k+1}}{2},$$

которое и доказывает (16).

Неравенство (16) позволяет применить леммы 1 и 2 при $G_\nu = G_{k+1}$. В результате чего получаем, что компоненты вектора $\tilde{d} = G_{k+1}d$ положительны и отношение соседних компонент этого вектора не превосходит величины

$$\tilde{q} = \frac{\alpha_{k+1}q - 2}{\alpha_{k+1} - 2q}. \quad (18)$$

По предположению индукции вектор $\tilde{G}\tilde{d}$ будет положителен при выполнении условия

$$\tilde{q} < \frac{\tilde{Q}(1) + (-1)^k\tilde{Q}(-1)}{\tilde{Q}(1) - (-1)^k\tilde{Q}(-1)}.$$

С учетом (18) последнее неравенство можно переписать в виде

$$q < \frac{(\alpha_{k+1} + 2)\tilde{Q}(1) + (-1)^k(\alpha_{k+1} - 2)\tilde{Q}(-1)}{(\alpha_{k+1} + 2)\tilde{Q}(1) - (-1)^k(\alpha_{k+1} - 2)\tilde{Q}(-1)},$$

которое, в свою очередь, согласно (17) совпадает с неравенством (13). Следовательно, вектор $\tilde{G}\tilde{d} = Gd$ положителен. Теорема 4 полностью доказана.

Отметим, что неравенство (13) является необходимым и достаточным условием положительности вектора Gd . Однако нельзя сказать, что оно является необходимым и для положительного решения системы (1), так как утверждение теоремы 3 носит лишь достаточный характер.

В работе Киндалева [8] указано на связь величины $Q_A(-1)$ с нормой обратной матрицы к A для рассматриваемого случая. Показано, что если матрица A четного порядка, то

$$\|A^{-1}\| = \frac{(-1)^n}{Q_A(-1)} \quad (19)$$

для равномерной (и спектральной) нормы матрицы. Если же A нечетного порядка, то величина $\|A^{-1}\|$ достаточно близка к $|Q_A(-1)|^{-1}$ и справедлива оценка

$$\|A^{-1}\| < \frac{(-1)^n}{Q_A(-1)}.$$

Всегда можно считать, что матрица A четного порядка (в силу цикличности A число уравнений в системе (1) можно удвоить) и выполнено равенство (19). В этом случае характеристику $q^*(A)$, определенную равенством (12) и используемую в теореме 4, можно выразить через число обусловленности матрицы A , определяемое как

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Имеем

$$q^*(A) = \frac{\text{cond}(A) + 1}{\text{cond}(A) - 1}. \quad (20)$$

Выражение (20) говорит о том, что для систем с плохо обусловленными матрицами характеристика $q^*(A)$ близка к 1 и гарантировать положительность решения можно только при правых частях с “почти” одинаковыми компонентами.

В заключение рассмотрим применение полученных результатов к задачам периодической сплайн-интерполяции на равномерной сетке. Пусть сплайн $S(x)$ степени m минимального дефекта представлен в виде разложения по нормализованным B -сплайнам

$$S(x) = \sum_j \alpha_j B_j(x).$$

При решении задачи интерполяции возникает система уравнений относительно коэффициентов α_j с ленточной матрицей, элементами которой являются $B_j(x_i)$, и правой частью, состоящей из интерполируемых значений f_i , $i = 1, \dots, N$, заданных в узлах x_i равномерной сетки. Классическое определение интерполяционных сплайнов четной и нечетной степени отличается (см. [9]) тем, что в первом случае узлы сплайна находятся между точками интерполяции, а во втором – совпадают с ними. Это приводит к тому, что ширина ленты матрицы будет $m + 1$, если $m = 2n$ четно, и m , если $m = 2n + 1$ нечетно, т.е. в обоих случаях ширина ленты системы

$$\sum_{j=i-n}^{i+n} B_j(x_i) \alpha_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (21)$$

равна $2n + 1$. После умножения уравнений (21) на нормирующий множитель

$$\frac{1}{B_{i-n}(x_i)} = \begin{cases} m!, & m = 2n + 1, \\ 2^m m!, & m = 2n, \end{cases}$$

матрица A_m полученной системы будет иметь вид (2), причем норма A_m будет равна величине этого нормирующего множителя, т.е.

$$\|A_m\| = \begin{cases} m!, & m = 2n + 1, \\ 2^m m!, & m = 2n, \end{cases}$$

поскольку сумма элементов любой строки матрицы системы (21) равна 1 и все эти элементы неотрицательны. Известно [9], что многочлены $Q_{A_m}(z)$, связанные с матрицами A_m , в обоих случаях имеют только отрицательные корни и, следовательно, выполнены условия теорем 3 и 4.

Таким образом, на основании теоремы 3 условия

$$\sum_{j=i-n}^{i+n} (-1)^{i-j} B_j(x_i) f_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (22)$$

гарантируют, что при интерполяции неотрицательных данных f_j коэффициенты α_j разложения сплайна по B -сплайнам будут неотрицательны, а значит, неотрицательным будет и сам сплайн $S(x)$. Выпишем для примера условия (22) с числовыми коэффициентами для невысоких степеней – параболических, кубических, четвертой и пятой степеней, что соответствует $m = 2, 3, 4$ и 5 .

Случай $m = 2$. Параболический сплайн имеет вид

$$-f_{i-1} + 6f_i - f_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Случай $m = 3$. Кубический сплайн имеет вид

$$-f_{i-1} + 4f_i - f_{i+1} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Случай $m = 4$. Сплайн четвертой степени имеет вид

$$f_{i-2} - 76f_{i-1} + 230f_i - 76f_{i+1} + f_{i+2} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Случай $m = 5$. Сплайн пятой степени имеет вид

$$f_{i-2} - 26f_{i-1} + 66f_i - 26f_{i+1} + f_{i+2} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Чтобы воспользоваться теоремой 4, нам необходимо вычислить характеристику $q^*(A_m)$ матрицы A_m либо по формуле (12), либо по формуле (20). Для сплайнов нечетной степени $m = 2n + 1$ величина числа обусловленности матрицы A_m найдена в работе [10]:

$$\text{cond}(A_m) = \frac{(m+1)!}{2^{m+1}(2^{m+1}-1)|B_{m+1}|}, \quad m = 2n + 1, \quad (23)$$

где B_{m+1} – числа Бернулли (см. [11]). Матрица для сплайнов четной степени $m = 2n$ рассматривались в статье [12], в которой вычислена норма обратной матрицы (сплайновая матрица в [12] отличается от нашей A_m множителем 2^m). Применительно к нашему случаю

$$\|A_m^{-1}\| = \frac{1}{2^m |E_m|}, \quad m = 2n,$$

где E_m – числа Эйлера (см. [11]). Поэтому

$$\text{cond}(A_m) = \frac{m!}{|E_m|}, \quad m = 2n. \quad (24)$$

Отметим, что в формулах (23) и (24) используются числа Бернулли и Эйлера только с четными индексами (по определению такие числа с нечетными индексами равны нулю).

ТАБЛИЦА

m	$\text{cond}(A_m)$	$q^*(A_m)$
2	2	3
3	3	2
4	4.8	1.53
5	7.5	1.31
6	11.80	1.19
7	18.53	1.11
8	29.11	1.07
9	45.73	1.04
10	71.83	1.03
11	112.83	1.02

В таблице приведены числовые значения $\text{cond}(A_m)$ обусловленности матрицы A_m и ее характеристики $q^*(A_m)$ для сплайнов до 11-й степени, т.е. $m = 2, 3, \dots, 11$. Значения $\text{cond}(A_m)$ для нечетных m , приводимых в таблице, имеются в работе [10]. Там же отмечено, что для больших (нечетных) m , привлекая известные свойства чисел Бернулли, можно показать

$$\text{cond}(A_m) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{m+1}. \quad (25)$$

Оказывается, асимптотика (25) остается справедливой и для больших *четных* m . Действительно, для чисел E_{2k} известны двухсторонние оценки [11]

$$\frac{4^{k+1}(2k)!}{\pi^{2k+1}(1+3^{-1-2k})} < |E_{2k}| < \frac{4^{k+1}(2k)!}{\pi^{2k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

применение которых к (24) и дает (25).

Вычисления показывают, что, уже начиная со сплайнов шестой степени ($m = 6$), значения $\text{cond}(A_m)$, получаемые по формуле (25), совпадают со значениями $\text{cond}(A_m)$ таблицы с точностью до всех приводимых знаков.

Выражение (25) говорит о том, что с ростом степени сплайнов m экспоненциально растет обусловленность сплайновых матриц. При этом характеристики $q^*(A_m)$ матриц A_m быстро стремятся к 1 (что и отражено в таблице). Чтобы на основании теоремы 4 гарантировать положительность сплайна высокой степени при интерполяции положительных функций, необходимо загустить сетку так, чтобы отношение соседних интерполируемых значений не превосходило характеристику $q^*(A_m)$. Ясно, что для непрерывных функций этого всегда можно добиться. Однако, если интерполируемая функция имеет участки с большими градиентами, то шаг сетки необходимо выбирать достаточно малым, что ведет к увеличению объема информации и потере точности при численном решении задач интерполяции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказанные теоремы переносятся и на случай бесконечных матриц, что соответствует кардинальной сплайн-интерполяции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Miroshnichenko V. L. Convex and monotone spline interpolation // Constructive Theory of Functions'84. Proceed. Intern. Conf. Varna, Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. of Sci., 1984. P. 610–620.
- [2] Верлан И. И. Консервативная интерполяция обобщенными сплайнами. Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1989.
- [3] Завьялов Ю. С. Монотонная интерполяция обобщенными кубическими сплайнами класса C^2 // Интерполяция и аппроксимация сплайнами. Вып. 147. Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992. С. 44–67.
- [4] Завьялов Ю. С. Выпуклая интерполяция обобщенными кубическими сплайнами класса C^2 // Сплайны и их приложения. Вып. 154. Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1995. С. 15–64.
- [5] Завьялов Ю. С. О неотрицательном решении системы уравнений с нестрогой якобиевой матрицей // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 6. С. 1303–1307.
- [6] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
- [7] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.
- [8] Киндалев Б. С. Точная оценка нормы обратной матрицы для симметрического циркулянта // Аппроксимация сплайнами. Вып. 121. Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1987. С. 37–45.
- [9] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
- [10] Albasiny E. L., Hoskins W. D. Explicit error bounds for periodic splines of odd order on a uniform mesh // J. Inst. Math. Appl. 1973. V. 12. №3. P. 303–318.
- [11] Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
- [12] Киндалев Б. С. Асимптотика погрешности и суперсходимость периодических интерполяционных сплайнов четной степени // Сплайны в вычислительной математике. Вып. 115. Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. С. 3–25.