Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Горбиков, Топологическая эквивалентность одного типа локальных особенностей динамических систем с ударными взаимодействиями, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 181–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm732>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:56:49

УДК 517.938.5

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОДНОГО ТИПА ЛОКАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

С. П. Горбиков

Для выделенного типа локальных особенностей динамических систем с ударными взаимодействиями доказана теорема о топологической эквивалентности. Доказательство основано на установленном ранее результате об описании движений в окрестности выделенной локальной особенности с помощью гладких дифференциальных уравнений.

Библиография: 14 названий.

Введение. К настоящему времени качественная теория гладких динамических систем довольно хорошо развита (см. [1]–[3] и др.); для негладких динамических систем с непрерывным изменением переменных она успешно развивается (см. [4] и др.). Для динамических систем с ударными взаимодействиями изучались: локальная особенность одного вида для конкретной системы [5] и для неавтономной системы общего вида [6]; различные локальные особенности для динамических систем с ударными взаимодействиями общего вида [7]. В [8] для динамических систем с ударными взаимодействиями классифицируются локальные особенности, для первых четырех выделенных типов локальных особенностей устанавливается топологическая эквивалентность соответствующих особенностей.

В данной работе рассматривается шестой [8] тип локальных особенностей, т.е. точка на гиперповерхности $S = 0$ удара, в которой первая и вторая производная (в силу дифференциальных уравнений движения) уравнения этой гиперповерхности равна нулю, а третья производная отрицательна (движение системы происходит в области $S \geq 0$). Доказывается теорема о топологической эквивалентности малых окрестностей этих особенностей, причем используется полученное ранее [9] описание движений в малой окрестности (фазового пространства) локальной особенности шестого типа с помощью гладких дифференциальных уравнений.

1. Уравнения движения. В малой окрестности изучаемой здесь локальной особенности шестого типа [8] общие уравнения движения динамической системы с ударными взаимодействиями [7] удобнее представить в следующем виде [10]. Мгновенные ударные взаимодействия происходят на гиперповерхности $x_n = 0$, по достижении которой фазовые переменные изменяются скачкообразно согласно формулам

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= H_1(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-) = x_1^- H_{11}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-), \\ \bar{x}_i &= H_i(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-) = x_i^- + x_1^- H_{1i}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-), \quad i = 2, \dots, n-1,\end{aligned}\tag{1}$$

а при $x_n > 0$ изменение фазовых переменных подчиняется дифференциальным уравнениям вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \Phi_{11}(x_1, \dots, x_n) + x_2 \Phi_{12}(x_1, \dots, x_n) + x_n \Phi_{1n}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_i &= \Phi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= x_1 \Phi_{n1}(x_1, \dots, x_n) + x_n \Phi_{nn}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_n(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}\quad (2)$$

Фазовое пространство системы составляют точки $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \geq 0)$. В соотношениях (1) и (2) через $x_1^-, \dots, x_{n-1}^-$ и $x_1^+, \dots, x_{n-1}^+$ обозначены соответственно доударные и послеударные значения переменных; при этом $-1 < H_{11}(0, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-) < 0$; $\Phi_{n1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) > 0$; $\Phi_{12}(0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) > 0$; $\Phi_2(0, \dots, 0) < 0$. Функции Φ_i , $i = 2, \dots, n-1$, Φ_{11} , Φ_{12} , Φ_{1n} , Φ_{n1} , Φ_{nn} и функции H_{1j} , $j = 1, \dots, n-1$, определены и являются гладкими класса C^m , $m \geq 5$, в малых окрестностях точек $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \geq 0)$ и $(x_1^- \leq 0, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-)$ соответственно.

На гиперповерхности удара согласно (2) выполнено равенство $\dot{x}_n = x_1 \Phi_{n1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Поэтому [11, с. 171] фазовые траектории системы (2) при $x_1 = 0$ касаются гиперповерхности $x_n = 0$; при возрастании времени t они выходят из точек $(x_1 > 0, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 0)$, а при уменьшении t — из точек $(x_1 < 0, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 0)$. В силу (2) в точках многообразия $x_1 = 0, x_n = 0$ при $x_2 > 0$ выполняются соотношения

$$\dot{x}_n = 0, \quad \ddot{x}_n = x_2 \Phi_2(0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \Phi_{n1}(0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) > 0;$$

при $x_2 < 0$ — соотношения $\dot{x}_n = 0, \ddot{x}_n < 0$; а в точке $M^* = (0, \dots, 0)$ — соотношения

$$\dot{x}_n = 0, \quad \ddot{x}_n = 0, \quad x_n''' = \frac{d^3 x_n}{dt^3} = \Phi_2(0, \dots, 0) \Phi_{12}(0, \dots, 0) \Phi_{n1}(0, \dots, 0) < 0.$$

К такому виду приводятся, например, механические системы с одной ударной парой с прямым ударом, подчиняющимся гипотезе Ньютона, в окрестности локальной особенности шестого типа, характеризуемой условиями

$$x_n = 0, \quad \dot{x}_n = 0, \quad \ddot{x}_n = 0, \quad x_n''' = \frac{d^3 x_n}{dt^3} < 0, \quad (3)$$

где производные берутся в силу дифференциальных уравнений движения системы, а x_n обозначает расстояние между соударяющимися телами.

2. Особенности качественной структуры фазового пространства. В малой окрестности (см. рис. 1 ниже) точки $M^*(0, \dots, 0)$, локальной особенности вида (3), на многообразии $x_n = 0, x_1 \geq 0$ определено [10] точечное отображение $T = T_2 T_1$ многообразия $x_n = 0, x_1 \geq 0$ в это же многообразие, где T_1 — отображение, переводящее точку $(x_1 \geq 0, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ в точку $(x_1^- \leq 0, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-, 0)$, осуществляемое траекториями системы (2), а T_2 — отображение, задаваемое формулами (1) ударных взаимодействий.

Отображение T задается [10] в малой окрестности начала координат формулами

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= [x_1 + t(x_2(a_{12} + \dots) + x_1(a_{11} + \dots)) + t^2(0, 5a_2a_{12} + \dots) + t^3A_1](b_1 + \dots) \\ &= g_1(x_1, \dots, x_{n-1}, t), \\ \bar{x}_i &= x_i + t(a_i + \dots) + A_it^2 + [x_1 + t(x_2(a_{12} + \dots) + x_1(a_{11} + \dots)) \\ &\quad + t^2(0, 5a_2a_{12} + \dots) + t^3A_1](b_i + \dots) \\ &= g_i(x_1, \dots, x_{n-1}, t), \quad i = 2, \dots, n-1,\end{aligned}\tag{4}$$

где t – первый больший нуля корень уравнения

$$\begin{aligned}g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, t) &= x_1(1 + \dots) + t \left[x_1(\tilde{a} + \dots) + x_2 \left(\frac{a_{12}}{2} + \dots \right) \right] \\ &\quad + t^2 \left(\frac{a_{12}a_2}{6} + \dots \right) + t^3A_n = 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь и далее многоточие в аналитических выражениях обозначает члены более высокого порядка малости по x_i , $i = 1, \dots, n-1$, относительно рядом стоящих членов; $a_i = \Phi_i(0, \dots, 0)$, $a_{ij} = \Phi_{ij}(0, \dots, 0)$, $b_i = H_{1i}(0, \dots, 0)$, $i, j = 1, \dots, n$; A_j , $j = 1, \dots, n$, – некоторые ограниченные функции; $\tilde{a}$ – некоторое число; $g_j \in C^m$, $j = 1, \dots, n$. Уравнение (5) при малых x_i , $i = 1, \dots, n-1$, и $x_1 \geq 0$ имеет [10] требуемое решение.

На многообразии $x_n = 0$, $x_1 \geq 0$ существует в силу (4) и (5) следующее [10] множество ν_1 , являющееся образом многообразия $x_1 = 0$, $x_n = 0$, $x_2 \geq 0$ при действии отображения T :

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2^2 \left(-\frac{3a_{12}}{8a_2}R + \dots \right) = x_2^2 \tilde{\nu}_1(x_2, \dots, x_{n-1}) = \nu_1(x_2, \dots, x_{n-1}), \\ \tilde{\nu}_1 &\in C^{m-2}, \quad x_2 \leq 0, \quad R = -b_1 = -H_{11}(0, \dots, 0).\end{aligned}\tag{6}$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1 [10]. *Существуют такие достаточно малые числа r и r^0 ($r, r^0 > 0$), что из каждой точки множества G_r , задаваемого соотношениями*

$$\sum_{i=1}^{n-1} |x_i| \leq r, \quad x_n = 0, \quad x_1 > 0 \text{ или } x_1 = 0, x_2 > 0,\tag{7}$$

выходят траектории бесконечноударных движений системы (1), (2), которые оканчиваются в точках многообразия

$$x_n = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 < 0, \quad \sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leq r^0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Под *бесконечноударным движением* понимается движение с бесконечным числом ударных взаимодействий за конечное время [12], [13].

Бесконечноударные движения, о которых говорится в теореме 1, допускают описание с помощью гладких дифференциальных уравнений. Для этого в множестве, определяемом условиями (7), следует произвести замену координат

$$x_1 = y_1 y_2^*, \quad x_i = y_i, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

Пусть к тому же E^r – множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=2}^{n-1} |x_i| \leq r, \quad x_n = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq \nu_1(x_2, \dots, x_{n-1}), \quad x_2 \leq 0, \quad (9)$$

где функция ν_1 определяется соотношениями (6). Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Существует величина $r_2^* > 0$ такая, что для любой точки M множества $E^{r_2^*}$, задаваемого условиями (9) при $r = r_2^*$, имеет место следующее утверждение: все точки $M_j = T^j(M)$, $j = 1, 2, 3, \dots$, лежат на проходящей через M интегральной кривой системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_i}{dy_1} = f_i(y_1, \dots, y_{n-1}) = y_2 \tilde{f}_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (10)$$

где $f_i = y_2 \tilde{f}_i \in C^{m-4}$.

3. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Для любых двух систем вида (1), (2) (при одном и том же значении n) локальные особенности M^* шестого типа, т.е. определяемые условиями (3), имеют достаточно малые окрестности в фазовом пространстве соответствующих систем, которые обладают одинаковой топологической структурой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть наряду с системой (1), (2) задана система того же вида, т.е. определяемая при $z_n = 0$ соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= z_1^- \hat{H}_{11}(z_1^-, \dots, z_{n-1}^-) = \hat{H}_1, \\ \bar{z}_i &= z_i^- + z_1^- \hat{H}_{1i}(z_1^-, \dots, z_{n-1}^-) = \hat{H}_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (11)$$

и при $z_n > 0$ уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 \hat{\Phi}_{11}(z_1, \dots, z_n) + z_2 \hat{\Phi}_{12}(z_1, \dots, z_n) + z_n \hat{\Phi}_{1n}(z_1, \dots, z_n) = \hat{\Phi}_1, \\ \dot{z}_i &= \hat{\Phi}_i(z_1, \dots, z_n), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{z}_n &= z_1 \hat{\Phi}_{n1}(z_1, \dots, z_n) + z_n \hat{\Phi}_{nn}(z_1, \dots, z_n) = \hat{\Phi}_n, \end{aligned} \quad (12)$$

где соответствующие функции удовлетворяют условиям п. 1.

Пусть $M^* = (x_1^* = 0, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n^* = 0)$ и $N^* = (z_1^* = 0, z_2^*, \dots, z_{n-1}^*, z_n^* = 0)$ – любые две точки, удовлетворяющие условиям теоремы 3 соответственно для систем (1),

(2) и (11), (12). После соответствующей замены переменных $u_i = x_i - x_i^*$, $i = 1, \dots, n$, и $w_i = z_i - z_i^*$, $i = 1, \dots, n$, проведенной для каждой из рассматриваемых систем, точки M^* и N^* перейдут в начала координат новых, выбранных систем координат, а условия вида (3) по-прежнему будут выполняться. Далее для новых координат u_i и w_i сохраняются старые обозначения соответственно x_i и y_i , $i = 1, \dots, n$.

Пусть теперь выбраны такие числа r_2^* и $r_{2,z}^*$, при которых справедлива теорема 2 соответственно для точек M^* и N^* обеих рассматриваемых систем. Тогда для любой точки M множества $E^{r_2^*}$ вида (9) (соответственно точки N множества $E^{r_{2,z}^*}$ надлежащего вида) бесконечноударные движения, выходящие из точки M (соответственно точки N) системы (1), (2) (соответственно системы (11), (12)), описываются следующими дифференциальными уравнениями.

Пусть для системы (1), (2) это будут уравнения (10), а для системы (11), (12) – уравнения

$$\frac{dv_i}{dv_1} = \hat{f}_i(v_1, \dots, v_{n-1}) = v_2 h_i, \quad \hat{f}_i \in C^{m-4}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (13)$$

$$z_1 = v_1 v_2^2, \quad z_j = v_j, \quad j = 2, \dots, n-1. \quad (14)$$

Пусть в новых координатах (8) через E_0 обозначается следующее множество на гиперповерхности удара:

$$\sum_{i=2}^{n-1} |y_i| \leq r_2^*, \quad y_2 \leq 0, \quad y_1 = \tilde{v}_1(y_2, \dots, y_{n-1}), \quad (15)$$

где функция $\tilde{v}_1$ определяется в (6), а через $\tilde{E}_0$ обозначается соответствующее множество (задаваемое величиной $r_{2,z}^*$) для системы (11), (12) в координатах $v_1, \dots, v_{n-1}$ из (14).

Пусть теперь через $D(M^*)$ (соответственно $D(N^*)$) обозначается замкнутое множество, которое образовано участками траекторий дифференциальных уравнений (10) (соответственно (13)), выходящими при уменьшении y_1 (соответственно v_1) из точек множества E_0 (соответственно $\tilde{E}_0$) и продолжающиеся до пересечения с множеством $y_1 = 0$ (соответственно $v_1 = 0$). Такое пересечение существует и единственно в силу вида правых частей дифференциальных уравнений (10), (13) и теорем о единственности и непрерывной зависимости от начальных условий решений дифференциальных уравнений.

Пусть T, T_1, T_2 – отображения, определенные выше для системы (1), (2), а $\tilde{T}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ – отображения, определяемые так же, как и T, T_1, T_2 , но для системы (11), (12). Тогда можно считать, что числа r_2^* и $r_{2,z}^*$ взяты настолько малыми, что точки образа $T(E_0)$ (соответственно $\tilde{T}(\tilde{E}_0)$) множества E_0 (соответственно $\tilde{E}_0$) при отображении T (соответственно $\tilde{T}$), лежащие на траекториях дифференциальных уравнений (10) (соответственно (13)), выходящих при уменьшении y_1 (уменьшении v_1) из соответствующих точек множества E_0 (соответственно $\tilde{E}_0$), принадлежат разности множеств $D(M^*) \setminus E_0$ (соответственно $D(N^*) \setminus \tilde{E}_0$), поскольку выполнены следующие условия:

- 1) образ $T(\nu_1)$ множества ν_1 , задаваемого соотношениями (6), при отображении T (при уменьшении в случае необходимости величины r_2^*) имеет [10] вид $y_1 = \tilde{\nu}_2(y_2, \dots, y_{n-1}) = \nu_2^0 + \dots$, где $\tilde{\nu}_2 \in C^{m-2}$;
- 2) имеет [10] место соотношение $\nu_2^0 < -3a_{12}R/(8a_2)$, а поэтому можно считать (при уменьшении в случае необходимости величины r_2^*), что $\tilde{\nu}_2 < \tilde{\nu}_1$ для всех рассматриваемых значений $y_2, \dots, y_{n-1}$ при $y_2 < 0$.

Пусть $D_1^0(M^*) = D_1^0$ (соответственно $D_2^0(N^*) = D_2^0$) обозначает замкнутое множество, которое заполнено траекториями дифференциальных уравнений (10) (соответственно (13)), заключенными между множествами $T(E_0)$ (соответственно $\tilde{T}(E_0)$) и E_0 (соответственно $\tilde{E}_0$). Тогда можно следующим образом установить топологическое соответствие G между $D_1^0(M^*)$ и $D_2^0(N^*)$, при котором точки

$$M^0 = \left(y_1^0 = -\frac{3a_{12}R}{8a_2}, y_2^0 = 0, y_3^0 = 0, \dots, y_{n-1}^0 = 0 \right),$$

$$N^0 = \left(v_1^0 = -\frac{3\hat{a}_{12}\hat{R}}{8\hat{a}_2}, v_2^0 = 0, v_3^0 = 0, \dots, v_{n-1}^0 = 0 \right)$$

соответствуют одна другой (здесь и далее $\hat{a}_2 = \hat{\Phi}_2(0, \dots, 0)$, $\hat{a}_{12} = \hat{\Phi}_{12}(0, \dots, 0)$, $0 < \hat{R} = -\hat{H}_{11}(0, \dots, 0) < 1$):

1) пусть G – топологическое отображение множества E_0 на $\tilde{E}_0$, задаваемое следующими соотношениями между картами многообразий E_0 и $\tilde{E}_0$:

$$v_i = \frac{r_{2,z}^*}{r_2^*} y_i, \quad i = 2, \dots, n-1; \quad (16)$$

2) пусть $\varphi(y_1, y_1^0, M)$ и $\psi(v_1, v_1^0, N)$ – общее решение систем (10) с начальным условием $M = \varphi(y_1 = y_1^0, y_1^0, M)$ и (13) с начальным условием $N = \psi(v_1 = v_1^0, v_1^0, N)$ соответственно;

3) отображение G на всем множестве $D_1^0(M^*)$ определяется как

$$G(\varphi(y_1, y_1^0(M), M)) = \psi\left(v_1^0(N) - (y_1^0(M) - y_1) \frac{v_1^0(N) - \tilde{v}_1(N)}{y_1^0(M) - \tilde{y}_1(M)}, v_1^0(N), N\right),$$

где

$$0 < \tilde{y}_1(M) \leq y_1 \leq y_1^0 = y_1^0(M), \quad 0 < \tilde{v}_1(N) \leq v_1 \leq v_1^0 = v_1^0(N),$$

$$N = (v_1^0(N), \dots, v_{n-1}^0(N)) = G(M), \quad M = (y_1^0(M), \dots, y_{n-1}^0(M)) \in E_0, \quad N \in \tilde{E}_0;$$

$$\varphi(\tilde{y}_1(M), y_1^0(M), M) \in T(E_0), \quad \psi(\tilde{v}_1(N), v_1^0(N), N) \in \tilde{T}(\tilde{E}_0).$$

Отображение G является гомеоморфизмом в силу теорем о единственности и о непрерывной зависимости от начальных условий решения системы дифференциальных уравнений.

Можно теперь следующим образом ввести на множестве $D(M^*)$ отображение G_T . Для любой точки $M \in D(M^*) \cap \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid y_1 > 0\}$

$$G_T(M) = \tilde{T}^p G T^{-p}(M), \quad (17)$$

где целое число p ($p \geq 0$) такое, что $T^{-p}(M) \in D_1^0 \setminus T(E_0)$.

Для любой точки $M \in D(M^*) \cap \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid y_1 = 0\}$

$$G_T(M) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{T}^k G(M_\infty), \quad (18)$$

где точка $M_\infty \in E_0$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} T^p(M_\infty) = M$, точка $N_\infty = G(M_\infty) \in \tilde{E}_0$, а точка M_∞ и $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{T}^k(N_\infty)$ существуют и единственны по построению областей $D(M^*)$ и $D(N^*)$ в силу определения (15) множества E_0 и в силу справедливости дифференциальных уравнений (10) и (13).

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Отображение G_T , определяемое формулами (17) и (18), является топологическим, переводит $D(M^*)$ на $D(N^*)$, а траектории отображения T в траектории отображения $\tilde{T}$.*

В справедливости этого утверждения можно убедиться аналогично тому, как это было сделано в процессе доказательства теоремы 2 в [8] при изучении свойств 1–3 соответствующего отображения G_T .

Теперь от координат $y_1, \dots, y_{n-1}$ и $v_1, \dots, v_{n-1}$ можно перейти к старым координатам $x_1, \dots, x_{n-1}$ и $z_1, \dots, z_{n-1}$. Пусть $D_x(M^*)$ (соответственно $D_z(N^*)$) обозначает в старых координатах множество, соответствующее множеству $D(M^*)$ ($D(N^*)$) при замене (8) (соответственно (14)). При этом при $x_2 = 0$ (соответственно $z_2 = 0$) в точках множества $D_x(M^*)$ (соответственно $D_z(N^*)$) имеет место равенство $x_1 = 0$ (соответственно $z_1 = 0$). Пусть $G_{T,x}$ обозначает отображение G_T , но в старых координатах. Отображение $G_{T,x}$ переводит множество $D_x(M^*)$ на множество $D_z(N^*)$.

Замена (8) (и (14)) взаимно однозначна и взаимно непрерывна при $y_2 = x_2 < 0$ (соответственно $v_2 = z_2 < 0$), а множество точек $(0 \leq y_1, y_2 = 0, y_3^M, \dots, y_{n-1}^M)$ (соответственно точек $(0 \leq v_1, v_2 = 0, v_3^N, \dots, v_{n-1}^N)$) при этой замене переходит в одну точку $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = y_3^M, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}^M)$ (соответственно в точку $(z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = v_3^N, \dots, z_{n-1} = v_{n-1}^N)$). Поэтому отображение $G_{T,x}$ на множестве $D_x(M^*)$ при $x_2 < 0$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным.

Точке $M = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3^M, \dots, x_{n-1}^M)$ множества $D_x(M^*)$ соответствует при отображении $G_{T,x}$ единственная точка

$$G_{T,x}(M) = N = (z_1 = 0, z_2 = 0, z_3^N, \dots, z_{n-1}^N) \in D_z(N^*)$$

такая, что

$$N_v = (v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = z_3^N, \dots, v_{n-1} = z_{n-1}^N) = G_T(M_y) \in D(N^*),$$

где $M_y = (y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = x_3^M, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}^M) \in D(M^*)$.

Действительно, при замене координат (8) (соответственно (14)) точке M (точке N) соответствует в силу (10) траектория

$$L = \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \mid y_1 = \text{var}, y_2(y_1) \equiv 0, y_3(y_1) \equiv x_3^M, \dots, y_{n-1}(y_1) \equiv x_{n-1}^M\}$$

дифференциальных уравнений (10) (соответственно траектория

$$S = \{(v_1, \dots, v_{n-1}) \mid v_1 = \text{var}, v_2(v_1) \equiv 0, v_3(v_1) \equiv z_3^N, \dots, v_{n-1}(v_1) \equiv z_{n-1}^N\}$$

дифференциальных уравнений (13)), причем $S = G_T(L)$ по построению отображения G_T .

Кроме того, отображение $G_{T,x}$ в точке

$$M = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3^M, \dots, x_{n-1}^M) \in D_x(M^*)$$

является непрерывным.

Действительно, малой окрестности $\Omega_x(M) \subset D_x(M^*)$ (соответственно окрестности $\tilde{\Omega}_z(N^*) \subset D_z(N^*)$) точки M (точки $N = G_{T,x}(M)$) отвечает при замене (8) (замене (14)) малая окрестность определенной выше траектории L (траектории S), т.е.

$\Omega(L) \subset D(M^*)$ (соответственно $\tilde{\Omega}(S) \subset D(N^*)$), причем верно и обратное. В силу непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от начальных условий все точки малой окрестности $\Omega(L)$ (окрестности $\tilde{\Omega}(S)$) лежат на траекториях дифференциальных уравнений (10) (соответственно (13)), которые проходят при $y_1 = 0$ ($v_1 = 0$) через точки малой окрестности $\Omega^0(M_y)$ (соответственно $\tilde{\Omega}^0(N_v)$) точки M_y (точки N_v) на множестве $D(M^*) \cap \{(y_1, \dots, y_n) \mid y_1 = 0\}$ (соответственно $D(N^*) \cap \{(v_1, \dots, v_n) \mid v_1 = 0\}$), причем верно и обратное утверждение. В силу непрерывности отображения G_T найдется такая достаточно малая окрестность $\Omega^0(M_y)$, которая перейдет при отображении G_T в любую наперед заданную окрестность $\tilde{\Omega}^0(N_v)$. Поэтому всегда найдется такая достаточно малая окрестность $\Omega_x(M)$, которая перейдет при действии отображения $G_{T,x}$ в любую наперед заданную окрестность $\tilde{\Omega}_z(N)$. Это доказывает непрерывность в точке $M(0, 0, x_3^M, \dots, x_{n-1}^M)$ отображения $G_{T,x}$.

Аналогично устанавливается и непрерывность обратного отображения $G_{T,x}^{-1}$ в точке $N(0, 0, z_3^N, \dots, z_{n-1}^N)$.

Таким образом, отображение $G_{T,x}$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным, переводит множество $D_x(M^*)$ на множество $D_z(N^*)$, траектории отображения T в траектории отображения $\tilde{T}$. По построению отображения G_T оно переводит точку

$$M^0 = \left(y_1^0 = -\frac{3a_{12}R}{8a_2}, y_2^0 = 0, \dots, y_{n-1}^0 = 0 \right)$$

в точку

$$N^0 = \left(v_1^0 = -\frac{3\hat{a}_{12}\hat{R}}{8\hat{a}_2}, v_2^0 = 0, \dots, v_{n-1}^0 = 0 \right),$$

а, следовательно, $N^* = G_{T,x}(M^*)$.

Пусть $D_{1,x}^0$ (соответственно $D_{2,z}^0$) обозначает то множество, которому при замене (8) (при замене (14)) соответствует множество $D_1^0(M^*)$ (множество $D_2^0(N^*)$). Тогда можно предполагать, уменьшая при необходимости величину r_2^* (соответственно $r_{2,z}^*$), что отображение T (соответственно $\tilde{T}$) является топологическим в точках множества $T^{-1}(D_{1,x}^0)$ (соответственно $\tilde{T}^{-1}(D_{2,z}^0)$) потому, что при малых $x_1, \dots, x_{n-1}$ отображение (1) имеет взаимно однозначное гладкое обратное отображение T_2^{-1} по теореме о неявной функции, а отображение T_1 является взаимно однозначным и взаимно непрерывным в силу теорем о единственности и о непрерывной зависимости от начальных условий решений систем дифференциальных уравнений.

Отображение $G_{T,x}$ можно теперь доопределить в точках множества $T^{-1}(D_{1,x}^0)$:

$$N = G_{T,x}(M) = \tilde{T}^{-1}G_{T,x}T(M), \quad (19)$$

где $M \in T^{-1}(D_{1,x}^0)$, $N \in \tilde{T}^{-1}(D_{2,z}^0)$. Отображение (19) является топологическим в точках множества $T^{-1}(D_{1,x}^0)$, так как таковыми являются его составляющие.

При этом (рис. 1) множество $T^{-1}(D_{1,x}^0)$ заключается между множеством (6) и множеством $x_1 = 0, x_2 \geq 0$ на многообразии $x_n = 0, x_1 \geq 0$, а множество $D_x(M^*)$ расположено между множествами $x_1 = 0, x_2 \leq 0$ и v_1 на том же многообразии. Поэтому множество $D_x(M^*) \cup T^{-1}(D_{1,x}^0)$ (соответственно $D_z(N^*) \cup \tilde{T}^{-1}(D_{2,z}^0)$) образует окрестность точки M^* (точки N^*) на многообразии $x_n = 0, x_1 \geq 0$ (соответственно $z_n = 0, z_1 \geq 0$), а точка M^* (точка N^*) – внутренняя точка этой окрестности.

Рис. 1

Образ множества $D_x(M^*) \cup T^{-1}(D_{1,x}^0)$ при отображении T_1 есть множество, расположенное между множеством $T_2^{-1}(\nu_1)$ и множеством $x_1 = 0, x_2 \leq 0$ на многообразии $x_n = 0, x_1 \leq 0$. А множество $T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0))$ заключено между множеством $T_2^{-1}(\nu_1)$ и $x_1 = 0, x_2 \geq 0$ на многообразии $x_n = 0, x_1 \leq 0$. Множество

$$D_x(M^*) \cup T^{-1}(D_{1,x}^0) \cup T_1(D_x(M^*) \cup T^{-1}(D_{1,x}^0)) \cup T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0))$$

образует окрестность точки M^* на многообразии $x_n = 0$, а M^* – его внутренняя точка. Аналогичное утверждение справедливо и относительно точки N^* .

В точках множества $T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0))$ отображение $G_{T,x}$ можно определить следующим образом:

$$N = G_{T,x}(M) = \tilde{T}_2^{-1} G_{T,x} T_2(M), \quad (20)$$

где

$$M \in T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0)), \quad N \in \tilde{T}_2^{-1}(\tilde{T}^{-1}(D_{2,z}^0)).$$

Отображение (20) является топологическим в точках множества $T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0))$, так как таковыми являются его составляющие.

Поэтому отображение $G_{T,x}$ определено и является топологическим на множестве

$$D_x(M^*) \cup T^{-1}(D_{1,x}^0) \cup T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0));$$

оно переводит траектории отображения T в траектории отображения $\tilde{T}$, а точку M^* – в точку N^* .

Пусть теперь $E_1(M^*)$ (соответственно $\tilde{E}_1(N^*)$) – множество, которое в фазовом пространстве системы (1), (2) (соответственно системы (11), (12)) составляют участки траекторий системы (2) (системы (12)), выходящие при увеличении времени из точек множества $D_x(M^*) \cup T^{-1}(D_{1,x}^0)$ (соответственно множества $D_z(N^*) \cup \tilde{T}^{-1}(D_{2,z}^0)$) и пересекающие гиперповерхность удара $x_n = 0$ (соответственно $z_n = 0$).

Пусть, кроме того, $x_i = \varphi_i(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, $i = 1, \dots, n$ (соответственно $z_i = \psi_i(t, z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$, $i = 1, \dots, n$), есть общее решение системы (2) (системы (12)) с начальными условиями $x_i^0 = \varphi_i(0, x_1^0, \dots, x_n^0)$, $i = 1, \dots, n$ (соответственно $z_i^0 = \psi_i(0, z_1^0, \dots, z_n^0)$, $i = 1, \dots, n$).

Тогда можно задать топологическое отображение G_1 множества $E_1(M^*)$ на $\tilde{E}_1(N^*)$:

$$G_1(M) = \left(\psi_1 \left(|\tau| \frac{\tilde{\theta}}{\theta}, z_1^N, \dots, z_{n-1}^N, 0 \right), \dots, \psi_n \left(|\tau| \frac{\tilde{\theta}}{\theta}, z_1^N, \dots, z_{n-1}^N, 0 \right) \right),$$

где

$$M(x_1, \dots, x_n) \in E_1(M^*), \quad (z_1^N, \dots, z_{n-1}^N) = G_{T,x}(M_{-1}), \\ M_{-1} = (\varphi_1(\tau, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(\tau, x_1, \dots, x_n)) = (x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-(n-1)}),$$

τ – ближайший к нулю неположительный корень уравнения $\varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) = 0$, θ – ближайший к нулю положительный корень уравнения $\varphi_n(t, x_{-1}, \dots, x_{-(n-1)}, 0) = 0$, $\tilde{\theta}$ – ближайший к нулю положительный корень уравнения $\psi_n(t, z_1^N, \dots, z_{n-1}^N, 0) = 0$. Считается, что

$$G_1((0, x_2 \leq 0, x_3, \dots, x_{n-1}, 0)) = (0, z_2, \dots, z_{n-1}, 0),$$

где

$$(0, z_2, \dots, z_{n-1}) = G_{T,x}((0, x_2 \leq 0, x_3, \dots, x_{n-1})).$$

Пусть $E_2(M^*)$ (соответственно $\tilde{E}_2(N^*)$) – множество, которое в фазовом пространстве системы (1), (2) (соответственно системы (11), (12)) составляют следующие участки траекторий системы (2) (соответственно системы (12)), выходящие при уменьшении времени из точек множества $T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0))$ (соответственно из точек множества $\tilde{T}_2^{-1}(\tilde{T}^{-1}(D_{2,z}^0))$):

$$x_i = \varphi_i(t, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0 = 0), \quad i = 1, \dots, n \\ (\text{соответственно } z_i = \psi_i(t, z_1^0, \dots, z_{n-1}^0, z_n^0 = 0), i = 1, \dots, n), \quad (21)$$

где $M^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) \in T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0))$ (соответственно $N^0 = (z_1^0, \dots, z_{n-1}^0) \in \tilde{T}_2^{-1}(\tilde{T}^{-1}(D_{2,z}^0))$), $0 \geq t \geq \tau + t_2(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$ (соответственно $0 \geq t \geq \hat{\tau} + \hat{t}_2(z_1^0, \dots, z_{n-1}^0)$); функция $t_2(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$ имеет вид

$$t_2(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_2^0 \geq 0, \\ \text{наибольший отрицательный корень уравнения} \\ \varphi_n(t, \gamma_1(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0), x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, 0) = 0 & \text{при } x_2^0 < 0. \end{cases}$$

Здесь и далее используется функция, задающая множество $T_2^{-1}(\nu_1)$ (соответственно множество $\tilde{T}_2^{-1}(\hat{\nu}_1)$), где множество $\hat{\nu}_1$ – образ при отображении $\tilde{T}$ многообразия $z_1 = 0$, $z_n = 0$, $z_2 \geq 0$) следующими (в силу (1) и (6)) соотношениями:

$$x_1 = \gamma_1(x_2, \dots, x_{n-1}) = x_2^2 \left(\frac{3a_{12}}{8a_2} + \dots \right), \quad x_2 \leq 0, \quad \gamma_1 \in C^{m-2}$$

(соответственно

$$z_1 = \hat{\gamma}_1(z_2, \dots, z_{n-1}) = z_2^2 \left(\frac{3\hat{a}_{12}}{8\hat{a}_2} + \dots \right), \quad z_2 \leq 0, \quad \hat{\gamma}_1 \in C^{m-2}).$$

Для определения функции $\hat{\tau}(z_1^0, \dots, z_{n-1}^0)$ будет далее использована функция $k(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$, которая задается следующим образом:

1) если у точки M^0 координата $x_2^0 < 0$, то

$$k = \frac{\tilde{\theta}}{\theta}, \quad (22)$$

где θ – ближайший к нулю отрицательный корень уравнения

$$\varphi_n(t, \gamma_1(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0), x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, 0) = 0,$$

$\tilde{\theta}$ – ближайший к нулю отрицательный корень уравнения

$$\begin{aligned} \psi_n(t, z_{-1}, z_{-2}, \dots, z_{-(n-1)}, 0) &= 0, \\ (z_{-1}, z_{-2}, \dots, z_{-(n-1)}) &= N_{-1} = G_{T,x}(M_0^0) \in \tilde{T}_2^{-1}(\hat{\nu}_1), \\ M_0^0 &= (\gamma_1(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0), x_2^0, \dots, x_{n-1}^0); \end{aligned}$$

2) если у точки M^0 координата $x_2^0 > 0$, то также верно (22), но уже θ – ближайший к нулю положительный корень уравнения

$$\varphi_n(t, 0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, 0) = 0,$$

$\tilde{\theta}$ – ближайший к нулю положительный корень уравнения

$$\psi_n(t, 0, z_{-2}, \dots, z_{-(n-1)}, 0) = 0,$$

здесь

$$(z_{-1} = 0, z_{-2}, \dots, z_{-(n-1)}) = N_{-1} = G_{T,x}(M_0^1), \quad M_0^1 = (0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0);$$

3) если у точки M^0 координата $x_2^0 = 0$, то

$$k(x_2^0 = 0, x_3^0, \dots, x_{n-1}^0) = \lim_{x_2 \rightarrow +0} k(x_2, x_3^0, \dots, x_{n-1}^0) = \lim_{x_2 \rightarrow -0} k(x_2, x_3^0, \dots, x_{n-1}^0).$$

Здесь первый предел существует и равен $(r_{2,z}^*/r_2^*)(a_2/\hat{a}_2) + \dots$ в силу определения $G_{T,x}(M_0^1)$, (16), (14), (8) и того, что решение уравнения (5) для точек множества $x_n = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 \geq 0$ имеет [10] вид $t = x_2 \tilde{t} = x_2(-3/a_2 + \dots)$, $\tilde{t} \in C^{m-2}$, а второй предел существует и равен первому в силу определения функции k . Кроме того, при достаточно малых r_2^* и $r_{2,z}^*$ имеет место неравенство $k(x_2^0, x_3^0, \dots, x_{n-1}^0) > 0$, а функция k является непрерывной.

Функция $\hat{\tau}(z_1^0, \dots, z_{n-1}^0)$, введенная после (21), имеет вид

$$\hat{\tau} = k(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)[\tau + t_2(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)],$$

где

$$N^0(z_1^0, \dots, z_{n-1}^0) = G_{T,x}(M^0), \quad M^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0) \in T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0));$$

константа τ (соответственно функция $\hat{\tau} = k(\tau + t_2)$) – достаточно малая отрицательная величина (соответственно функция) такая, что для всех участков траекторий (21) имеет место неравенство

$$\varphi_n(t, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, 0) > 0 \quad (\text{соответственно } \psi_n(t, z_1^0, \dots, z_{n-1}^0, 0) > 0)$$

при $M^0 \notin T_2^{-1}(\nu_1)$ (соответственно при $N^0 \notin \tilde{T}_2^{-1}(\hat{\nu}_1)$) для $0 > t \geq \tau + t_0$ (соответственно для $0 > t \geq \hat{\tau}$), а при $M^0 \in T_2^{-1}(\nu_1)$ (соответственно при $N^0 \in \tilde{T}_2^{-1}(\hat{\nu}_1)$) для всех $0 > t \geq \tau + t_0$ (соответственно для всех $0 > t \geq \hat{\tau}$), за исключением такого t , при котором участок траектории (21) первый раз попадает при уменьшении t на гиперповерхность $x_n = 0$ (соответственно на гиперповерхность $z_n = 0$).

Существования таких τ и $\hat{\tau}$ можно добиться, уменьшая при необходимости величины r_2^* и $r_{2,z}^*$ соответственно.

Множества $E_1(M^*)$ и $E_2(M^*)$ имеют общую часть, которая состоит из участков траекторий системы (2), выходящих при уменьшении времени t из точек множества $T_2^{-1}(\nu_1) \cap T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0))$ и впервые пересекающих многообразие $x_n = 0$ в точках многообразия $x_1 = 0$, $x_2 \geq 0$ (последние принадлежат множеству $T^{-1}(D_{1,x}^0)$). Аналогичное утверждение справедливо и относительно множеств $\tilde{E}_1(N^*)$ и $\tilde{E}_2(N^*)$.

Множество $E_1(M^*) \cup E_2(M^*)$ (соответственно $\tilde{E}_1(N^*) \cup \tilde{E}_2(N^*)$) образует окрестность точки M^* (точки N^*) в фазовом пространстве системы (1), (2) (системы (11), (12)), а точка M^* (точка N^*) – его внутренняя точка.

Теперь можно задать отображение G_2 множества $E_2(M^*)$ на $\tilde{E}_2(N^*)$:

$$\begin{aligned} G_2(M) &= (\psi_1(-\tau_M k(x_{-2}, \dots, x_{-(n-1)}), z_1^M, \dots, z_{n-1}^M, 0), \dots, \\ &\quad \psi_n(-\tau_M k(x_{-2}, \dots, x_{-(n-1)}), z_1^M, \dots, z_{n-1}^M, 0)), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} M(x_1, \dots, x_n) &\in E_2(M^*)(z_1^M, \dots, z_{n-1}^M) = G_{T,x}(M_{-1}) \in \tilde{T}_2^{-1}(\tilde{T}^{-1}(D_{2,z}^0)), \\ M_{-1} &= (\varphi_1(\tau_M, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(\tau_M, x_1, \dots, x_n)) = (x_{-1}, \dots, x_{-(n-1)}) \\ &\in T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0)), \end{aligned}$$

τ_M – ближайший к нулю неотрицательный корень уравнения $\varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) = 0$, если M не принадлежит множеству S_0 фазовых траекторий системы (2), выходящих при уменьшении времени t из точек множества $T_2^{-1}(\nu_1)$, а если $M \in S_0$, то τ_M – неотрицательный корень уравнения $\varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) = 0$, который соответствует попаданию фазовой точки на множество $T_2^{-1}(\nu_1)$; функция k определена выше.

Отображение G_2 является взаимно однозначным и непрерывным в силу своего определения и соответствующих теорем о решениях дифференциальных уравнений.

Обратное отображение G_2^{-1} можно задать формулой вида (23) с очевидными изменениями:

$$G_2^{-1}(N) = \left(\varphi_1 \left(-\frac{\tau_N}{k(x_2^N, \dots, x_{n-1}^N)}, x_1^N, \dots, x_{n-1}^N, 0 \right), \dots, \right. \\ \left. \varphi_n \left(-\frac{\tau_N}{k(x_2^N, \dots, x_{n-1}^N)}, x_1^N, \dots, x_{n-1}^N, 0 \right) \right), \quad (24)$$

где

$$N(z_1, \dots, z_n) \in \tilde{E}_2(N^*), \quad (x_1^N, \dots, x_{n-1}^N) = G_{T,x}^{-1}(N_{-1}) \in T_2^{-1}(T^{-1}(D_{1,x}^0)), \\ N_{-1} = (\psi_1(\tau_N, z_1, \dots, z_n), \dots, \psi_{n-1}(\tau_N, z_1, \dots, z_n)) \in \tilde{T}_2^{-1}(\tilde{T}^{-1}(D_{2,z}^0)),$$

τ_N – ближайший к нулю неотрицательный корень уравнения $\psi_n(t, z_1, \dots, z_n) = 0$, если N не принадлежит множеству $\tilde{S}_0$ фазовых траекторий системы (12), выходящих при уменьшении времени из точек множества $\tilde{T}_2^{-1}(\hat{\nu}_1)$, а если $N \in \tilde{S}_0$, то τ_N – неотрицательный корень уравнения $\psi_n(t, z_1, \dots, z_n) = 0$, который соответствует попаданию фазовой точки на множество $\tilde{T}_2^{-1}(\hat{\nu}_1)$. Поскольку, как указывалось выше, $k > 0$, то отображение (24) является непрерывным, а отображение G_2 – топологическим.

Кроме того, отображение G_2 переводит траектории системы (2) в траектории системы (12), а точку M^* в точку N^* .

Теперь можно задать отображение G множества $E_1(M^*) \cup E_2(M^*)$ на множество $\tilde{E}_1(N^*) \cup \tilde{E}_2(N^*)$ следующим образом:

$$G(M) = \begin{cases} G_1(M), & \text{если } M \in E_1(M^*), \\ G_2(M), & \text{если } M \in E_2(M^*). \end{cases}$$

Поскольку

1) в силу определения отображений G_1 и G_2 , $G_i(E_i(M^*)) = \tilde{E}_i(N^*)$, $i = 1, 2$, отображения G_1 и G_2 на множестве $E_1(M^*) \cap E_2(M^*)$ совпадают и $G_i(E_1(M^*) \cap E_2(M^*)) = \tilde{E}_1(N^*) \cap \tilde{E}_2(N^*)$, $i = 1, 2$;

2) множества $E_i(M^*)$, $\tilde{E}_i(N^*)$, $i = 1, 2$, являются замкнутыми;

3) отображения G_i , $i = 1, 2$, являются топологическими,

то [14, с. 70] отображение G является топологическим, переводит множество $E_1(M^*) \cup E_2(M^*)$ на множество $\tilde{E}_1(N^*) \cup \tilde{E}_2(N^*)$. Кроме того, в силу своего определения отображение G переводит точку M^* в точку N^* , а траектории системы (1), (2) в траектории системы (11), (12). Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
- [2] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
- [3] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
- [4] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [5] Ленисов Г. Г., Неймарк Ю. И., Сандалов В. М., Цветков Ю. В. Об обкате ротора по жесткому подшипнику // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. 1973. № 4. С. 7–13.
- [6] Федосенко Ю. С. О структуре фазового пространства и периодических движениях неавтономных динамических систем с ударными взаимодействиями // ПММ. 1976. Т. 40. № 4. С. 618–629.
- [7] Горбиков С. П. Особенности строения фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. 1987. № 3. С. 23–26.
- [8] Горбиков С. П. Локальные особенности динамических систем с ударными взаимодействиями // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 4. С. 531–542.
- [9] Горбиков С. П. Дифференциальные уравнения, определяемые динамическими системами с ударными взаимодействиями на гиперповерхности удара // Вестн. Нижегородского гос. ун-та. Матем. моделирование и оптимальное управление. Вып. 1(18). Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1998. С. 43–52.
- [10] Горбиков С. П. Структура фазового пространства динамических систем с ударными взаимодействиями. Деп. в ВИНТИ СССР 23.05.85 № 3559. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1985. 15 с..
- [11] Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., 1972.
- [12] Фейгин М. И. Скользящий режим в динамических системах с ударными взаимодействиями // ПММ. 1967. Т. 31. № 3. С. 533–536.
- [13] Нагаев Р. Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985.
- [14] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд-во Московского ун-та, 1980.

НИИ прикладной математики и кибернетики
при Нижегородском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
03.12.1999
Исправленный вариант
30.11.2000