Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дмитриева, Точечно-инвариантные классы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 195–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm733>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:21:42

УДК 517.91+514.8

ТОЧЕЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ КЛАССЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. В. Дмитриева

Рассмотрено действие точечных преобразований общего вида на обыкновенные дифференциальные уравнения третьего порядка, разрешенные относительно старшей производной. Выделены инвариантные классы уравнений относительно данных преобразований.

Библиография: 25 названий.

1. Введение. Рассмотрим класс обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, разрешенных относительно старшей производной

$$y''' = f(x, y, y', y''). \quad (1.1)$$

Точечные преобразования общего вида

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{x}(x, y), \\ \tilde{y} = \tilde{y}(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

переводят уравнение (1.1) в новое уравнение

$$\tilde{y}''' = g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''). \quad (1.3)$$

Выберем специальный класс уравнений (1.1), у которых правая часть f принадлежит некоторому заданному семейству функций $\mathcal{F}$ (т.е. $f \in \mathcal{F}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если для любой функции $f \in \mathcal{F}$ правая часть преобразованного уравнения (1.3) также принадлежит $\mathcal{F}$, т.е. $g \in \mathcal{F}$, то данный класс уравнений называется *инвариантным* или *замкнутым* классом относительно преобразований (1.2).

Как правило, исследуются специальные классы уравнений (1.1) с полиномиальной или рациональной по производным y' и y'' правыми частями.

В конце XIX века Лиувилль [1], Ли [2], [3] и Трессе [4], [5] исследовали класс уравнений с полиномиальной по y' правой частью

$$y'' = P(x, y) + 3Q(x, y)y' + 3R(x, y)y'^2 + S(x, y)y'^3. \quad (1.4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00068.

Этот класс уравнений замкнут относительно точечных преобразований общего вида (1.2). Картан ассоциировал уравнения данного класса с уравнениями геодезических в пространствах проективной связности [6]–[9].

Замкнутость класса уравнений (1.4) отмечалась также в работах Томсена [10], Гриссома и др. [11], Ибрагимова [12], Дрюма [13]–[15], Бордаг и Дрюма [16], Бордаг и Бабича [17], [18], Романовского [19], Баско и Матсумото [20], Гусятниковой и Юмагужина [21], Шарипова и Дмитриевой [22]–[24].

В [25] Шарипов и Михайлов рассмотрели другой замкнутый класс уравнений второго порядка:

$$y'' = \frac{P(x, y) + 4Q(x, y)y' + 6R(x, y)y'^2 + 4S(x, y)y'^3 + L(x, y)y'^4}{Y(x, y) - X(x, y)y'}.$$

Он получил название *точечного расширения класса* (1.4).

Более сложный замкнутый класс обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка упомянут Бордаг в [17]:

$$y''^2 = P_5(y'; x, y),$$

где функция P_5 есть полином пятого порядка по производной y' .

2. Точечные преобразования производных. Обозначим

$$S = \begin{vmatrix} x_{1.0} & x_{0.1} \\ y_{1.0} & y_{0.1} \end{vmatrix}, \quad T = \begin{vmatrix} \tilde{x}_{1.0} & \tilde{x}_{0.1} \\ \tilde{y}_{1.0} & \tilde{y}_{0.1} \end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

В формулах (2.1) S – матрица перехода от координат (x, y) к координатам $(\tilde{x}, \tilde{y})$, а T – матрица обратного перехода от координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ к координатам (x, y) . Точечное преобразование (1.2) считаем невырожденным, поэтому $\det S \neq 0$. Здесь и далее под обозначением $\Phi_{i,j}$ понимаем частную производную $\partial^{i+j}\Phi/\partial x^i\partial y^j$. Так

$$x_{1.0} = \frac{\partial x(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}}.$$

При замене координат производная y' преобразуется по правилу

$$y' = \frac{y_{1.0} + y_{0.1}\tilde{y}'}{x_{1.0} + x_{0.1}\tilde{y}'}. \quad (2.2)$$

Для второй производной y'' аналогичное преобразование имеет более сложный вид:

$$y'' = \frac{y_{2.0} + 2y_{1.1}\tilde{y}' + y_{0.2}\tilde{y}'^2 + y_{0.1}\tilde{y}''}{(x_{1.0} + x_{0.1}\tilde{y}')^2} - \frac{(y_{1.0} + y_{0.1}\tilde{y}')(x_{2.0} + 2x_{1.1}\tilde{y}' + x_{0.2}\tilde{y}'^2 + x_{0.1}\tilde{y}'')}{(x_{1.0} + x_{0.1}\tilde{y}')^3}. \quad (2.3)$$

Запишем закон преобразования третьей производной в виде

$$y''' = \frac{a_1\tilde{y}''' + a_2\tilde{y}''^2 + a_3\tilde{y}''\tilde{y}'^2 + a_4\tilde{y}''\tilde{y}' + a_5\tilde{y}''}{(x_{1.0} + x_{0.1}\tilde{y}')^5} + \frac{a_6\tilde{y}'^5 + a_7\tilde{y}'^4 + a_8\tilde{y}'^3 + a_9\tilde{y}'^2 + a_{10}\tilde{y}' + a_{11}}{(x_{1.0} + x_{0.1}\tilde{y}')^5}. \quad (2.4)$$

За исключением коэффициента a_1 , все коэффициенты $a_2, \dots, a_{11}$ в (2.4) суть функции от x, y и их производных по $\tilde{x}, \tilde{y}$. Выпишем для них явные формулы.

Коэффициент при $\tilde{y}'''$:

$$a_1 = -(x_{1.0} + x_{0.1}\tilde{y}')(y_{1.0}x_{0.1} - x_{1.0}y_{0.1}). \quad (2.5)$$

Коэффициент при $\tilde{y}''^2$:

$$a_2 = 3x_{0.1}(y_{1.0}x_{0.1} - x_{1.0}y_{0.1}). \quad (2.6)$$

Коэффициент при $\tilde{y}''\tilde{y}'^2$:

$$a_3 = -6y_{0.1}x_{1.0}x_{0.2} - 3y_{1.1}x_{0.1}^2 + 3y_{1.0}x_{0.2}x_{0.1} + 3y_{0.2}x_{1.0}x_{0.1} + 3y_{0.1}x_{1.1}x_{0.1}. \quad (2.7)$$

Коэффициент при $\tilde{y}''\tilde{y}'$:

$$a_4 = 9y_{1.0}x_{0.1}x_{1.1} - 3y_{2.0}x_{0.1}^2 + 3y_{0.1}x_{2.0}x_{0.1} + 3y_{0.2}x_{1.0}^2 - 3y_{1.0}x_{0.2}x_{1.0} - 9y_{0.1}x_{1.1}x_{1.0}. \quad (2.8)$$

Коэффициент при $\tilde{y}''$:

$$a_5 = -3y_{1.0}x_{1.1}x_{1.0} + 6y_{1.0}x_{2.0}x_{0.1} - 3y_{0.1}x_{1.0}x_{2.0} + 3y_{1.1}x_{1.0}^2 - 3y_{2.0}x_{1.0}x_{0.1}. \quad (2.9)$$

Коэффициент при $\tilde{y}'^5$:

$$a_6 = 3y_{0.1}x_{0.2}^2 - 3y_{0.2}x_{0.1}x_{0.2} + y_{0.3}x_{0.1}^2 - y_{0.1}x_{0.3}x_{0.1}. \quad (2.10)$$

Коэффициент при $\tilde{y}'^4$:

$$\begin{aligned} a_7 = & -3y_{0.1}x_{1.2}x_{0.1} - 3y_{0.2}x_{1.0}x_{0.2} - y_{0.1}x_{0.3}x_{1.0} \\ & - 6y_{1.1}x_{0.2}x_{0.1} + 2y_{0.3}x_{1.0}x_{0.1} + 3y_{1.0}x_{0.2}^2 \\ & - y_{1.0}x_{0.3}x_{0.1} - 6y_{0.2}x_{1.1}x_{0.1} + 12y_{0.1}x_{1.1}x_{0.2} + 3y_{1.2}x_{0.1}^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Коэффициент при $\tilde{y}'^3$:

$$\begin{aligned} a_8 = & -3y_{0.1}x_{2.1}x_{0.1} - 6y_{0.2}x_{1.1}x_{1.0} - y_{1.0}x_{0.3}x_{1.0} \\ & - 3y_{0.1}x_{1.2}x_{1.0} + 12y_{0.1}x_{1.1}^2 - 3y_{0.2}x_{2.0}x_{0.1} \\ & - 3y_{2.0}x_{0.2}x_{0.1} - 6y_{1.1}x_{0.2}x_{1.0} + 6y_{0.1}x_{2.0}x_{0.2} \\ & - 12y_{1.1}x_{0.1}x_{1.1} + 6y_{1.2}x_{1.0}x_{0.1} + y_{0.3}x_{1.0}^2 \\ & + 3y_{2.1}x_{0.1}^2 - 3y_{1.0}x_{1.2}x_{0.1} + 12y_{1.0}x_{1.1}x_{0.2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Коэффициент при $\tilde{y}'^2$:

$$\begin{aligned} a_9 = & -3y_{1.0}x_{1.2}x_{1.0} + 12y_{0.1}x_{2.0}x_{1.1} + 3y_{1.2}x_{1.0}^2 \\ & + y_{3.0}x_{0.1}^2 - 6y_{2.0}x_{1.1}x_{0.1} - 3y_{0.1}x_{2.1}x_{1.0} \\ & - 6y_{1.1}x_{2.0}x_{0.1} - 3y_{1.0}x_{2.1}x_{0.1} - y_{0.1}x_{3.0}x_{0.1} \\ & - 3y_{0.2}x_{2.0}x_{1.0} + 6y_{1.0}x_{2.0}x_{0.2} + 6y_{2.1}x_{1.0}x_{0.1} \\ & - 12y_{1.1}x_{1.0}x_{1.1} + 12y_{1.0}x_{1.1}^2 - 3y_{2.0}x_{0.2}x_{1.0}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Коэффициент при $\tilde{y}'$:

$$\begin{aligned} a_{10} = & -3y_{2.0}x_{0.1}x_{2.0} + 12y_{1.0}x_{2.0}x_{1.1} - 6y_{2.0}x_{1.1}x_{1.0} \\ & - 6y_{1.1}x_{2.0}x_{1.0} - 3y_{1.0}x_{2.1}x_{1.0} - y_{0.1}x_{3.0}x_{1.0} \\ & + 2y_{3.0}x_{1.0}x_{0.1} + 3y_{0.1}x_{2.0}^2 + 3y_{2.1}x_{1.0}^2 - y_{1.0}x_{3.0}x_{0.1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Коэффициент при 1:

$$a_{11} = -y_{1.0}x_{3.0}x_{1.0} + y_{3.0}x_{1.0}^2 + 3y_{1.0}x_{2.0}^2 - 3y_{2.0}x_{1.0}x_{2.0}. \quad (2.15)$$

Формула (2.3) вместе с совокупностью формул (2.4)–(2.15) определяет закон преобразования третьей производной y''' при точечных преобразованиях (2.1).

3. Замкнутые классы уравнений (1.1). Будем искать инвариантный класс уравнений (1.1) с рациональной по y' и y'' правой частью. Воспользуемся правилом преобразования третьей производной (2.4)–(2.15) для простейшего уравнения вида (1.1)

$$y''' = 0. \quad (3.1)$$

Вид преобразованного уравнения (3.1)

$$\begin{aligned} \tilde{y}''' = & \frac{3x_{0.1}\tilde{y}''^2}{x_{1.0} + x_{0.1}\tilde{y}'} \\ & + \frac{a_3\tilde{y}''\tilde{y}'^2 + a_4\tilde{y}''\tilde{y}' + a_5\tilde{y}'' + a_6\tilde{y}'^5 + a_7\tilde{y}'^4 + a_8\tilde{y}'^3 + a_9\tilde{y}'^2 + a_{10}\tilde{y}' + a_{11}}{(x_{1.0} + x_{0.1}\tilde{y}')(y_{1.0}x_{0.1} - x_{1.0}y_{0.1})} \end{aligned} \quad (3.2)$$

позволяет искать замкнутый класс уравнений (1.1) в виде

$$\begin{aligned} y''' = & \frac{B(x, y)y''^2 + P(x, y)y''y' + Q(x, y)y'y' + R(x, y)y'' + S(x, y)y'^5}{Y(x, y) - X(x, y)y'} \\ & + \frac{L(x, y)y'^4 + K(x, y)y'^3 + M(x, y)y'^2 + N(x, y)y' + T(x, y)}{Y(x, y) - X(x, y)y'}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Преобразуем произвольное уравнение (3.3) с помощью формул (2.2)–(2.15). Модифицированное уравнение, вообще говоря, не принадлежит классу уравнений (3.3). Коэффициент $B/(Y - Xy')$ при y''^2 в правой части (3.3) при преобразовании координат образует новый коэффициент при $y'y''^2$:

$$\tilde{y}''' = \frac{(\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2\tilde{y}')\tilde{y}''^2}{(\tilde{Y} - \tilde{X}\tilde{y}')(x_{1.0} + x_{0.1}\tilde{y})} + \dots \quad (3.4)$$

Введем новую функцию $f(z)$, зависящую от параметра $z = y'$, ассоциированную с уравнением (3.4):

$$f(z) = \frac{\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 z}{x_{1.0} + x_{0.1} z}, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= 3x_{0.1}(Yx_{0.1} - Xy_{0.1}), \\ \tilde{B}_2 &= 3x_{0.1}(Yx_{1.0} - Xy_{1.0}) + B(x_{1.0}y_{0.1} - x_{0.1}y_{1.0}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Рациональная функция $f(z)$ из (3.5) имеет полюс первого порядка в точке $z_0 = -x_{1.0}/x_{0.1}$. Найдем вычет этой функции в точке z_0 и обозначим его через Ω :

$$\Omega = \text{Res}_{z=z_0} f(z). \quad (3.7)$$

Используя выражения (3.6), нетрудно получить явную формулу для величины Ω , определенной в (3.7):

$$\Omega = (B + 3X) \det S. \quad (3.8)$$

Условие $\Omega = 0$ составляет *необходимое условие* инвариантности класса уравнений (3.2). Точечные преобразования (1.2) невырождены, поэтому условие (3.8) эквивалентно дополнительному соотношению на функции B и X

$$B = -3X. \quad (3.9)$$

Непосредственной проверкой доказывается, что условие (3.9) является также *достаточным условием* замкнутости класса уравнений (3.2) относительно точечных преобразований (1.2). Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Класс уравнений вида*

$$y''' = \frac{-3X(x, y)y''^2 + P(x, y)y''y'^2 + Q(x, y)y''y' + R(x, y)y'' + S(x, y)y'^5}{Y(x, y) - X(x, y)y'} + \frac{L(x, y)y'^4 + K(x, y)y'^3 + M(x, y)y'^2 + N(x, y)y' + T(x, y)}{Y(x, y) - X(x, y)y'} \quad (3.10)$$

является инвариантным классом относительно преобразований (1.2).

Этот результат можно обобщить, если вместо уравнений (3.3) рассмотреть более широкий класс уравнений

$$y''' = -\frac{3X f_2(1/y')y''^2}{Y - Xy'} + f_1\left(\frac{1}{y'}\right)y'^2y'' + f_0\left(\frac{1}{y'}\right)y'^5. \quad (3.11)$$

Рациональные функции $f_2(z)$, $f_1(z)$ и $f_0(z)$ в (3.11) имеют полюсы в точке $z_0 = -x_{1,0}/x_{0,1}$.

Аналогично предыдущим рассуждениям *необходимыми и достаточными условиями* замкнутости класса уравнений (3.11) являются:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f_2(z) = 1, \quad \operatorname{Res}_{z=z_0} f_1(z) = 0, \quad \operatorname{Res}_{z=z_0} f_0(z) = 0. \quad (3.12)$$

ТЕОРЕМА 2. *Класс уравнений (3.11) с рациональными функциями f_i ($i = 0, 1, 2$), удовлетворяющими соотношениям (3.12), замкнут относительно преобразований (1.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы проводится прямыми вычислениями с использованием правил преобразования производных (2.2)–(2.15).

Автор выражает благодарность Р. А. Шарипову за постановку задачи и интерес, проявленный к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Liouville R. Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications // J. École Polytechnique. 1889. V. 59. P. 7–76.
- [2] Lie S. Vorlesungen über continuierliche Gruppen. Leipzig: Teubner Verlag, 1893.
- [3] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen III. Leipzig: Teubner Verlag, 1930.
- [4] Tresse A. Sur les invariants différents des groupes continus de transformations // Acta Math. 1894. V. 18. P. 1–88.
- [5] Tresse A. Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire de 2ème ordre: $y'' = w(x, y, y')$ // Preisschriften der fürstlichen Jablonowski'schen Gesellschaft. V. XXXII. Leipzig: Hirzel, 1896.
- [6] Cartan E. Sur les variétés à connexion projective // Bull. Math. Soc. France. 1924. V. 52. P. 205–241.
- [7] Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée // Ann. École Norm. Sup. 1923. V. 40. P. 325–412; 1924. V. 41. P. 1–25; 1925. V. 42. P. 17–88.
- [8] Cartan E. Sur les espaces à connexion conforme // Ann. Soc. Math. Pologne. 1923. V. 2. P. 171–221.
- [9] Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Волгоград: Платон, 1997.
- [10] Thomsen G. Über die topologischen Invarianten der Differentialgleichung $y'' = f(x, y)y'^3 + g(x, y)y'^2 + h(x, y)y' + k(x, y)$ // Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 1930. V. 7. P. 301–328.

- [11] Grissom C., Thompson G., Wilkens G. Linearisation of second-order ordinary differential equations via Cartan's equivalence method // J. Differential Equations. 1989. V. 77. P. 1–15.
- [12] Ibragimov N. Kh. Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations. Wiley Series in Math. Methods in Practice. V. 4. England: Wiley, 1999.
- [13] Дрюма В. С. Геометрическая теория нелинейных динамических систем. Препринт ИМ с ВЦ АН МССР. Кишинев, 1986.
- [14] Дрюма В. С. О теории подмногообразий проективных пространств, определяемых дифференциальными уравнениями // Сб. статей. Кишинев: ИМ с ВЦ АН МССР, 1989. С. 75–87.
- [15] Дрюма В. С. Геометрические свойства многомерных нелинейных дифференциальных уравнений и фазовое пространство динамических систем с финслеровой метрикой // ТМФ. 1994. Т. 99. № 2. С. 241–249.
- [16] Bordag L. A., Dryuma V. S. Investigation of Dynamical Systems Using Tools of the Theory of Invariants and Projective Geometry // NTZ-Preprint 24/95. Leipzig, 1995; // E-print solv-int/9705006, 1997.
- [17] Bordag L. A. Symmetries of the Painleve equations and the connection with projective differential geometry // 7th EWM Meeting Proceedings. Trieste, Italy: Hindawi Publishing Corporation, 1997. P. 145–159.
- [18] Babich M. V., Bordag L. A. Projective differential geometrical structure of the Painlevé equations // J. Differential Equations. 1999. V. 157. № 2. P. 452–485.
- [19] Романовский Ю. Р. Вычисление локальных симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом эквивалентности Картана. Рукопись.
- [20] Bacso S., Matsumoto M. On Finsler spaces of Douglas type. A generalisation of the notion of Berwald space // Publ. Math. Debrecen. 1997. V. 51. № 3–4. P. 385–406.
- [21] Гусятникова В. Н., Юмагузин В. А. Точечные преобразования и линеаризуемость обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 1. С. 146–148.
- [22] Dmitrieva V. V., Sharipov R. A. On the point transformations for the second order differential equations // E-print solv-int/9703003, 1997.
- [23] Sharipov R. A. On the point transformations for the equation $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$ // E-print solv-int/9706003, 1997.
- [24] Sharipov R. A. Effective procedure of point classification for the equations $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$ // E-print math.DG/9802027, 1998.
- [25] Mikhailov O. N., Sharipov R. A. On the point expansion for a certain class of differential equations of second order // E-print solv-int/9712001, 1997.