Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ибрагимов, К задаче группового преследования с интегральными ограничениями на управления игроков, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 201–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm734>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:08:31

УДК 517.92

К ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

Г. И. Ибрагимов

Рассматривается линейная дифференциальная игра многих лиц с интегральными ограничениями на управления игроков. Преследование считается завершенным, если решение хотя бы одного из уравнений, описывающих игру, в некоторый момент попадает в начало координат. В случае одного преследующего игрока получено необходимое и достаточное условие возможности завершения преследования из всех точек пространства. В случае многих преследующих получено достаточное условие возможности завершения преследования из всех точек пространства.

Библиография: 10 названий.

1. Постановка задачи. Рассматривается управляемая система

$$\dot{z}_i = C_i z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_{i0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где $z_i \in \mathbb{R}^n$; C_i – постоянная $(n \times n)$ -матрица; u_i – управляющий параметр преследования; v – управляющий параметр убегания. Параметр u_i выбирается в виде функции $u_i = u_i(\cdot)$ из замкнутого шара $S(\rho_i)$ радиуса ρ_i с центром в начале координат пространства $L_2[0; \infty)$, а параметр v в виде функции $v = v(\cdot)$ из шара $S(\sigma) \subset L_2[0, \infty)$. Такие функции мы называем *допустимыми управлениями* преследующих и убегającego. Если $u_i(\cdot)$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, и $v(\cdot)$ – допустимые управления i -го преследующего и убегającego соответственно, то траектория $z_i(\cdot)$ определяется как абсолютно-непрерывное решение задачи Коши

$$\dot{z}_i = C_i z_i + u_i(t) - v(t), \quad z_i(t_0) = z_{i0}.$$

Цель i -го преследующего состоит в том, чтобы обеспечить равенство $z_i(t) = 0$ за возможно наименьшее время t , а цель убегającego – препятствовать этому. Игра (1) считается завершенной, если $z_i(t') = 0$ для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ и при некотором $t' \geq t_0$. Этими данными определяется линейная дифференциальная игра многих лиц с интегральными ограничениями на управляющие параметры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u(t, v)$, $u: [t_0; \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которой при каждом $v(\cdot) \in S(\sigma)$ суперпозиция $t \rightarrow u(t, v(t))$ лежит в $S(\rho)$, назовем *контруправлением*.

Допустимую стратегию i -го преследующего определим как элемент класса контруправлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что в игре (1) из начального положения $z^0 = \{z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0}\}$ *возможно завершение преследования за время $T(z^0)$* , если существуют допустимые стратегии преследующих $u_1 = u_1(\cdot), u_2 = u_2(\cdot), \dots, u_m = u_m(\cdot)$ такие, что для любого $v(\cdot) \in S(\sigma)$ для решения системы (1) с $u_i = u_i(t, v(t)), v = v(t), t_0 \leq t \leq T(z^0)$, выполняется условие $z_j(\tau) = 0$ при некотором $\tau \in [t_0, T(z^0)]$ и некотором $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $v(t, z_1, z_2, \dots, z_m), v: [t_0; \infty) \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, назовем *стратегией убегающего*, если система (1) с $u_i = u_i(t), i = 1, 2, \dots, m$, и $v = v(t, z_1, z_2, \dots, z_m)$ имеет единственное абсолютно-непрерывное решение, где $u_i(\cdot), i = 1, 2, \dots, m$, — произвольные допустимые управления преследователей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что в игре (1) из начального положения $z^0 = \{z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0}\}$ *невозможно завершение преследования*, если можно построить такую допустимую стратегию убегающего v , что для любых допустимых управлений преследующих $u_1 = u_1(\cdot), u_2 = u_2(\cdot), \dots, u_m = u_m(\cdot)$ для решения системы (1) с $v = v(t, z_1, z_2, \dots, z_m)$ и $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \dots, u_m = u_m(t)$ для всех $j \in \{1, \dots, m\}$ и $t \geq t_0$ выполнено соотношение $z_j(t) \neq 0$.

В данной работе рассматривается игра качества (см. [1], [2]). Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления игроков рассмотрены во многих работах (см. [3]–[9]). В работах [7], [8] получены достаточные условия завершения преследования из всех точек пространства. Ниже получено условие на матрицы $C_i, i = 1, 2, \dots, m$, которое при $m = 1$ является необходимым и достаточным условием завершения преследования из всех точек пространства (теорема 1).

2. Вспомогательная дифференциальная игра. Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую уравнением

$$\dot{z} = Cz + u - v, \quad u(\cdot) \in S(\rho), \quad v(\cdot) \in S(\sigma), \quad z(t_0) = z_0, \quad (2)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$; C — постоянная $(n \times n)$ -матрица; u — управляющий параметр преследования; v — управляющий параметр убегания, ρ, σ — положительные числа. Игра (2) является частным случаем игры (1), когда $m = 1$. Для простоты в (2) мы использовали обозначения $u_1 = u, v_1 = v, \rho_1 = \rho, z_1 = z$. Решение задачи Коши (2) имеет вид

$$z(t) = e^{(t-t_0)C} z_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)C} (u(s) - v(s)) ds,$$

при этом $z(t)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$y(t) = e^{-t_0 C} z_0 + \int_{t_0}^t e^{-sC} (u(s) - v(s)) ds$$

обращается в нуль. Следовательно, игра, описываемая уравнением (2), эквивалентна игре, описываемой уравнением

$$\dot{y} = e^{-tC} (u - v), \quad y(t_0) = e^{-t_0 C} z_0 = y_0, \quad (3)$$

где $y, y_0, u, v \in \mathbb{R}^n, u(\cdot) \in S(\rho), v(\cdot) \in S(\sigma)$. Предположим, что $\rho > \sigma$. Теперь выясним, для каких C в игре (3) возможно завершение преследования. С этой целью рассмотрим игру (3).

ТЕОРЕМА 1. *Для возможности завершения преследования в игре (3) из любого начального положения y_0 необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матрицы C имели неположительные вещественные части.*

Для доказательства теоремы потребуются некоторые леммы. Введем в рассмотрение следующую матрицу

$$F(t_0, t) = \int_{t_0}^t e^{-sC} \cdot e^{-sC'} ds,$$

где C' – транспонирование матрицы C . Так как для любого вектора $l \neq 0$ имеет место оценка

$$lF(t_0, t)l = \int_{t_0}^t |e^{-sC'} l|^2 ds > 0,$$

то матрица $F(t_0, t)$, $t > t_0$, положительно определена. Следовательно, обратная матрица $F^{-1}(t_0, t)$ существует. Можно показать, что $F^{-1}(t_0, t)$ – также положительно определенная и симметрическая матрица.

ЛЕММА 1. *Для возможности завершения преследования из всех точек пространства в игре (3) необходимо и достаточно, чтобы для любого $y_0 \in \mathbb{R}^n$ выполнялось равенство*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0 F^{-1}(t_0, t) y_0 = 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть выполнено равенство (4).

А. Построение стратегии преследующего. Пусть $v = v(t)$, $t \geq t_0$, – произвольное допустимое управление убегающего и пусть ϑ – некоторый момент времени, при котором выполняется неравенство

$$y_0 F^{-1}(t_0, \vartheta) y_0 \leq (\rho - \sigma)^2.$$

Согласно (4) такой момент времени существует. Стратегию преследующего определим так:

$$u(t) = \begin{cases} v(t) - w_0(t), & t_0 \leq t \leq \vartheta, \\ 0, & t > \vartheta, \end{cases} \quad (5)$$

где $w_0(t) = e^{-tC'} l$, $l = F^{-1}(t_0, \vartheta) y_0$. Покажем допустимость построенной стратегии. Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_0}^{\infty} |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} &= \left(\int_{t_0}^{\vartheta} |u(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_{t_0}^{\vartheta} (|v(t)| + |w_0(t)|)^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{t_0}^{\vartheta} |v(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_{t_0}^{\vartheta} |w_0(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sigma + \rho - \sigma = \rho, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\vartheta} |w(t)|^2 dt &= \int_{t_0}^{\vartheta} (e^{-tC'} l, e^{-tC'} l) dt \\ &= \int_{t_0}^{\vartheta} (e^{-tC} e^{-tC'} l, l) dt = (F(t_0, \vartheta) l, l) = y_0 F^{-1}(t_0, \vartheta) y_0 \leq (\rho - \sigma)^2, \end{aligned}$$

где (x, y) – скалярное произведение векторов x и y . Итак, стратегия (5) допустима.

Б. Возможность завершения преследования. В силу построения стратегии преследующего имеем

$$\begin{aligned} y(\vartheta) &= y_0 + \int_{t_0}^{\vartheta} e^{-tC} [u(s) - v(s)] ds \\ &= y_0 - \int_{t_0}^{\vartheta} e^{-tC} w_0(s) ds = y_0 - \int_{t_0}^{\vartheta} e^{-tC} e^{-tC'} l ds = y_0 - F(t_0, \vartheta) l = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в момент времени ϑ игра завершится.

Необходимость. Пусть не выполнено равенство (4). Тогда существует точка y_0 , $|y_0| = 1$, такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0 F^{-1}(t_0, t) y_0 = c \neq 0.$$

Поскольку $F^{-1}(t_0, t)$ — положительно определенная и симметрическая матрица, то $c > 0$. Выберем число k так, чтобы для точки $y_1 = ky_0$ ($k \neq 0$) выполнялось неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1 F^{-1}(t_0, t) y_1 = k^2 c > \rho^2.$$

Стратегию убегающего определим так:

$$v(t) = 0, \quad t \geq t_0.$$

Покажем, что из начального положения y_1 нельзя завершить игру (3). Если предположим, что убегающий пойман в некоторый момент времени τ , т.е.

$$\int_{t_0}^{\tau} e^{-sC} u(s) ds = -y_1,$$

то согласно утверждению 2 (см. приложение) получаем, что среди таких управлений преследующего управление

$$u_0(t) = -e^{-tC'} F^{-1}(t_0, \tau) y_1$$

доставляет минимум функционалу $\int_{t_0}^{\tau} |u(s)|^2 ds$. При этом, учитывая то, что функция $g(t) = y_1 F^{-1}(t_0, t) y_1$, $t > t_0$, убывает, получаем

$$\int_{t_0}^{\tau} |u(s)|^2 ds = y_1 F^{-1}(t_0, \tau) y_1 > k^2 c > \rho^2,$$

что противоречит допустимости управления $u(t)$. Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточность. Покажем, что для любого начального положения y_0 имеет место равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0 F^{-1}(t_0, t) y_0 = 0$. Пусть матрица C имеет собственные числа с неположительными действительными частями. Так как $F(t_0, t)$ – симметрическая и положительно определенная матрица, то ее собственные числа вещественны и положительны. Пусть $\mu(t)$ – наименьшее собственное число матрицы $F(t_0, t)$. Ясно, что $\mu(t) > 0$. Тогда $F(t_0, t)m(t) = \mu(t)m(t)$, где $m(t)$ – некоторый собственный вектор, соответствующий собственному числу $\mu(t)$. Следовательно,

$$F^{-1}(t_0, t)m(t) = \frac{1}{\mu(t)}m(t).$$

Так как для любого собственного числа $\lambda(t)$ и соответствующего ему собственного вектора $h(t)$ матрицы $F^{-1}(t_0, t)$ верно равенство

$$F(t_0, t)h(t) = \frac{h(t)}{\lambda(t)},$$

то $\mu(t) \leq 1/\lambda(t)$ или $\lambda(t) \leq 1/\mu(t)$. Следовательно, $1/\mu(t)$ – наибольшее собственное число матрицы $F^{-1}(t_0, t)$. Известно, что норма симметричной матрицы равна наибольшему собственному числу этой матрицы [10, с. 252]. Итак,

$$\sup_{|h| \leq 1} h F^{-1}(t_0, t) h = \|F^{-1}(t_0, t)\| = \frac{1}{\mu(t)}.$$

Согласно утверждению 1 (см. приложение) $\mu(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда получаем, что $\|F^{-1}(t_0, t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда для произвольного начального положения y_0 при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$y_0 F^{-1}(t_0, t) y_0 \leq |y_0|^2 \|F^{-1}(t_0, t)\| \rightarrow 0.$$

Согласно лемме 1 из точки y_0 возможно завершение преследования.

Необходимость. Положим $v(t) = 0, t \geq t_0$, и покажем, что в этом случае существует точка y_0 такая, что для произвольного допустимого управления преследующего $u(t)$, $t \geq t_0$, не выполняется равенство

$$\int_{t_0}^t e^{-sC} u(s) ds = -y_0. \quad (6)$$

Так как собственные числа матриц C и C' одинаковы, то существует неособенная матрица D такая, что $C = DJD^{-1}$. Предположим, что некоторое собственное число λ матрицы C имеет положительную вещественную часть. Если число λ само вещественно, то матрица e^{-sJ} содержит строку вида $\varphi(s) = (0, \dots, 0, e^{-\lambda s}, 0, \dots, 0)$ (см. формулы (10), (11)). Если же $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha > 0, \beta \neq 0$), т.е. это комплексное число, то матрица e^{-sJ} содержит строку вида $\varphi(s) = (0, \dots, 0, e^{-\alpha s} \cos \beta s, e^{-\alpha s} \sin \beta s, 0, \dots, 0)$ (см. формулы (12), (13)).

Нетрудно проверить, что в обоих случаях существует некоторое число M такое, что

$$\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \leq M, \quad t \geq t_0.$$

Принимая во внимание равенство $e^{-sD^J D^{-1}} = D e^{-sJ} D^{-1}$, из (6) получаем, что

$$\int_{t_0}^t e^{-sJ} D^{-1} u(s) ds = -D^{-1} y_0.$$

Обозначив $\bar{u}(s) = D^{-1} u(s)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t |\bar{u}(s)|^2 ds &= \int_{t_0}^t (D^{-1} u(s), D^{-1} u(s)) ds \\ &= \int_{t_0}^t ((D^{-1})' D^{-1} u(s), u(s)) ds \leq \delta^+ \int_{t_0}^t |u(s)|^2 ds \leq \delta^+ \rho^2, \end{aligned}$$

где δ^+ – наибольшее собственное значение вещественной симметрической матрицы $(D^{-1})' D^{-1}$ (см. приложение, утверждение 3). Тогда, используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\left| \int_{t_0}^t \varphi(s) \bar{u}(s) ds \right| \leq \left(\int_{t_0}^t |\varphi(s)|^2 ds \int_{t_0}^t |\bar{u}(s)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \sqrt{\delta^+ M} \rho.$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что равенство (6) не выполняется, если i_0 -я координата вектора $D^{-1} y_0$ больше, чем $\sqrt{\delta^+ M} \rho$, где i_0 – номер строки матрицы e^{-sJ} , содержащей $\varphi(s)$. Следовательно, из такой точки y_0 невозможно завершение преследования. Теорема 1 доказана.

3. Общий случай. Теперь рассмотрим игру (1). Пусть

$$F_i(t_0, t) = \int_{t_0}^t e^{-sC_i} e^{-sC'_i} ds.$$

Ясно, что $F_i(t_0, t)$, $F_i^{-1}(t_0, t)$, $i = 1, \dots, m$, – симметрические положительно определенные матрицы.

ТЕОРЕМА 2. Если $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_m^2 > \sigma^2$ и все собственные числа матриц C_i , $i = 1, \dots, m$, имеют неположительные собственные значения, то в игре (1) из любого начального положения $z^0 = \{z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0}\}$ возможно завершение преследования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ определены условиями

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_m^2 = \sigma^2, \quad \sigma_i < \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Пусть $t = \vartheta_1$ – некоторое число, удовлетворяющее неравенству

$$z_{10} F_1^{-1}(t_0, t) z_{10} \leq (\rho_1 - \sigma_1)^2, \quad t \geq t_0.$$

Такой момент времени существует, так как согласно доказательству теоремы 1 $z_{10} \times F_1^{-1}(t_0, t) z_{10} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Полагаем

$$u_1(t) = \begin{cases} v(t) - w_{10}(t), & t_0 \leq t \leq \vartheta_1, \\ 0, & t > \vartheta_1, \end{cases} \quad (7)$$

$u_i(t) = 0, i = 2, \dots, m, t_0 \leq t \leq \vartheta_1$, где $w_{10}(t) = e^{-tC}l_1, l_1 = F_1^{-1}(t_0, \vartheta_1)z_{10}$. Повторяя те же самые рассуждения, которые были проведены в доказательстве леммы 1, убедимся, что если $\int_{t_0}^{\vartheta_1} |v(s)|^2 ds \leq \sigma_1^2$, то управление (7) допустимо и обеспечивает равенство $z_1(\vartheta_1) = 0$, т.е. завершение игры в момент времени ϑ_1 .

Пусть игра не завершена, т.е. последнее неравенство не выполнено. Через $t = \vartheta_2$ обозначим некоторое число, удовлетворяющее неравенству

$$z_2(\vartheta_1)F_2^{-1}(\vartheta_1, t)z_2(\vartheta_1) \leq (\rho_2 - \sigma_2)^2, \quad t \geq \vartheta_1.$$

Полагаем

$$u_2(t) = \begin{cases} v(t) - w_{20}(t), & \vartheta_1 \leq t \leq \vartheta_2; \\ 0, & t > \vartheta_2, \end{cases} \quad (8)$$

$$u_i(t) = 0, \quad i = 1, 3, \dots, m, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta_1,$$

где $w_{20}(t) = e^{-tC'}l_2, l_2 = F_2^{-1}(\vartheta_1, \vartheta_2)z_2(\vartheta_1)$. Если $\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |v(s)|^2 ds \leq \sigma_2^2$, то управление (8) допустимо и обеспечивает равенство $z_2(\vartheta_2) = 0$, т.е. завершение игры в момент времени ϑ_2 . Пусть игра не завершена, т.е. не выполнено последнее неравенство. Каждый момент ϑ_i определяется через предыдущий как некоторое решение неравенства

$$z_i(\vartheta_{i-1})F_i^{-1}(\vartheta_{i-1}, t)z_i(\vartheta_{i-1}) \leq (\rho_i - \sigma_i)^2, \quad t \geq \vartheta_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Если в момент времени ϑ_{m-1} игра не завершена, то ясно, что выполняются неравенства $\int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} |v(s)|^2 ds \geq \sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, m-1$ ($\vartheta_0 = t_0$). Тогда имеем

$$\sigma^2 - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} |v(s)|^2 ds \leq \sigma^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{m-1}^2) = \sigma_m^2 < \rho_m^2.$$

Тогда согласно лемме 1 управления преследующих

$$u_m(t) = \begin{cases} v(t) - w_{m0}(t), & \vartheta_{m-1} \leq t \leq \vartheta_m, \\ 0, & t > \vartheta_m, \end{cases} \quad (9)$$

$$u_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad \vartheta_{m-1} \leq t \leq \vartheta_m,$$

где $w_{m0}(t) = e^{-tC'}l_m, l_m = F_m^{-1}(\vartheta_{m-1}, \vartheta_m)z_m(\vartheta_{m-1})$ допустимы и обеспечивают выполнение равенства $z_m(\vartheta_m) = 0$, т.е. в момент времени ϑ_m игра завершается. Теорема 2 доказана.

Приложение. Здесь мы приведем некоторые общеизвестные факты и утверждения применительно к доказательствам теорем.

Сначала скажем несколько слов о жордановой форме матриц. Известно, что матрица C' подобна некоторой матрице вида

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & & & 0 \\ & J_1 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & J_k & & \\ & & & B_0 & \\ & & & & B_1 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & & & & B_l \end{pmatrix},$$

т.е. $J = \text{diag}\{J_0, J_1, \dots, J_k, B_0, B_1, \dots, B_l\}$, где $J_0, J_1, \dots, J_k$ соответствуют действительным собственным числам матрицы C' , а $B_0, B_1, \dots, B_l$ – собственным числам, имеющим ненулевую мнимую часть:

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix},$$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, l,$$

$$B_0 = \text{diag}\{T_1, T_2, \dots, T_s\},$$

$$B_i = \begin{pmatrix} T_i & E_2 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & T_i & E_2 & \dots & O_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_2 & O_2 & O_2 & \dots & T_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, l,$$

где E_2 – единичная (2×2) -матрица, O_2 – нулевая (2×2) -матрица. Пусть r_i – размер матрицы B_i ; при этом мы считаем, что ее элементами являются двумерные матрицы T_i, O_2, E_2 , где

$$T_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix},$$

α_i и β_i – вещественные и мнимые части собственных чисел матрицы C' . Следовательно, существует неособенная матрица S такая, что $C' = SJS^{-1}$. Более того,

$$e^{-tC'} = Se^{-tJ}S^{-1}, \quad e^{-tJ} = \text{diag}\{e^{-tJ_0}, e^{-tJ_1}, \dots, e^{-tJ_k}, e^{-tB_0}, e^{-tB_1}, \dots, e^{-tB_l}\},$$

где

$$e^{-tJ_0} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\lambda_r t} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$e^{-tJ_i} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_i t} & -te^{-\lambda_i t} & \dots & (-1)^{r_i-1} \frac{t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} e^{-\lambda_i t} \\ 0 & e^{-\lambda_i t} & \dots & (-1)^{r_i-2} \frac{t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} e^{-\lambda_i t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\lambda_i t} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$e^{-tB_0} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha_1 t} \cos \beta_1 t & e^{-\alpha_1 t} \sin \beta_1 t & \dots & 0 & 0 \\ -e^{-\alpha_1 t} \sin \beta_1 t & e^{-\alpha_1 t} \cos \beta_1 t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-\alpha_s t} \cos \beta_s t & e^{-\alpha_s t} \sin \beta_s t \\ 0 & 0 & \dots & -e^{-\alpha_s t} \sin \beta_s t & e^{-\alpha_s t} \cos \beta_s t \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$e^{-tB_i} = e^{-\alpha_i t} \begin{pmatrix} \cos \beta_i t & \sin \beta_i t & \dots & \frac{(-1)^{r_i-1} t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \cos \beta_i t & \frac{(-1)^{r_i-1} t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \sin \beta_i t \\ -\sin \beta_i t & \cos \beta_i t & \dots & \frac{(-1)^{r_i} t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \sin \beta_i t & \frac{(-1)^{r_i-1} t^{r_i-1}}{(r_i-1)!} \cos \beta_i t \\ 0 & 0 & \dots & \frac{(-1)^{r_i-2} t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \cos \beta_i t & \frac{(-1)^{r_i-2} t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \sin \beta_i t \\ 0 & 0 & \dots & \frac{(-1)^{r_i-1} t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \sin \beta_i t & \frac{(-1)^{r_i-2} t^{r_i-2}}{(r_i-2)!} \cos \beta_i t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \cos \beta_i t & \sin \beta_i t \\ 0 & 0 & \dots & -\sin \beta_i t & \cos \beta_i t \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Пусть $\mu(t)$ – наименьшее собственное число матрицы $F(t_0, t)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если матрица C' имеет неположительные собственные числа, то $\mu(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $\mu(t) = \inf_{|h|=1} hF(t_0, t)h$ [10]. Покажем, что $\mu(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть $\bar{h}$, $|\bar{h}| = 1$, – произвольный вектор. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \bar{h}F(t_0, t)\bar{h} &= \int_{t_0}^t |e^{-sC'}\bar{h}|^2 ds = \int_{t_0}^t |Se^{-sJ}S^{-1}\bar{h}|^2 ds \\ &= \int_{t_0}^t |Se^{-sJ}h|^2 ds = \int_{t_0}^t (S'Se^{-sJ}h, e^{-sJ}h) ds \\ &\geq \lambda^- \int_{t_0}^t (e^{-sJ}h, e^{-sJ}h) ds \quad (\lambda^- > 0), \end{aligned}$$

где $h = S^{-1}\bar{h}$, λ^- – наименьшее собственное значение симметрической положительно определенной матрицы $S'S$ (см. утверждение 3). Выражение $|e^{-tJ}h|^2$ ($h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$) состоит из слагаемых следующих видов:

- 1) $e^{-2\lambda_i t} h_j^2$ (см. (10));
- 2) $e^{-2\lambda_i t} \left(h_j + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} h_{j+p-1} \right)^2$ (см. (11));
- 3) сумма квадратов произведения пары строк матрицы e^{-tJ} на вектор h (см. (12)):

$$e^{-2\alpha_i t} (h_j^2 + h_{j+1}^2);$$

- 4) сумма квадратов произведения пары строк матрицы e^{-tJ} на вектор h (см. (13)):

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha_i t} &\left[\left(h_j - th_{j+2} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} h_{j+2p-2} \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(h_{j+1} - th_{j+3} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} h_{j+2p-1} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Если $f(t)$ – слагаемое вида 1), то при $h_j \neq 0$ $\int_{t_0}^t f(s) ds \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, ибо все собственные числа матрицы C' неположительны. Рассуждая аналогично и в случаях 2), 3), 4), приходим к выводу, что интеграл слагаемого вида 2), 3) или 4) от t_0 до t , если координаты вектора h , участвующие в этих слагаемых, не равны нулю, стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Так как $h \neq 0$, то верно равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t |e^{-sJ} h|^2 ds = \infty \quad (14)$$

для произвольного фиксированного h .

Обозначим

$$A(t) = \int_{t_0}^t e^{-sJ} e^{-sJ'} ds.$$

Тогда равенство (14) означает, что функция $hA(t)h$, $t \geq t_0$, стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что $A(t)$ – положительно определенная и симметрическая матрица. Пусть $\nu(t)$ – наименьшее собственное значение матрицы $A(t)$ и $h(t)$, $|h(t)| = 1$, – соответствующий ему собственный вектор. В силу компактности множества $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ из последовательности $h(1), h(2), \dots$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, считаем, что сама последовательность сходится, и пусть h_0 – ее предел ($|h_0| = 1$). Имеем $\nu(i) = h(i)A(i)h(i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Покажем, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu(i) = \infty$. Так как в силу доказанного выше для каждого фиксированного $h \neq 0$ функция $hA(t)h$, $t \geq t_0$, возрастает и стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, то возрастает и стремится к бесконечности, в частности, и последовательность $h_0A(i)h_0$. Тогда для любого фиксированного K существует номер m такой, что $h_0A(m)h_0 > K$. Следовательно, $h(n)A(m)h(n) > K$, $n > N$, при некотором N . Пусть

$$l = \min\{j : h(n)A(j)h(n) > K, \quad n = 1, 2, \dots, N\}, \quad p = \max\{m, l\}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} K &< h(n)A(m)h(n) \leq h(n)A(p)h(n), \quad n > N, \\ K &< h(n)A(l)h(n) \leq h(n)A(p)h(n), \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

В частности, $K < h(p)A(p)h(p)$. Следовательно, $\lim_{i \rightarrow \infty} h(i)A(i)h(i) = \infty$. Так как

$$h(i)A(i)h(i) = \nu(i)|h(i)|^2 = \nu(i),$$

то $\nu(i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \inf_{|h|=1} hF(t_0, t)h \geq \lambda^- \inf_{g=S^{-1}h, |h|=1} gA(t)g \\ &\geq \lambda^- \inf_{|h|=1} |g|^2 \inf_{|m|=1} mA(t)m = \lambda^- \lambda_1^- \nu(t) \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где λ_1^- – наименьшее собственное число симметричной положительно определенной матрицы $(S^{-1})'S^{-1}$. Следовательно, $\mu(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Утверждение 1 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Среди всех управлений $u = u(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau$, таких, что

$$\int_{t_0}^{\tau} e^{-sC} u(s) ds = z_0, \quad (15)$$

управление $u_0(t) = e^{-tC'} F^{-1}(t_0, \tau) z_0$ доставляет минимум функционалу

$$\int_{t_0}^{\tau} |u(s)|^2 ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l = F^{-1}(t_0, \tau) z_0$. Умножив обе части равенства (15) на l , получим

$$\int_{t_0}^{\tau} (e^{-sC'} l, u(s)) ds = (z_0, l).$$

Пользуясь неравенством Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} (z_0, l)^2 &= \left(\int_{t_0}^{\tau} (e^{-sC'} l, u(s)) ds \right)^2 \\ &\leq \int_{t_0}^{\tau} |e^{-sC'} l|^2 ds \int_{t_0}^{\tau} |u(s)|^2 ds = (F(\tau)l, l) \int_{t_0}^{\tau} |u(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Теперь подставляя вместо l его выражение, получим

$$(z_0 F^{-1}(t_0, \tau) z_0)^2 \leq z_0 F^{-1}(t_0, \tau) z_0 \int_{t_0}^{\tau} |u(s)|^2 ds,$$

откуда после сокращения на $z_0 F^{-1}(t_0, \tau) z_0$ получаем

$$z_0 F^{-1}(t_0, \tau) z_0 \leq \int_{t_0}^{\tau} |u(s)|^2 ds.$$

С другой стороны, легко проверить, что

$$\int_{t_0}^{\tau} |u_0(s)|^2 ds = z_0 F^{-1}(t_0, \tau) z_0.$$

Утверждение 2 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если A – вещественная симметрическая матрица, а $\lambda^-(A)$ и $\lambda^+(A)$ – ее минимальное и максимальное собственные значения соответственно, то для всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\lambda^-(A)|x|^2 \leq xAx \leq \lambda^+(A)|x|^2$$

(см. [10, с. 252]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [2] Пацко В. С. Дифференциальная игра качества второго порядка // ПММ. 1982. Т. 46. № 4.
- [3] Никольский М. С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Управляемые системы. Вып. 2. Новосибирск, 1969. С. 49–59.
- [4] Ушаков В. Н. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // ПММ. 1972. Т. 36. № 1.
- [5] Сатимов Н. Ю., Хамдамов А. А., Фазылов А. З. Дифференциальные игры преследования многих лиц с интегральными ограничениями // Докл. АН УзССР. 1981. № 10. С. 3–4.
- [6] Сатимов Н. Ю., Рихсиев Б. Б., Ибрагимов Г. И. Об одной дифференциальной игре многих лиц с интегральными ограничениями // Актуальные вопросы теории оптимального управления и дифференциальных игр. Ташкент: Фан, 1996. С. 89–94.
- [7] Сатимов Н. Ю., Рихсиев Б. Б., Хамдамов А. А. О задаче преследования для линейных дифференциальных и дискретных игр многих лиц // Матем. сб. 1982. Т. 118. № 4. С. 456–469.
- [8] Рихсиев Б. Б. Об одной линейной задаче преследования многих лиц с интегральными ограничениями на управления игроков // Неклассические задачи математической физики. Ташкент: Фан, 1985. С. 184–202.
- [9] Ибрагимов Г. И. Об одной игре оптимального преследования несколькими объектами одного // ПММ. 1998. Т. 62. № 2. С. 199–205.
- [10] Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Университет мировой экономики и дипломатии
E-mail: gafurjan@uwed.freenet.uz

Поступило
09.04.2000
Исправленный вариант
10.07.2000