Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Г. Корневский, Критерии устойчивости решений систем линейных детерминированных и стохастических разностных уравнений с непрерывным временем и запаздыванием, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 213–229

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:51:33

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Д. Г. Корневский

Представлены спектральные и алгебраические коэффициентные критерии (необходимые и достаточные условия), а также достаточные алгебраические коэффициентные условия асимптотической устойчивости по Ляпунову решений указанных в заглавии статьи систем разностных уравнений в случае рационального соотношения между запаздываниями при стохастических возмущениях коэффициентов типа белого шума. Для стохастических систем изучается асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном. Используется метод функций Ляпунова. Алгебраические коэффициентные критерии и достаточные условия сформулированы в терминах матричных уравнений Ляпунова (детерминированные системы) и матричных уравнений Сильвестра (стохастические системы).

Библиография: 10 названий.

Введение. В этой статье развиваются предыдущие исследования автора по устойчивости по Ляпунову [1], [2], относившиеся к детерминированным и стохастическим системам разностных уравнений с дискретным временем и запаздыванием, на новые классы разностных уравнений – детерминированные и стохастические разностные уравнения с непрерывным временем и запаздыванием. В статье получены спектральные и алгебраические коэффициентные критерии, а также достаточные алгебраические коэффициентные условия асимптотической устойчивости решений таких систем разностных уравнений в случае рационального соотношения между запаздываниями при стохастических возмущениях коэффициентов типа “белого” шума. Для стохастических систем изучается асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном. Алгебраические коэффициентные критерии и достаточные условия выражены в терминах матричных уравнений Ляпунова (детерминированные системы) и матричных уравнений Сильвестра (стохастические системы).

Для вывода достаточных условий, как и в случае дискретного времени [1], [2], используются $(n^2 + m)$ -параметрические функции Ляпунова в виде линейной комбинации квадратичной формы фазовых переменных в текущий момент времени и таких же квадратичных форм с фазовыми переменными в сдвинутые влево по временной оси на величину запаздываний моменты времени (n – размерность системы, m – количество запаздываний).

1. Постановка задачи. Рассмотрим начальную задачу для системы линейных детерминированных разностных уравнений с непрерывным временем t и постоянными запаздываниями аргумента

$$y(t + \tau_0) = A_0 y(t) + \sum_{j=1}^m A_j y(t - \tau_j), \quad 0 \leq t_0 \leq t < \infty, \quad (1.1)$$

при начальном условии

$$y(\theta) = \varphi(\theta), \quad t_0 - \tau_m - \tau_0 \leq \theta \leq t_0, \quad (1.2)$$

и начальную задачу для системы линейных стохастических разностных уравнений (которая получается из (1.1) при случайных возмущениях коэффициентов)

$$x(t + \tau_0) = [A_0 + B_0 \xi(t)]x(t) + \sum_{j=1}^m [A_j + B_j \xi(t)]x(t - \tau_j) \quad (1.3)$$

при том же начальном условии (1.2): $x(\theta) = \varphi(\theta)$, $t_0 - \tau_m - \tau_0 \leq \theta \leq t_0$.

Здесь вектор-столбцы $y, x \in \mathbb{R}^n$; постоянные матрицы коэффициентов $A_0, A_j, B_0, B_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $\varphi(\theta)$ – детерминированное начальное условие (непрерывная начальная вектор-функция, $\varphi \in \mathbb{R}^n$); τ_0 – положительная постоянная, шаг итерации; τ_j ($j = 1, \dots, m$; $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$) – положительные постоянные, называемые *запаздываниями* аргумента t и находящиеся в рациональных соотношениях вида $\tau_j = j\tau_0$ ($j = 1, \dots, m$); $\xi(t)$ – возмущающий коэффициенты системы (1.1) скалярный стационарный случайный процесс типа стандартного “белого” шума (так что

$$M\{\xi(t)\} = 0, \quad M\{\xi(t)^2\} = 1, \quad M\{\xi(t)\xi(t_1)\} = 0, \quad t \neq t_1,$$

где M – символ математического ожидания).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под *решением задачи* (1.1) понимается n -мерная вектор-функция $y(t; t_0, \varphi)$, обращающая при $t_0 < t$ уравнение (1.1) в тождество, а при $t \leq t_0$ совпадающая с $\varphi(\theta)$.

Методом шагов можно установить, что решение $y(t; t_0, \varphi)$ существует при $t_0 < t$ и однозначно определяется начальными условиями – моментом времени t_0 и вектор-функцией $\varphi(\theta)$. При этом решение $y(t; t_0, \varphi)$ будет непрерывным на интервале $[t_0 - \tau_m - \tau_0, \infty)$ тогда и только тогда, когда непрерывная вектор-функция φ удовлетворяет условию

$$\varphi(t_0) = A\varphi(t_0 - \tau_0) + \sum_{j=1}^m A_j \varphi(t_0 - \tau_j - \tau_0). \quad (1.4)$$

Если условие (1.4) не выполняется, то речь может идти лишь о существовании кусочно-непрерывного решения.

Стационарным решением (точкой покоя, точкой равновесия) системы разностных уравнений (1.1) называется решение $y(t; t_0, \varphi) = y_0$, равное постоянному вектору y_0 как на начальном множестве $[t_0 - \tau_m - \tau_0, t_0]$, так и при $t_0 < t$ (аналог дифференциально-разностных уравнений [3, с. 115]); очевидно, для этого необходимо условие (1.4).

Определение асимптотической устойчивости решений системы разностных уравнений (1.1) вводится по аналогии с определением асимптотической устойчивости решений других функциональных уравнений (дифференциальных, дифференциально-разностных) и содержится, например, в книге [4, с. 111–112].

В пространстве начальных вектор-функций φ вводится норма $|||\varphi|||$:

$$|||\varphi||| = \sup_{t_0 - \tau_m - \tau_0 \leq \theta \leq t_0} \{ \|\varphi(\theta)\| \}.$$

Под знаком супремума стоит обычная евклидова норма вектора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Невозмущенное стационарное (тривиальное) решение $y = 0$ системы (1.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для каждого положительного числа ε и любого $t_0 \geq 0$ можно указать другое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, зависящее от ε и t_0 и такое, что если

$$|||\varphi||| < \delta(\varepsilon, t_0),$$

то при всех $0 \leq t_0 \leq t$ для возмущенного решения $y(t; t_0, \varphi)$ выполняется неравенство

$$\|y(t; t_0, \varphi)\| < \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Невозмущенное стационарное (тривиальное) решение $y = 0$ системы (1.1) называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно устойчиво в смысле определения 2 и, кроме того, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t; t_0, \varphi)\| = 0.$$

Аналогично вводится понятие решения системы линейных стохастических разностных уравнений (1.3) с привлечением вероятностных терминов теории случайных процессов.

Под *решением начальной задачи* (1.3) понимается n -мерная случайная вектор-функция $x(t; t_0, \varphi(\theta))$, которая с вероятностью единица при каждом $t_0 < t$ обращает уравнение (1.3) в тождество, а при $t_0 - \tau_m - \tau_0 \leq t \leq t_0$ совпадает с $\varphi(\theta)$.

Существование решения для системы (1.3) при соответствующем начальном условии и указанных выше свойствах начальной вектор-функции также имеет место. Как уже оговаривалось во введении, для стохастической системы (1.3) в дальнейшем рассматривается лишь асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Невозмущенное стационарное (тривиальное) решение $x = 0$ системы (1.3) называется *устойчивым по Ляпунову в среднем квадратичном*, если для каждого положительного числа ε и любого $0 \leq t_0$ можно указать другое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, зависящее от ε и t_0 и такое, что если

$$|||\varphi||| < \delta(\varepsilon, t_0),$$

то при всех $0 \leq t_0 \leq t$ для условного математического ожидания квадрата нормы возмущенного решения $x(t; t_0, \varphi)$ выполняется неравенство

$$\mathbf{M}\{\|x(t; t_0, \varphi)\|^2 \mid |||\varphi||| < \delta\} < \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Невозмущенное стационарное (тривиальное) решение $x = 0$ системы (1.3) называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову в среднем квадратичном*, если оно устойчиво в смысле определения 4 и, кроме того, для условного математического ожидания квадрата нормы возмущенного решения $x(t; t_0, \varphi)$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M\{\|x(t; t_0, \varphi)\|^2 \mid \|\varphi\| < \delta\} = 0.$$

ПРОБЛЕМА. Разработать критерии (необходимые и достаточные условия) и достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения детерминированной системы (1.1) и асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения стохастической системы (1.3).

В случае детерминированной системы (1.1) в литературе имеются спектральные критерии асимптотической устойчивости (см., например, Хейл [5, с. 336–341]; Харитонов [6], [7]; Жабко, Харитонов [8, § 12]). Они приводятся ниже в п. 2 и охватывают общий случай произвольного соотношения между запаздываниями, из-за этого они имеют трансцендентный вид и поэтому трудно проверяемы. В дополнение к ним нами установлены спектральные и алгебраические коэффициентные критерии и некоторые новые достаточные условия, проверка которых существенно упрощается; правда, охватывают они лишь случай рационального соотношения между запаздываниями.

Приведенные ниже в п. 3 критерии и достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном нам представляются новыми, по крайней мере исследование устойчивости решений стохастических разностных систем (1.3) в работах других авторов нам неизвестно.

2. Критерии и достаточные условия асимптотической устойчивости решений детерминированной системы.

2.1. Некоторые предварительные факты. По аналогии с общепринятой классификацией систем дифференциально-разностных уравнений [3], [5], [8] систему (1.1) логично отнести к системам нейтрального типа (см. [5, с. 38]).

Одним из непосредственных источников появления разностных уравнений (1.1) являются дифференциально-разностные уравнения и проблемы, связанные с ними; в частности:

1) проблема определения точек покоя дифференциально-разностных уравнений запаздывающего и нейтрального типов (см. [3, гл. 5, § 3];

2) решение систем вполне интегрируемых дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа (см. [9, разд. 3, гл. 1]). Например, дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа

$$\frac{dy(t+1)}{dt} + a \frac{dy(t)}{dt} + by(t+1) + cy(t) = 0 \quad (2.1)$$

при $c = ab$ является вполне интегрируемым. Оно представляется в форме

$$\frac{d}{dt}[y(t+1) + ay(t)] + b[y(t+1) + ay(t)] = 0,$$

и его интегрирование приводит к соотношению

$$y(t+1) + ay(t) = ve^{-bt}, \quad (2.2)$$

где ν – постоянная интегрирования. Таким образом, интегрирование однородного дифференциально-разностного уравнения (2.1) свелось к решению однопараметрического (параметром служит ν) семейства неоднородных разностных уравнений (2.2). В [9] имеются и другие примеры вполне интегрируемых уравнений нейтрального типа.

2.2. Спектральные критерии. *Спектральный критерий асимптотической устойчивости.* Отыскивая решение уравнения (1.1) в виде экспоненты (т.е. в виде элементарной функции $y = e^{\lambda t} c_1$, где c_1 – постоянный вектор-столбец, λ – скаляр, нетрудно установить спектральный критерий асимптотической устойчивости при фиксированных запаздываниях: для асимптотической устойчивости тривиального решения $y = 0$ системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней λ ее характеристического уравнения

$$\det \left(E - A_0 e^{-\lambda \tau_0} - \sum_{j=1}^m A_j e^{-\lambda(\tau_j + \tau_0)} \right) = 0 \quad (2.3)$$

удовлетворяли условию $\operatorname{Re} \lambda < 0$ (см., например, [5, с. 336–341]; [6], [7]); здесь E – единичная матрица соответствующего размера.

В [5, с. 340–342] установлен также следующий спектральный критерий абсолютной (т.е. равномерной по τ_j) асимптотической устойчивости для системы (1.1).

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ АБСОЛЮТНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. *Тривиальное решение $y = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво при любых постоянных запаздываниях $\tau_j \in (0, \infty)$ тогда и только тогда, когда для всех вещественных чисел θ_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$), $\theta_j \in [0, 2\pi]$, модули всех собственных значений матрицы $\sum_{j=0}^m e^{i\theta_j} A_j$ ($i = \sqrt{-1}$) меньше единицы.*

Так как критерий асимптотической устойчивости и критерий абсолютной асимптотической устойчивости получены без каких-либо предположений о соотношениях между запаздываниями τ_j , то в общем случае они имеют трансцендентный вид и поэтому трудно проверяемые.

В случае рационального соотношения между запаздываниями вида $\tau_j = j\tau_0$ ($j = 1, \dots, m$) трансцендентность в определенном смысле исчезает, и тогда можно сформулировать новые спектральные и алгебраические коэффициентные критерии, а также алгебраические коэффициентные достаточные условия асимптотической устойчивости решений системы (1.1). Результаты такого исследования излагаются ниже.

При $\tau_j = j\tau_0$ уравнение (2.3) с помощью подстановки $e^{-\lambda \tau_0} = \mu$ преобразуется в алгебраическое уравнение

$$\det \left(E - \sum_{j=0}^m \mu^{j+1} A_j \right) = 0. \quad (2.4)$$

В итоге приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1 (первый спектральный критерий асимптотической устойчивости в случае рационального соотношения между запаздываниями). *Для асимптотической устойчивости решения $y = 0$ системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы модули всех корней μ алгебраического уравнения (2.4) были больше единицы.*

При $\tau_j = j\tau_0$ ($j = 1, \dots, m$) исходную n -мерную систему разностных уравнений с запаздыванием (1.1) можно свести (путем расширения исходного фазового пространства)

к эквивалентной $n(m+1)$ -мерной системе разностных уравнений без запаздывания, аналогично тому, как это было оговорено в нашей работе [1] для систем разностных уравнений с дискретным временем и рациональным соотношением между запаздываниями (см. также [4, с. 26]). Действительно, введем вектор новых переменных $z(t)$ размерности $n(m+1)$:

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t - \tau_1) \\ \dots \\ y(t - \tau_m) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Тогда систему (1.1) с запаздыванием можно записать в виде

$$z(t + \tau_0) = Az(t), \quad (2.6)$$

где под A понимается квадратная матрица размера $n(m+1) \times n(m+1)$

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{m-1} & A_m \\ E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

ТЕОРЕМА 2 (второй спектральный критерий асимптотической устойчивости в случае рационального соотношения между запаздываниями). *Для асимптотической устойчивости тривиального решения $z = 0$ системы (2.6) (и, следовательно, асимптотической устойчивости тривиального решения $y = 0$ системы (1.1)) необходимо и достаточно, чтобы модули всех собственных значений матрицы A были меньше единицы или, что то же самое, чтобы матрица A была сходящейся.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы осуществляется стандартным для детерминированных стационарных разностных уравнений приемом – построением соответствующего характеристического уравнения. Отыскивая общее решение системы (2.6) в виде показательной функции $z(t) = \lambda^t c_1$ (т.е. в виде элементарной функции; c_1 и λ – постоянные вектор-столбец и скаляр), приходим к характеристическому уравнению

$$\det(\mu E - A) = 0 \quad (\mu = \lambda^{\tau_0}),$$

откуда следует справедливость теоремы.

2.3. Алгебраические коэффициентные критерии и достаточные условия. Алгебраические коэффициентные критерии, если их удалось получить, считаются лучшей конечной формой решения задачи об устойчивости, так как в них наглядно проявляется связь между коэффициентами (параметрами) систем и, тем самым, обеспечивается эффективное управление степенью устойчивости путем варьирования этой связи. Для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем линейных разностных уравнений с дискретным временем примерами алгебраических коэффициентных критериев асимптотической устойчивости являются критерии Рауса–Гурвица, Кона–Шура, критерии, формулируемые в терминах матричных алгебраических уравнений Ляпунова. Аналогичных критериев для систем линейных разностных уравнений с

непрерывным временем (1.1) при произвольном соотношении между запаздываниями не существует.

В случае рационального соотношения между запаздываниями имеется возможность, исходя из представления системы (1.1) в виде (2.6), сформулировать в терминах матричного алгебраического уравнения Ляпунова следующий критерий.

ТЕОРЕМА 3 (алгебраический коэффициентный критерий). *Для асимптотической устойчивости тривиального решения $y = 0$ системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно определенная размера $n(m + 1) \times n(m + 1)$ матрица H ($H = H^T > 0$) – решение матричного алгебраического уравнения Ляпунова*

$$A^T H + H A = -E, \quad (2.8)$$

где E – единичная матрица размера $n(m + 1) \times n(m + 1)$.

Доказательство теоремы 3 осуществляется с помощью $n^2(m + 1)^2$ -параметрической функции Ляпунова в виде квадратичной формы $z^T(t) H z(t)$, где параметрами служат $n^2(m + 1)^2$ элементов матрицы H .

2.4. Достаточные алгебраические коэффициентные условия. Так как в систему уравнений (1.1) входят матрицы размера $n \times n$, а соответствующее расширенной системе (2.6) матричное уравнение Ляпунова (2.8), дающее критерий асимптотической устойчивости, содержит матрицы размера $n(m + 1) \times n(m + 1)$, то расширение фазового пространства, следовательно, не самый эффективный и экономичный (в смысле сложности вычислений) способ исследования устойчивости.

Поэтому возникает интерес получить достаточные алгебраические коэффициентные условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.1), представляемые алгебраически через коэффициенты системы и вместе с тем позволяющие иметь дело непосредственно с описывающими систему (1.1) матрицами A_0, A_j ($j = 1, \dots, m$) и с уравнениями Ляпунова с матричными коэффициентами размера $n \times n$. Решение данной задачи, разумеется, упростит (по сравнению с критерием – теоремой 3) проверку асимптотической устойчивости решений системы (1.1).

Для получения достаточных алгебраических коэффициентных условий будем использовать метод функций Ляпунова. Построим для системы (1.1) функцию Ляпунова $V(y(t))$ в виде линейной комбинации $m + 1$ квадратичных форм переменных $y(t)$ и $y(t - \tau_j)$ ($j = 1, \dots, m$),

$$V(y(t)) = y^T(t) H y(t) + \sum_{j=1}^m \gamma_j y^T(t - \tau_j) H y(t - \tau_j) \quad (2.9)$$

с неизвестными пока постоянной положительно определенной матрицей $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($H = H^T > 0$) и числами (весовыми коэффициентами) γ_j .

Если нам удастся найти уравнения или неравенства, по которым можно однозначно найти матрицу $H > 0$ и числа γ_j , то тем самым выбор функции Ляпунова в форме (2.9) оправдан. Далее в ходе построения будет установлено, что для того, чтобы функция вида (2.9) была положительно определенной на решениях $y(t)$ системы (1.1) и ее первая разность $\Delta V(y(t)) = V(y(t + \tau_0)) - V(y(t))$ на этих решениях была отрицательной величиной (другими словами, чтобы V была функцией Ляпунова для системы (1.1)),

искомая матрица H должна определяться из матричного дискретного уравнения Ляпунова для матрицы A_0 , а числа γ_j должны быть положительными и меньше единицы, образуя при этом последовательность

$$0 < \gamma_m < \dots < \gamma_2 < \gamma_1 < 1. \quad (2.10)$$

Функция (2.9), как видно из ее структуры, является $(n^2 + m)$ -параметрической (n^2 элементов матрицы H и числа γ_j ($j = 1, \dots, m$)).

В соответствии с методом функций Ляпунова для исследования устойчивости вычислим первую разность ΔV функции V на решениях системы (1.1). Имеем

$$\begin{aligned} \{\Delta V(y(t))\}_{(1.1)} &\equiv \{V(y(t + \tau_0)) - V(y(t))\}_{(1.1)} \\ &= \left\{ y^T(t + \tau_0) H y(t + \tau_0) + \sum_{j=1}^m \gamma_j y^T(t + \tau_0 - \tau_j) H y(t + \tau_0 - \tau_j) \right. \\ &\quad \left. - y^T(t) H y(t) - \sum_{j=1}^m \gamma_j y^T(t - \tau_j) H y(t - \tau_j) \right\}_{(1.1)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Учитывая рациональное соотношение между запаздываниями $\tau_j = j\tau_0$ ($j = 1, \dots, m$), равенство (2.11) продолжается следующим образом:

$$= \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t - \tau_1) \\ \dots \\ y(t - \tau_m) \end{bmatrix}^T G \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t - \tau_1) \\ \dots \\ y(t - \tau_m) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

В (2.12) через G обозначена симметричная размера $n(m+1) \times n(m+1)$ блочная матрица

$$G = \begin{bmatrix} A_0^T H A_0 - (1 - \gamma_1) H & A_0^T H A_1 & A_0^T H A_2 & \dots \\ A_1^T H A_0 & A_1^T H A_1 - (\gamma_1 - \gamma_2) H & A_1^T H A_2 & \dots \\ A_2^T H A_0 & A_2^T H A_1 & A_2^T H A_2 - (\gamma_2 - \gamma_3) H & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1}^T H A_0 & A_{m-1}^T H A_1 & A_{m-1}^T H A_2 & \dots \\ A_m^T H A_0 & A_m^T H A_1 & A_m^T H A_2 & \dots \\ \left| \begin{array}{c} A_0^T H A_{m-1} \\ A_1^T H A_{m-1} \\ A_2^T H A_{m-1} \\ \dots \\ A_{m-1}^T H A_{m-1} - (\gamma_{m-1} - \gamma_m) H \\ A_m^T H A_{m-1} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} A_0^T H A_m \\ A_1^T H A_m \\ A_2^T H A_m \\ \dots \\ A_{m-1}^T H A_m \\ A_m^T H A_m - \gamma_m H \end{array} \right| \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Система (1.1) асимптотически устойчива, если выполняется неравенство $\{\Delta V\}_{(1.1)} < 0$, а это возможно лишь тогда, когда квадратичная форма (2.12) отрицательно определенная. В свою очередь, квадратичная форма (2.12) отрицательно определенная лишь в том случае, когда отрицательно определенной является матрица G ($G = G^T < 0$).

Необходимым условием того, что матрица $G < 0$, является отрицательная определенность матричных блоков, стоящих на ее главной диагонали, т.е.

[illegible]

Так как по определению $H > 0$, то из (2.14) следует, что коэффициенты γ_j ($j = 1, \dots, m$) должны удовлетворять условию $1 - \gamma_1 > 0$, $\gamma_1 - \gamma_2 > 0, \dots, \gamma_{m-1} - \gamma_m > 0, \gamma_m > 0$ или, что то же самое, условию (2.10). Далее, симметричная блок-матрица $A_0^T H A_0 - (1 - \gamma_1)H$, стоящая на главной диагонали матрицы G в левом верхнем углу и соответствующая основной фазовой переменной $y(t)$ системы (1.1), лишь тогда отрицательно определенная, когда существует положительно определенное решение $H > 0$ матричного дискретного уравнения Ляпунова

$$A_0^T H A_0 - (1 - \gamma_1)H = -E. \quad (2.15)$$

Вид матричного уравнения (2.15) и ограничение на γ_1 (2.10) приводят к заключению, что матрица A_0 должна быть сходящейся (модули ее собственных значений меньше единицы) с некоторым запасом сходимости ρ ($0 < \rho < 1$) [2]; следовательно, ρ должно удовлетворять неравенству

$$1 - \rho^2 < \gamma_1 < 1.$$

Соотношение (2.15) при выбранном согласно (2.10) γ_1 служит уравнением для определения неизвестной матрицы H , входящей в функцию Ляпунова (2.9).

Итак, путем использования функции Ляпунова (2.9) пришли к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 4 (достаточные коэффициентные условия асимптотической устойчивости). *Тривиальное решение $y = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво, если выполнены следующие условия:*

- 1) матрица A_0 стоящаяся с некоторым запасом сходимости ρ ($0 < \rho < 1$);
- 2) существует положительно определенное решение $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($H = H^T > 0$) матричного дискретного уравнения Ляпунова (2.15), в котором положительное число γ_1 удовлетворяет условию $1 - \rho^2 < \gamma_1 < 1$;
- 3) имеет место матричное неравенство $G < 0$, в котором последовательность произвольно выбираемых положительных чисел γ_j удовлетворяет соотношению $0 < \gamma_m < \dots < \gamma_1 < 1$.

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 4. Для проверки асимптотической устойчивости надо провести следующие процедуры:

- 1) проверяем на сходимость матрицу A_0 и определяем ее запас сходимости ρ ;
- 2) выбираем числа γ_j согласно соотношению (2.10) и $1 - \rho^2 < \gamma_1 < 1$;
- 3) ищем положительно определенное решение H матричного уравнения Ляпунова (2.15);

4) в случае положительного ответа на пункты 1)–3) подставляем матрицу H и числа γ_j в матрицу G (2.13) и проверяем ее на отрицательную определенность; если $G < 0$, то решения системы (1.1) асимптотически устойчивы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Распирить в пространстве коэффициентов системы (1.1) область достаточных условий асимптотической устойчивости по сравнению с областью, определяемой теоремой 4, можно было бы, если бы удалось построить функцию V , имеющую в своей конструкции более чем $n^2 + m$ свободных параметров. Выбор в качестве V , например, $n^2(m + 1)$ -параметрической комбинации квадратичных форм

$$V(y(t)) = y^T(t)Hy(t) + \sum_{j=1}^m y^T(t - \tau_j)H_j y(t - \tau_j),$$

где H_j – неизвестные положительно определенные матрицы, подлежащие определению из системы рекуррентных матричных уравнений

$$A_j^T H_j A_j - H_j + H_{j+1} = -E \quad (j = 1, 2, \dots, m - 1),$$

существенно увеличивает объем вычислений по сравнению с объемом вычислений в теореме 4 и, кроме того, сопровождается неоднозначностью в определении матриц H_j .

3. Стохастическая система (1.3). Так как стохастическая система (1.3) является системой с переменными коэффициентами, то построить соответствующее характеристическое уравнение непосредственно для (1.3) и, следовательно, сформулировать, например, спектральный критерий в терминах корней характеристического уравнения не представляется возможным.

Один из путей получения критериев (спектрального и алгебраического коэффициента) асимптотической устойчивости в среднем квадратичном решений системы разностных уравнений (1.3) с рациональным соотношением между запаздываниями – расширение исходного n -мерного фазового пространства и построение уравнений для вторых моментов решений расширенной системы разностных уравнений.

3.1. Эквивалентная система стохастических разностных уравнений без запаздывания и уравнения для вторых моментов. Введем в рассмотрение вектор-столбец новых переменных $u(t)$ размера $n(m + 1)$,

$$u(t) = [x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m)]^T.$$

Тогда стохастическую систему с запаздыванием можно записать в виде эквивалентной ей стохастической системы размера $n(m + 1)$ без запаздывания

$$u(t + \tau_0) = [A + B\xi(t)]u(t), \quad (3.1)$$

где под A и B понимаются квадратные размера $n(m + 1) \times n(m + 1)$ блочные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{m-1} & A_m \\ E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Обозначим через $Q(t)$ матрицу вторых моментов решений системы (1.3), т.е.

$$Q(t) = [q_{ik}(t)]_{i,k=1}^{n(m+1)} \equiv M\{u(t)u^T(t)\}.$$

Умножая уравнение (3.1) почленно справа на соответствующее ему транспонированное уравнение

$$u^T(t + \tau_0) = u^T(t)[A^T + B^T\xi(t)]$$

и применяя к полученному результату операцию математического ожидания с учетом свойств случайного процесса $\xi(t)$, получим разностное матричное уравнение для матрицы вторых моментов

$$Q(t + \tau_0) = AQ(t)A^T + BQ(t)B^T. \quad (3.3)$$

С помощью кронекерова произведения матриц матричное уравнение (3.3) можно записать в векторно-матричной форме

$$q(t + \tau_0) = \mathcal{A}q(t), \quad (3.4)$$

где через $q(t)$ обозначен $n^2(m+1)^2$ -мерный вектор-столбец,

$$q(t) = [q_{11}(t), \dots, q_{1n}(t), \dots, q_{n(m+1)}(t), \dots]^T,$$

а матрица $\mathcal{A}$ размера $n^2(m+1)^2 \times n^2(m+1)^2$ имеет вид

$$\mathcal{A} = A \otimes A + B \otimes B. \quad (3.5)$$

3.2. Спектральный критерий. Запись уравнения моментов (3.3) в векторно-матричной форме (3.4) позволяет сформулировать спектральный критерий асимптотической устойчивости в среднем квадратичном в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5. *Для асимптотической устойчивости тривиального решения $q = 0$ системы (3.4) (и, следовательно, асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения $x = 0$ системы (1.3)) необходимо и достаточно, чтобы модули всех собственных значений матрицы $\mathcal{A}$ (3.5) были меньше единицы (другими словами, чтобы матрица $\mathcal{A}$ была сходящейся).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как система уравнений для моментов (3.4) является детерминированной, то доказательство теоремы осуществляется стандартным для детерминированных стационарных разностных уравнений приемом – построением соответствующего характеристического уравнения. Отыскивая общее решение системы (3.4) в виде показательной функции $q(t) = \lambda^t c_1$ (т.е. в виде элементарной функции; c_1 и λ – векторная и скалярная константы соответственно), приходим к характеристическому уравнению

$$\det(\mu E - \mathcal{A}) = 0 \quad (\mu = \lambda^{\tau_0}),$$

откуда следует справедливость теоремы.

3.3. Алгебраические коэффициентные критерии. Исходя из стохастической разностной системы уравнений расширенной размерности (3.1), можно предложить следующий критерий.

ТЕОРЕМА 6 (первый алгебраический коэффициентный критерий). *Для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения $u = 0$ системы (3.1) (и, следовательно, асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения $x = 0$ системы (1.3)) необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно определенная матрица $H \in \mathbb{R}^{n(m+1) \times n(m+1)}$ – решение матричного алгебраического уравнения Сильвестра*

$$H - A^T H A - B^T H B = E. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение $n^2(m+1)^2$ -параметрическую стохастическую функцию Ляпунова вида квадратичной формы

$$V(u(t)) = u^T(t) H u(t), \quad H \in \mathbb{R}^{n(m+1) \times n(m+1)}. \quad (3.7)$$

Роль параметров играют $n^2(m+1)^2$ элементов положительно определенной матрицы H ($H = H^T > 0$), подлежащей определению.

Выполняя присущие методу функций Ляпунова для стохастических разностных уравнений шаги (см. [10, гл. 2]) – вычисление первой разности функции Ляпунова (3.7) на решениях (3.1), т.е.

$$\{\Delta V(u(t))\}_{(3.1)} = \{V(u(t + \tau_0)) - V(u(t))\}_{(3.1)},$$

и последующее исследование условий, при которых математическое ожидание первой разности отрицательно,

$$M\{\Delta V(u(t))\}_{(3.1)} < 0,$$

– приходим к утверждению теоремы.

Запись матричного уравнения для моментов (3.3) в векторно-матричной форме (3.4) позволяет сформулировать еще один алгебраический коэффициентный критерий асимптотической устойчивости в среднем квадратичном.

ТЕОРЕМА 7 (второй алгебраический коэффициентный критерий). *Для асимптотической устойчивости тривиального решения $q = 0$ системы (3.4) (и, следовательно, асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения $x = 0$ системы (1.3)) необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно определенная матрица $H \in \mathbb{R}^{n^2(m+1)^2 \times n^2(m+1)^2}$ – решение дискретного матричного алгебраического уравнения Ляпунова*

$$H - \mathcal{A}^T H \mathcal{A} = E. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы осуществляется с помощью $n^4(m+1)^4$ -параметрической функции Ляпунова вида квадратичной формы

$$V(q(t)) = q^t(t) H q(t), \quad H \in \mathbb{R}^{n^2(m+1)^2 \times n^2(m+1)^2} \quad (3.9)$$

стандартными для метода функций Ляпунова вычислениями.

3.4. *Достаточные алгебраические коэффициентные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном.* Все сказанное в п. 2 о целесообразности поиска достаточных условий асимптотической устойчивости для детерминированной системы (1.1) в то время, когда имеются критерии асимптотической устойчивости, справедливо и в отношении поиска достаточных условий асимптотической устойчивости в среднем квадратичном решений стохастической системы (1.3).

Для получения достаточных условий используем метод функций Ляпунова. Построим для системы (1.3) функцию Ляпунова $V(x(t))$ в виде линейной комбинации $m + 1$ квадратичных форм переменных $x(t)$ и $x(t - \tau_j)$,

$$V(x(t)) = x^T(t)Hx(t) + \sum_{j=1}^m \gamma_j x^T(t - \tau_j)Hx(t - \tau_j) \quad (3.10)$$

с неизвестными пока постоянной положительно определенной матрицей $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($H = H^T > 0$) и числами (весовыми коэффициентами) γ_j ($j = 1, \dots, m$). Если нам удастся найти уравнения или неравенства, из которых можно однозначно определить матрицу $H > 0$ и числа γ_j , то тем самым выбор функции Ляпунова в форме (3.10) оправдан. Далее в ходе построения будет установлено, что для того, чтобы функция (3.10) была положительно определенной на решениях $x(t)$ системы (1.3) и математическое ожидание ее первой разности

$$\Delta V(x(t)) = V(x(t + \tau_0)) - V(x(t))$$

на этих решениях было отрицательной величиной (другими словами, чтобы V была функцией Ляпунова для системы (1.3)), искомая матрица H должна определяться из уравнения Сильвестра с матричными коэффициентами A_0, B_0 , а числа γ_j ($j = 1, \dots, m$) должны быть положительными и меньше единицы, образуя при этом последовательность (2.10).

Функция Ляпунова (3.10), как видно из ее структуры, является $(n^2 + m)$ -параметрической.

В соответствии с методом функций Ляпунова исследования устойчивости в среднем квадратичном решений разностных стохастических уравнений вычислим первую разность ΔV функции V (3.10) на решениях системы (1.3) и ее математическое ожидание $M\{\Delta V\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \{\Delta V(x(t))\}_{(1.3)} &= \{V(x(t + \tau_0)) - V(x(t))\}_{(1.3)} \\ &= \left\{ x^T(t + \tau_0)Hx(t + \tau_0) + \sum_{j=1}^m \gamma_j x^T(t - (j-1)\tau_0)Hx(t - (j-1)\tau_0) \right. \\ &\quad \left. - x^T(t)Hx(t) - \sum_{j=1}^m \gamma_j x^T(t - j\tau_0)Hx(t - j\tau_0) \right\}_{(1.3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ [A_0 + B_0 \xi(t)]x(t) + \sum_{j=1}^m [A_j + B_j \xi(t)]x(t - j\tau_0) \right\}^T H \\
&\quad \times \left\{ [A_0 + B_0 \xi(t)]x(t) + \sum_{j=1}^m [A_j + B_j \xi(t)]x(t - j\tau_0) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \gamma_j x^T(t - (j-1)\tau_0) H x(t - (j-1)\tau_0) \\
&\quad - x^T(t) H x(t) - \sum_{j=1}^m \gamma_j x^T(t - j\tau_0) H x(t - j\tau_0) \\
&= x^T(t) \{ [A_0^T + B_0^T \xi(t)] H [A_0 + B_0 \xi(t)] - H \} x(t) \\
&\quad + x^T(t) [A_0^T + B_0^T \xi(t)] H \sum_{j=1}^m [A_j + B_j \xi(t)] x(t - j\tau_0) \\
&\quad + \sum_{j=1}^m x^T(t - j\tau_0) [A_j^T + B_j^T \xi(t)] H [A_0 + B_0 \xi(t)] x(t) \\
&\quad + \left\{ \sum_{j=1}^m x^T(t - j\tau_0) [A_j^T + B_j^T \xi(t)] \right\} H \left\{ \sum_{j=1}^m [A_j + B_j \xi(t)] x(t - j\tau_0) \right\} \\
&\quad - \sum_{j=1}^m \gamma_j x^T(t - j\tau_0) H x(t - j\tau_0) \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \gamma_j x^T(t - (j-1)\tau_0) H x(t - (j-1)\tau_0).
\end{aligned}$$

Тогда для математического ожидания первой разности получаем следующее представление:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\{\Delta V(x(t))\}_{(1.3)} &= \mathbf{M}\left\{ x^T(t) (A_0^T H A_0 + B_0^T H B_0 - H + \gamma_1 H) x(t) \right. \\
&\quad + x^T(t) A_0^T H \sum_{j=1}^m A_j x(t - j\tau_0) + \sum_{j=1}^m x^T(t - j\tau_0) A_j^T H A_0 x(t) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m-1} x^T(t - j\tau_0) [A_j^T H A_j + B_j^T H B_j - (\gamma_j - \gamma_{j+1}) H] x(t - j\tau_0) \\
&\quad + x^T(t - m\tau_0) [A_m^T H A_m + B_m^T H B_m - \gamma_m H] x(t - m\tau_0) \\
&\quad \left. + \sum_{i,j=1; i \neq j}^m x^T(t - i\tau_0) A_i^T H A_j x(t - j\tau_0) \right\}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части (3.11), можно рассматривать как квадратичную форму переменных $x(t), x(t - \tau_0), \dots, x(t - m\tau_0)$. Тогда (3.11) пере-

пишется в следующем матричном виде:

$$\mathbf{M}\{\Delta V(x(t))\}_{(1.3)} = \mathbf{M}\left\{\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_0) \\ \vdots \\ x(t-m\tau_0) \end{bmatrix}^T G_1 \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_0) \\ \vdots \\ x(t-m\tau_0) \end{bmatrix}\right\}, \quad (3.12)$$

где через G_1 обозначена блочная матрица

$$G_1 = \begin{bmatrix} A_0^T H A_0 + B_0^T H B_0 - (1 - \gamma_1)H & A_0^T H A_1 & \dots \\ A_1^T H A_0 & A_1^T H A_1 + B_1^T H B_1 - (\gamma_1 - \gamma_2)H & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1}^T H A_0 & A_{m-1}^T H A_1 & \dots \\ A_m^T H A_0 & A_m^T H A_1 & \dots \\ & & \dots \\ & A_0^T H A_{m-1} & \\ & A_1^T H A_{m-1} & \\ & \dots & \\ & A_{m-1}^T H A_{m-1} + B_{m-1}^T H B_{m-1} - (\gamma_{m-1} - \gamma_m)H & \\ & A_m^T H A_{m-1} & \\ & & \dots \\ & A_0^T H A_m & \\ & A_1^T H A_m & \\ & \dots & \\ & A_{m-1}^T H A_m & \\ A_m^T H A_m + B_m^T H B_m - \gamma_m H & & \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Математическое ожидание (3.12) отрицательно лишь в том случае, когда квадратичная форма, стоящая в (3.12) под знаком математического ожидания справа, на решениях $x(t)$ системы (1.3) отрицательно определенная; другими словами, когда отрицательно определена матрица G_1 ($G_1 = G_1^T < 0$).

Необходимым условием того, что матрица $G_1 < 0$, является отрицательная определенность матричных блоков, стоящих на ее главной диагонали,

[illegible]

Так как по определению $H > 0$, то из (3.14) следует, что коэффициенты γ_j должны удовлетворять условию $1 - \gamma_1 > 0$, $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$, ..., $\gamma_{m-1} - \gamma_m > 0$, $\gamma_m > 0$, т.е. условию (2.10). Далее, симметричная блок-матрица $A_0^T H A_0 + B_0^T H B_0 - (1 - \gamma_1)H$, стоящая на главной диагонали матрицы G_1 в левом верхнем углу и соответствующая основной фазовой переменной $x(t)$ системы (1.3), лишь тогда отрицательно определенная, когда существует положительно определенное решение $H > 0$ матричного уравнения Сильвестра

$$A_0^T H A_0 + B_0^T H B_0 - (1 - \gamma_1)H = -E. \quad (3.15)$$

Вид матричного уравнения (3.15) и ограничение на γ_1 (2.10) приводят к заключению, что матрица A_0 должна быть сходящейся с некоторым запасом сходимости ρ ($0 \leq \rho < 1$) [2]; это приводит к неравенствам $1 - \rho^2 < \gamma_1 < 1$. Соотношение (3.15) при выбранном согласно (2.10) γ_1 служит уравнением для определения неизвестной матрицы H , входящей в функцию Ляпунова (3.10).

Итак, путем использования функции Ляпунова (3.10) приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 8 (достаточные алгебраические коэффициенты условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном). *Тривиальное решение $x = 0$ уравнения (1.3) асимптотически устойчиво в среднем квадратичном, если выполнены следующие условия:*

- 1) матрица A_0 сходящаяся с некоторым запасом сходимости ρ ($0 < \rho < 1$);
- 2) существует положительно определенное решение $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($H = H^T > 0$) матричного уравнения Сильвестра (3.15), в котором произвольно выбираемое число γ_1 удовлетворяет условию $1 - \rho^2 < \gamma_1 < 1$;
- 3) имеет место матричное неравенство $G_1 < 0$, в котором последовательность произвольно выбираемых положительных чисел γ_1 удовлетворяет соотношению $0 < \gamma_m < \dots < \gamma_1 < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетрудно заметить, что при отсутствии случайных возмущений коэффициентов ($B_j = 0$; $j = 0, 1, \dots, m$) из теоремы 8 следуют достаточные условия асимптотической устойчивости для системы детерминированных линейных разностных уравнений (1.1), содержащиеся в теореме 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нецелесообразность выбора при поиске достаточных условий устойчивости в среднем квадратичном вместо функции V (3.10) комбинации квадратичных форм

$$V = x^T(t)Hx(t) + \sum_{j=1}^m x^T(t - \tau_j)H_jx(t - \tau_j),$$

где H_j – неизвестные матрицы, имеет ту же мотивацию, что и в случае детерминированной системы (замечание 1). В стохастическом случае приходим к необходимости решать рекуррентную систему матричных уравнений

$$A_j^T H A_j + B_j^T H_j B_j - H_j + H_{j+1} = -E, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из теоремы 4 для детерминированной системы (1.1) и теоремы 8 для стохастической системы (1.3) видно, что главный вклад в свойство асимптотической устойчивости решений систем (1.1) и (1.3) вносит матрица A_0 , стоящая при основных фазовых переменных $y(t)$ и $x(t)$ соответственно. От нее требуется не просто сходимость, но сходимость с “запасом”; она же определяет через уравнение Ляпунова (2.15) и уравнение Сильвестра (3.15) главные члены $y^T(t)H y(t)$ и $x^T(t)H x(t)$ функций Ляпунова (2.9) и (3.10) соответственно. Дополнительные исследования показывают, что с учетом этого обстоятельства области асимптотической устойчивости в пространстве коэффициентов, доставляемые теоремами 4 и 8, можно расширить, если в системе строгих неравенств (2.14) и (3.14) неравенства, начиная со второго, заменить на нестрогие неравенства ($\leq$) и от матриц G и G_1 требовать отрицательную определенность только

на главных фазовых переменных $y(t)$ и $x(t)$ и неположительную определенность на совокупностях фазовых переменных $y(t), y(t-\tau_1), \dots, y(t-\tau_m)$ и $x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_m)$ соответственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корневский Д. Г. К асимптотической устойчивости решений систем линейных детерминированных и стохастических стационарных разностных уравнений с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322. № 2. С. 219–223.
- [2] Корневский Д. Г. Алгебраический коэффициентный критерий сходимости “с запасом” (экспоненциальной устойчивости) решений линейных стационарных разностных уравнений // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 6. С. 1320–1322.
- [3] Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964.
- [4] Жабко А. П., Харитонов В. Л. Методы линейной алгебры в задачах управления. С.-Пб.: С.-Петербургский ун-т, 1993.
- [5] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
- [6] Харитонов В. Л. Глобальная устойчивость по сдвигам возмущенных систем разностных уравнений // Автоматика (Киев). 1991. № 3. С. 3–8.
- [7] Харитонов В. Л. О сохранении свойства глобальной устойчивости по сдвигам при вариациях параметров // Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 26–30.
- [8] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. Мир, 1967.
- [9] Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986.
- [10] Корневский Д. Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наукова думка, 1989.