Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Курина, Обратимость оператора, возникающего в теории управления линейными системами, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 230–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm736>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:57:20

УДК 517.983.24

ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАТОРА, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

Г. А. Курина

Приведены достаточные условия существования ограниченного обратного оператора для линейного оператора, появляющегося в теории оптимального управления линейными системами в гильбертовом пространстве и имеющего матричное представление вида

$$\begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 \\ F_3 & -F_1^* & F_5 \\ -F_5^* & F_2^* & -F_4 \end{pmatrix},$$

где F_3, F_4 – неотрицательные самосопряженные операторы. Обратимость исследуемого оператора используется для доказательства однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи, возникающей из условий оптимальности управления.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Имеется небольшое число результатов о достаточных условиях обратимости операторных матриц (см., например, [1, с. 43]).

В настоящей статье будут получены достаточные условия существования ограниченного обратного для оператора F , имеющего матричное представление вида

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 \\ F_3 & -F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* & -F_4 \end{pmatrix} : D(F_1) \dot{+} D(F_1^*) \dot{+} X_3 \rightarrow X_2 \dot{+} X_1 \dot{+} X_3, \quad (1)$$

в предположениях обратимости некоторых из операторов F_i . Здесь $X_i, i = \overline{1,3}$, – гильбертовы пространства; F_1 – линейный замкнутый оператор с плотной в X_1 областью определения $D(F_1)$, отображающий $D(F_1)$ в X_2 ; $F_2 \in L(X_3, X_2)$, $F_3 \in L(X_1)$, $F_4 \in L(X_3)$; F_3, F_4 – неотрицательные самосопряженные операторы; звездочка при обозначении оператора означает сопряженный оператор.

Покажем, что оператор вида (1) появляется, в частности, при изучении задач оптимального управления линейными системами, не разрешенными относительно производной. В литературе такие системы часто называются дескрипторными, неявными, сингулярными, дифференциально-алгебраическими и т.п. (см., например, обзоры [2], [3]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-01-00968.

Достаточным условием существования оптимального управления для задачи минимизации квадратичного функционала

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle x(T), Vx(T) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T (\langle x(t), Wx(t) \rangle + \langle u(t), Ru(t) \rangle) dt$$

на траекториях линейного уравнения

$$\frac{d}{dt}(Ax(t)) = Cx(t) + Bu(t), \quad Ax(0) = x_0,$$

является разрешимость системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ax(t)) &= Cx(t) + Bu(t), \quad Ax(0) = x_0, \\ \frac{d}{dt}(A^*\psi(t)) &= Wx(t) - C^*\psi(t), \quad A^*\psi(T) = -Vx(T), \\ 0 &= B^*\psi(t) - Ru(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $T > 0$ фиксировано; $x(t) \in X$, $u(t) \in U$, X, U – гильбертовы пространства; V, W, R – самосопряженные неотрицательные операторы; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение; $V, W \in L(X)$, $R \in L(U)$, $A, C \in L(X, Y)$, $B \in L(U, Y)$. Предположим, что оператор A нормально разрешим, тогда пространства X, Y (гильбертово пространство Y содержит область значений оператора A) разлагаются в ортогональные суммы

$$X = \text{Ker } A \oplus \text{Im } A^*, \quad Y = \text{Ker } A^* \oplus \text{Im } A.$$

Обозначим через P ортогональный проектор пространства X на $\text{Ker } A$, через Q – ортогональный проектор пространства Y на $\text{Ker } A^*$. Тогда, применив к первому равенству системы (2) оператор Q , а к третьему равенству системы (2) оператор P , из (2) получаем систему уравнений

$$0 = G \begin{pmatrix} (I - P)x \\ (I - Q)\psi \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} Px \\ Q\psi \\ u \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} QC(I - P) & 0 \\ PW(I - P) & -PC^*(I - Q) \\ 0 & B^*(I - Q) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} QCP & 0 & QB \\ PWP & -(QCP)^* & 0 \\ 0 & B^*Q & -R \end{pmatrix}.$$

Если из (3) можно однозначно выразить $Px, Q\psi, u$ через $(I - P)x, (I - Q)\psi$, то из (2) получаем систему в пространстве $\text{Im } A^* \oplus \text{Im } A$ относительно переменных $(I - P)x, (I - Q)\psi$.

Поэтому в рассматриваемой задаче важное значение имеет существование ограниченного обратного для оператора F вида (1).

Если в критерии качества $J(u)$ под интегралом присутствует член $2\langle x(t), Su(t) \rangle$, то вместо оператора вида (1) из условий оптимальности управления для рассматриваемой задачи возникает оператор

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 \\ F_3 & -F_1^* & F_5 \\ -F_5^* & F_2^* & -F_4 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где обозначения $F_i, i = \overline{1, 4}$, имеют тот же смысл, что и в (1), а $F_5 \in L(X_3, X_1)$. Для такого оператора также будут даны достаточные условия существования ограниченного обратного.

Полученные результаты об обратимости оператора F в настоящей статье использованы для исследования однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи в гильбертовом пространстве, возникающей из условий оптимальности управления.

2. Обратимость оператора F .

ЛЕММА 1. Пусть для оператора (1) выполнено одно из следующих двух условий:

- а) операторы F_1, F_4 имеют ограниченные обратные;
- б) оператор F_1 ограничен и операторы F_2, F_3 имеют ограниченные обратные.

Тогда не существует последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in D(F_1) \dot{+} D(F_1^*) \dot{+} X_3$, $\|x_n\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $Fx_n \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, а именно, пусть существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_n \in D(F_1) \dot{+} D(F_1^*) \dot{+} X_3$,

$$\|x_n\| = 1 \quad (5)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$Fx_n \rightarrow 0. \quad (6)$$

Обозначим

$$x_n = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ x_n^3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x_n^1 \in D(F_1), \quad x_n^2 \in D(F_1^*), \quad x_n^3 \in X_3,$$

тогда из (6) получаем соотношения

$$F_1 x_n^1 + F_2 x_n^3 \rightarrow 0, \quad F_3 x_n^1 - F_1^* x_n^2 \rightarrow 0, \quad F_2^* x_n^2 - F_4 x_n^3 \rightarrow 0. \quad (7)$$

В силу (5) последовательности $\{x_n^1\}$, $\{x_n^2\}$, $\{x_n^3\}$ ограничены. Поэтому, умножая первое из соотношений (7) скалярно на x_n^2 справа, второе – на x_n^1 слева, третье – на $(-x_n^3)$ слева и складывая полученные результаты, будем иметь

$$\langle x_n^1, F_3 x_n^1 \rangle_1 + \langle x_n^3, F_4 x_n^3 \rangle_3 \rightarrow 0, \quad (8)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ означает скалярное произведение в пространстве $X_i, i = 1, 3$.

Так как самосопряженные операторы F_3, F_4 являются неотрицательными, то из (8) следует, что $\sqrt{F_3} x_n^1 \rightarrow 0, \sqrt{F_4} x_n^3 \rightarrow 0$, значит, имеем

$$F_3 x_n^1 \rightarrow 0, \quad F_4 x_n^3 \rightarrow 0. \quad (9)$$

Если выполнено условие а), то из (9) вытекает, что $x_n^3 \rightarrow 0$; тогда из первого соотношения в (7) следует, что $x_n^1 \rightarrow 0$, а из второго соотношения в (7) получаем, что $x_n^2 \rightarrow 0$. Значит, $x_n \rightarrow 0$, что противоречит (5).

Если выполнено условие б), то из (9) вытекает, что $x_n^1 \rightarrow 0$; тогда из первого соотношения в (7) следует, что $x_n^3 \rightarrow 0$, а из третьего соотношения в (7) получаем, что $x_n^2 \rightarrow 0$. Значит, $x_n \rightarrow 0$, что противоречит (5).

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. При выполнении условий леммы 1 сопряженный к оператору (1) оператор F^* имеет нулевое ядро.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1) следует, что оператор F^* имеет матричное представление вида

$$F^* = \begin{pmatrix} F_1^* & F_3 & 0 \\ 0 & -F_1 & F_2 \\ F_2^* & 0 & -F_4 \end{pmatrix}.$$

Предположим противное. Пусть существует ненулевой элемент $x \in D(F_1^*) \dot{+} D(F_1) \dot{+} X_3$ такой, что $F^*x = 0$. Последнее равенство эквивалентно системе

$$F_1^*x_1 + F_3x_2 = 0, \quad -F_1x_2 + F_2x_3 = 0, \quad F_2^*x_1 - F_4x_3 = 0, \quad (10)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in D(F_1^*), \quad x_2 \in D(F_1), \quad x_3 \in X_3.$$

Умножая первое из соотношений (10) скалярно на x_2 справа, второе – на x_1 слева, третье – на $(-x_3)$ справа и складывая полученные результаты, будем иметь

$$\langle F_3x_2, x_2 \rangle_1 + \langle F_4x_3, x_3 \rangle_3 = 0. \quad (11)$$

Так как самосопряженные операторы F_3, F_4 являются неотрицательными, то из (11) следует, что $\sqrt{F_3}x_2 = 0, \sqrt{F_4}x_3 = 0$, значит, имеем

$$F_3x_2 = 0, \quad F_4x_3 = 0. \quad (12)$$

Если выполнено условие а), то из (12) вытекает, что $x_3 = 0$, тогда из второго равенства в (10) следует, что $x_2 = 0$, а из первого равенства в (10) получаем, что $x_1 = 0$. Значит, $x = 0$, что противоречит предположению.

Если выполнено условие б), то из (12) вытекает, что $x_2 = 0$, тогда из второго равенства в (10) следует, что $x_3 = 0$, а из третьего равенства в (10) получаем, что $x_1 = 0$. Значит, и в этом случае приходим к противоречию с предположением. Заметим, что для доказательства этой леммы в случае условия б) не нужно требовать ограниченность оператора F_1 .

Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 1. При выполнении условий леммы 1 оператор (1) имеет ограниченный обратный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что существует постоянная $k > 0$ такая, что для всех $x \in D(F_1) \dot{+} D(F_1^*) \dot{+} X_3, \|x\| = 1$, справедливо неравенство $\|Fx\| \geq k$. Далее будем использовать вытекающее отсюда неравенство

$$\|Fx\| \geq k\|x\|, \quad (13)$$

которое справедливо для всех значений $x \in D(F_1) \dot{+} D(F_1^*) \dot{+} X_3$.

Из оценки (13) и определения замкнутого оператора следует замкнутость области значений оператора $F(\text{Im } F)$. Поэтому имеет место разложение

$$X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} X_3 = \text{Im } F \dot{+} \text{Ker } F^* \quad (14)$$

(см., например, [4, с. 295]).

В силу леммы 2 $\text{Ker } F^* = 0$, поэтому равенство (14) означает, что область значений оператора F совпадает со всем пространством $X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} X_3$. Учитывая оценку (13), получаем, что оператор F имеет ограниченный обратный (см., например, теорему 2 из [5, с. 204]).

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. При выполнении условия а) леммы 1 операторы

$$B_1 = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 F_4^{-1} F_2^* \\ F_3 & -F_1^* \end{pmatrix} : D(F_1) \dot{+} D(F_1^*) \rightarrow X_2 \dot{+} X_1$$

и

$$B_2 = F_1^* + F_3 F_1^{-1} F_2 F_4^{-1} F_2^* : D(F_1^*) \rightarrow X_1$$

имеют ограниченные обратные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 оператор

$$F : D(F_1) \dot{+} D(F_1^*) \dot{+} X_3 \rightarrow X_2 \dot{+} X_1 \dot{+} X_3$$

имеет ограниченный обратный, поэтому для любых $y_i \in X_i, i = \overline{1, 3}$, существует единственное решение $x_1 \in D(F_1), x_2 \in D(F_1^*), x_3 \in X_3$ для системы

$$F_1 x_1 + F_2 x_3 = y_2, \quad F_3 x_1 - F_1^* x_2 = y_1, \quad F_2^* x_2 - F_4 x_3 = y_3 \quad (15)$$

и для любых $x_1 \in D(F_1), x_2 \in D(F_1^*), x_3 \in X_3$ справедлива оценка

$$\left\| F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| \geq k \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|, \quad k > 0. \quad (16)$$

Из системы (15) следует, что оператор B_1 (соответственно B_2) отображает $D(F_1) \dot{+} D(F_1^*)$ (соответственно $D(F_1^*)$) на все $X_2 \dot{+} X_1$ (соответственно X_1). Чтобы убедиться в этом, достаточно в системе (15) положить $y_3 = 0$ (соответственно $y_2 = 0, y_3 = 0$).

Из неравенства (16) при любых $x_1 \in D(F_1), x_2 \in D(F_1^*), x_3 = F_4^{-1} F_2^* x_2$ (соответственно при любом $x_2 \in D(F_1^*), x_1 = -F_1^{-1} F_2 F_4^{-1} F_2^* x_2, x_3 = F_4^{-1} F_2^* x_2$) вытекает оценка

$$\left\| B_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| \geq k \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| \quad (\|B_2 x_2\| \geq k \|x_2\|).$$

Используя теорему 2 из [5, с. 204], получаем утверждение следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. При выполнении условия б) леммы 1 операторы

$$F_2 + F_1 F_3^{-1} F_1^* (F_2^*)^{-1} F_4: X_3 \rightarrow X_2, \quad F_3 + F_1^* (F_2^*)^{-1} F_4 F_2^{-1} F_1: X_1 \rightarrow X_1$$

имеют ограниченные обратные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству следствия 1.

Подобно доказательству теоремы 1 устанавливаются следующие две теоремы, дающие достаточные условия обратимости оператора F вида (4).

ТЕОРЕМА 2. Если оператор

$$\begin{pmatrix} F_3 & F_5 \\ F_5^* & F_4 \end{pmatrix} \quad (17)$$

неотрицательный и имеет ограниченный обратный, оператор $(F_1 F_2)^*$ инъективный и нормально разрешимый, то оператор (4) имеет ограниченный обратный.

ТЕОРЕМА 3. Если оператор (17) неотрицательный, а операторы

$$(F_1 F_2)^*, \quad \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_5 \\ F_5^* & F_4 \end{pmatrix}$$

инъективные и нормально разрешимые, то оператор (4) имеет ограниченный обратный.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко привести пример, показывающий, что условия теорем 2, 3 не являются необходимыми для обратимости произвольного оператора F вида (4). Например,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1 была анонсирована в [6].

3. Разрешимость двухточечной краевой задачи.

ТЕОРЕМА 4. Система

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= C(t)x(t) + B(t)u(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= W(t)x(t) - C^*(t)y(t), \\ 0 &= B^*(t)y(t) - R(t)u(t) \end{aligned} \quad (18)$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(T) = y_T, \quad (19)$$

где $C(t)$, $W(t) \in L(X)$, $B(t) \in L(U, X)$, $R(t) \in L(U)$, все операторы непрерывны по t ; $W(t)$, $R(t)$ – самосопряженные неотрицательные операторы, а $R(t)$ имеет при всех $t \in [0, T]$ ограниченный обратный, однозначно разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить однозначную разрешимость неоднородной системы

$$\begin{aligned}\frac{dx^1(t)}{dt} &= C(t)x^1(t) + B(t)u(t) + g^1(t), \\ \frac{dx^2(t)}{dt} &= W(t)x^1(t) - C^*(t)x^2(t) + g^2(t), \\ 0 &= B^*(t)x^2(t) - R(t)u(t) + g^3(t)\end{aligned}\quad (20)$$

с однородными краевыми условиями

$$x^1(0) = 0, \quad x^2(T) = 0. \quad (21)$$

Введем оператор

$$(Fx)(t) = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} + C(t) & 0 & B(t) \\ W(t) & -\frac{d}{dt} - C^*(t) & 0 \\ 0 & B^*(t) & -R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

действующий в пространстве $L_2([0, T]; X \dot{+} X \dot{+} U)$ и определенный на множестве непрерывных функций

$$x = x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (x^i(t) \in X, \quad i = 1, 2, \quad u(t) \in U)$$

таких, что $x^1(t)$, $x^2(t)$ абсолютно непрерывны, имеют производные в $L_2([0, T]; X)$ и удовлетворяют условию (21).

Легко проверить, что оператор, определяемый формулой (22), имеет вид (1) и удовлетворяет условию а) теоремы 1, поэтому он имеет ограниченный обратный. Следовательно, задача (20), (21) однозначно разрешима.

Теорема 4 доказана.

Задача (18), (19) получается из условия оптимальности управления в линейно-квадратичной задаче в случае линейного внеинтегрального члена.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Баскакову А.Г. и Мартыненко Г.В. за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
- [2] Lewis F. L. A survey of linear singular systems // Circuits, Systems, and Signal Processing. 1986. V. 5. № 1. P. 3–36.
- [3] Курина Г. А. Сингулярные возмущения задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной. Обзор // Изв. РАН. Сер. техн. киберн. 1992. № 4. С. 20–48.
- [4] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [5] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
- [6] Курина Г. А. Об обратимости одного оператора, возникающего в теории задач управления для дескрипторных систем // Понтрягинские чтения – X. Тезисы докл. Воронеж: ВГУ, 1999. С. 145.