Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Перов, Теорема Йорка и неравенство Виртингера, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 237–245

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:05:43

УДК 517.925.42

ТЕОРЕМА ЙОРКА И НЕРАВЕНСТВО ВИРТИНГЕРА

А. И. Перов

Рассматриваются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (первого или более высокого порядка), правые части которых удовлетворяют условию Липшица, формулируемому с помощью евклидовой метрики и неотрицательных матриц. На основе неравенства Виртингера доказаны теоремы об оценке снизу периода периодических нестационарных решений автономных систем, обобщающие теорему Йорка. В случае неотрицательных неразложимых матриц обсуждается вопрос о точности полученных оценок.

Библиография: 5 названий.

Статья посвящена получению оценок снизу для не сводящихся к постоянным периодов периодических решений автономных систем дифференциальных уравнений, правые части которых удовлетворяют условию Липшица, сформулированному с помощью евклидовой нормы и неотрицательных матриц.

Для n -мерных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ с числовыми компонентами $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ соответственно скалярное произведение и евклидову норму определяем обычным образом:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j y_j, \quad \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим записанную в векторной форме автономную систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{g}_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m), \quad j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где точка означает дифференцирование по времени t , $\mathbf{x}_j$ – вектор размерности d_j , причем $d_1 + \dots + d_m = n$. В вещественном случае $\mathbf{g}_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ определены для $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^{d_m}$ и принимают значения в $\mathbb{R}^{d_j}$, в комплексном случае $\mathbf{g}_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ определены для $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{C}^{d_1}, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{C}^{d_m}$ и принимают значения в $\mathbb{C}^{d_j}$ ($j = 1, \dots, m$). Решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1) с векторными компонентами $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$ назовем *стационарным*, если все его компоненты являются постоянными, и *нестационарным* – в противном случае. Нас будут интересовать периодические нестационарные решения, т.е. решения, для которых

$$\mathbf{x}_j(t + \omega) = \mathbf{x}_j(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где период ω – некоторое положительное число.

В статье важную роль играют *неотрицательные векторы и матрицы* [1]. *Спектральный радиус* квадратной матрицы A обозначается $\text{spr } A$. Предполагается, что выполнено условие Липшица в следующей форме:

$$\|g_j(x_1, \dots, x_m) - g_j(y_1, \dots, y_m)\| \leq \sum_{k=1}^m l_{jk} \|x_k - y_k\|, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $L = (l_{jk})$ – неотрицательная $(m \times m)$ -матрица, спектральный радиус которой положителен: $\text{spr } L > 0$. Ясно, что в силу условия (3) фазовая траектория $x(t)$ в n -мерном фазовом пространстве не может слишком быстро вернуться назад на прежнее место; иными словами, период ω в (2) не может быть слишком малым (если только решение не сводится к стационарному). Количественное подтверждение отмеченного явления содержится в приводимой ниже теореме 1, которая в вещественном случае и при дополнительном предположении $m = 1$ впервые была установлена Йорком [2].

В теореме Йорка система (1) в $\mathbb{R}^n$ имеет вид $\dot{x} = g(x)$, где выполнено условие Липшица $\|g(x) - g(y)\| \leq l\|x - y\|$ с положительной постоянной l , а оценка периода состоит в том, что $\omega \geq 2\pi/l$.

Для вещественных векторов x и y мы пишем $x \leq y$, если для всех компонент этих векторов выполнено $x_j \leq y_j$ ($j = 1, \dots, n$), и $x < y$, если для всех компонент этих векторов выполнено $x_j < y_j$ ($j = 1, \dots, n$). Аналогично определяются неравенства для вещественных матриц.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha w \leq Aw$, где α – неотрицательное число, w – ненулевой неотрицательный вектор и A – неотрицательная матрица. Тогда $\alpha \leq \text{spr } A$, причем если $\alpha w < Aw$, то $\alpha < \text{spr } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первой части леммы дано в [3, с. 67, лемма 9.1], а справедливость второй части немедленно вытекает из неравенств $\alpha w < \beta w \leq Aw$, где $\beta > \alpha$ выбрано так, чтобы $\beta w \leq Aw$ (при этом мы без ограничения общности считаем вектор w положительным).

В статье систематически используется обозначение

$$|||z(\cdot)||| = \left(\int_0^\omega \|z(t)\|^2 dt \right)^{1/2}$$

для векторной функции $z(t)$, суммируемой с квадратом на отрезке $[0, \omega]$. В книге [4, с. 19–22] дано геометрическое доказательство теоремы Йорка, опирающееся на свойства *сферической индикатрисы* фазовой кривой. Предлагаемое нами аналитическое доказательство основано на использовании хорошо известного *неравенства Виртингера* [5, с. 223], которое нам удобно записать в следующем виде

$$\varkappa |||z(\cdot)||| \leq |||\dot{z}(\cdot)|||, \quad \varkappa = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4)$$

Здесь $z(t)$ – абсолютно непрерывная периодическая с периодом ω векторная функция, имеющая нулевое среднее значение и суммируемую с квадратом производную (на отрезке $[0, \omega]$). Доказываемое с помощью равенства Парсеваля неравенство (4) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $z(t)$ есть линейная комбинация с векторными коэффициентами функций $\cos \varkappa t$ и $\sin \varkappa t$ (или $\exp(i\varkappa t)$ и $\exp(-i\varkappa t)$).

ТЕОРЕМА 1. Для периода ω периодического нестационарного решения $x(t)$ системы (1), правые части которой удовлетворяют условию Липшица (3) с неотрицательной $(m \times m)$ -матрицей L , имеющей положительный спектральный радиус, справедлива оценка снизу

$$\omega \geq \frac{2\pi}{\text{spr } L}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы имеет место (2) и

$$\dot{x}_j(t) = g_j(x_1(t), \dots, x_m(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Рассмотрим разность

$$z(t) = x(t + \Delta) - x(t), \quad (7)$$

где Δ — произвольное фиксированное число, несоизмеримое с периодом ω . В силу автономности системы (1) сдвиг $x(t + \Delta)$ также является решением этой системы. Для нас важно, что ненулевая векторная функция $z(t)$ имеет нулевое среднее значение.

Из (7) в силу (6) и условия Липшица (3) получаем неравенство

$$\|\dot{z}_j(t)\| \leq \sum_{k=1}^m l_{jk} \|z_k(t)\|, \quad (8)$$

причем здесь и в написанных ниже неравенствах $j = 1, \dots, m$. По неравенству треугольника в L_2 имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^m l_{jk} \|z_k(\cdot)\| \right\| \leq \sum_{k=1}^m l_{jk} \|z_k(\cdot)\|. \quad (9)$$

Поэтому из (8) и (9) находим, что

$$\|\dot{z}_j(\cdot)\| \leq \sum_{k=1}^m l_{jk} \|z_k(\cdot)\|. \quad (10)$$

Так как по неравенству Виртингера (4)

$$\kappa \|z_j(\cdot)\| \leq \|\dot{z}_j(\cdot)\|, \quad (11)$$

то из (10) следует

$$\kappa \|z_j(\cdot)\| \leq \sum_{k=1}^m l_{jk} \|z_k(\cdot)\|. \quad (12)$$

Обозначим через w ненулевой неотрицательный вектор с компонентами $\|z_j(\cdot)\|$, $j = 1, \dots, m$. По лемме 1 из неравенства $\kappa w \leq Lw$ вытекает оценка $\kappa \leq \text{spr } L$, которая с точностью до обозначения совпадает с (5).

Коснемся вкратце вопроса об условиях обращения неравенства (5) в равенство. Периодическое нестационарное решение системы (1) назовем *экстремальным*, если для

него в (5) имеет место знак равенства, т.е. $\kappa = \operatorname{spr} L$. Выясним существуют ли экстремальные решения и какими они обладают свойствами, ограничившись случаем, когда L – *неразложимая* матрица.

Если $\kappa = \operatorname{spr} L$, то в силу неразложимости матрицы L из оценки $\kappa w \leq Lw$ вытекает $\kappa w = Lw$ и $w > 0$. Таким образом, κ является *перроновым* собственным значением матрицы L , а w – соответствующим *перроновым* собственным вектором. Однако, для того чтобы в (12) имели место только знаки равенства, необходимо и достаточно, чтобы одновременно имели место только знаки равенства в (8), (9) и (11).

Последнее в силу неравенства Виртингера (4) эквивалентно условию

$$z_j(t) = u_j \cos \kappa t + v_j \sin \kappa t, \quad j = 1, \dots, m, \quad (13)$$

где u_j и v_j – некоторые постоянные векторы. Равенство в (9) согласно строгой нормированности L_2 эквивалентно тому, что $\|z_k(t)\|$ между собой пропорциональны при $k = 1, \dots, m$ (при этом мы используем неразложимость матрицы L). Таким образом, равенство в (8) эквивалентно условию $\|\dot{z}_j(t)\| = c_j \|z_j(t)\|$, где c_j – некоторые положительные постоянные, $j = 1, \dots, m$. Согласно (13) последнее равенство эквивалентно тому, что ненулевые векторы u_j и v_j имеют одинаковую длину и ортогональны в *вещественном смысле*, т.е.

$$\|u_j\| = \|v_j\| > 0, \quad \operatorname{Re}(u_j, v_j) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (14)$$

Из (13) и (14) после вычислений для экстремального решения получаем

$$x_j(t) = a_j \cos \kappa t + b_j \sin \kappa t + c_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (15)$$

где a_j, b_j, c_j – некоторые постоянные векторы, причем ненулевые a_j и b_j имеют одинаковую длину и ортогональны в вещественном смысле, т.е.

$$\|a_j\| = \|b_j\| > 0, \quad \operatorname{Re}(a_j, b_j) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (16)$$

Отсюда мы делаем важный вывод: если в вещественном случае хотя бы один из векторов $x_1, \dots, x_m$ оказался одномерным (т.е. скаляром), то экстремальных решений не существует. Так будет, например, для системы

$$\dot{x}_j = g_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n,$$

для которой условие Липшица принимает вид

$$|g_j(x_1, \dots, x_n) - g_j(y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{k=1}^n l_{jk} |x_k - y_k|, \quad j = 1, \dots, n.$$

Поэтому оценка (5) в этом частном случае не является точной и может быть улучшена. Нетрудно показать, что в комплексном случае или в вещественном, когда $d_j \geq 2$ при

$j = 1, \dots, m$, всегда можно построить систему (1), удовлетворяющую условию Липшица (3) с матрицей $\mathbf{L}$, для которой (15) с (16) является экстремальным решением.

Подчеркнем связь между экстремальными периодическими колебаниями и спектральными характеристиками матрицы $\mathbf{L}$: частота колебаний κ является перроновым собственным значением матрицы $\mathbf{L}$, а радиусы $r_1, \dots, r_m$ окружностей, заданных параметрически в (15) с (16), равные общему значению $\|\mathbf{a}_j\|$ и $\|\mathbf{b}_j\|$, дают компоненты перронова собственного вектора $\mathbf{r}$ матрицы $\mathbf{L}$: $\kappa \mathbf{r} = \mathbf{L} \mathbf{r}$.

Данное нами доказательство теоремы 1 без труда переносится на автономную систему нелинейных дифференциальных уравнений p -го порядка

$$\mathbf{x}_j^{(p)} = \mathbf{g}_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_m, \dots, \mathbf{x}_1^{(p-1)}, \dots, \mathbf{x}_m^{(p-1)}), \quad j = 1, \dots, m, \quad (17)$$

которую мы будем изучать или в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (p раз) – вещественный случай, или в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \dots \times \mathbb{C}^n$ (p раз) – комплексный случай. Для системы (17) сохраняются определения стационарного и нестационарного решений. Предполагается, что правые части системы (17) удовлетворяют условию Липшица в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{g}_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_m, \dots, \mathbf{x}_1^{(p-1)}, \dots, \mathbf{x}_m^{(p-1)}) - \\ & \quad - \mathbf{g}_j(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, \dot{\mathbf{y}}_1, \dots, \dot{\mathbf{y}}_m, \dots, \mathbf{y}_1^{(p-1)}, \dots, \mathbf{y}_m^{(p-1)})\| \\ & \leq \sum_{k=1}^m l_{jk}^{(0)} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| + \sum_{k=1}^m l_{jk}^{(1)} \|\dot{\mathbf{x}}_k - \dot{\mathbf{y}}_k\| + \dots + \sum_{k=1}^m l_{jk}^{(p-1)} \|\mathbf{x}_k^{(p-1)} - \mathbf{y}_k^{(p-1)}\|, \\ & \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathbf{L}_0 = (l_{jk}^{(0)})$, $\mathbf{L}_1 = (l_{jk}^{(1)})$, $\dots$, $\mathbf{L}_{p-1} = (l_{jk}^{(p-1)})$ – некоторые неотрицательные $(m \times m)$ -матрицы, сумма которых $\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1 + \dots + \mathbf{L}_{p-1}$ имеет положительный спектральный радиус: $\text{spr}(\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_1 + \dots + \mathbf{L}_{p-1}) > 0$. Последнее требование заведомо выполнено, если упомянутая сумма есть положительная матрица или неотрицательная неразложимая матрица.

Если $m = 1$, то система (17) превращается в одно уравнение p -го порядка

$$\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(p-1)}), \quad (19)$$

для которого условие Липшица (18) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(p-1)}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(p-1)})\| \\ & \leq l_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + l_1 \|\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}\| + \dots + l_{p-1} \|\mathbf{x}^{(p-1)} - \mathbf{y}^{(p-1)}\|, \end{aligned} \quad (20)$$

причем среди неотрицательных чисел $l_0, l_1, \dots, l_{p-1}$ есть хотя бы одно положительное. Если $m = n$, то система (17) распадается на n скалярных уравнений

$$\mathbf{x}_j^{(p)} = \mathbf{g}_j(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \dot{\mathbf{x}}_1, \dots, \dot{\mathbf{x}}_n, \dots, \mathbf{x}_1^{(p-1)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(p-1)}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (21)$$

для этой системы условие Липшица (18) кратко можно записать в форме

$$\begin{aligned} & |g(x, \dot{x}, \dots, x^{(p-1)}) - g(y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)})| \\ & \leq L_0|x - y| + L_1|\dot{x} - \dot{y}| + \dots + L_{p-1}|x^{(p-1)} - y^{(p-1)}|. \end{aligned} \quad (22)$$

Под модулем $|x|$ вектора x с компонентами $x_1, \dots, x_n$ мы понимаем неотрицательный вектор с компонентами $|x_1|, \dots, |x_n|$. Аналогично определяется модуль $|A|$ матрицы A .

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим скалярное уравнение

$$\varphi(u) \equiv \operatorname{spr} \left(\frac{L_0}{u^p} + \frac{L_1}{u^{p-1}} + \dots + \frac{L_{p-1}}{u} \right) = 1, \quad 0 < u < +\infty. \quad (23)$$

ЛЕММА 2. Скалярная функция $\varphi(u)$ положительна, непрерывна, убывает и, кроме того, $\varphi(u) \rightarrow +\infty$ при $0 < u \rightarrow 0$ и $\varphi(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$L(u) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{L_k}{u^{p-k}}, \quad 0 < u < +\infty. \quad (24)$$

Так как при $1 \leq u < +\infty$ выполнены оценки

$$\frac{1}{u^p} \left(\sum_{k=0}^{p-1} L_k \right) \leq L(u) \leq \frac{1}{u} \left(\sum_{k=0}^{p-1} L_k \right),$$

то

$$\frac{1}{u^p} \operatorname{spr} \left(\sum_{k=0}^{p-1} L_k \right) \leq \varphi(u) \leq \frac{1}{u} \operatorname{spr} \left(\sum_{k=0}^{p-1} L_k \right),$$

отсюда вытекает и положительность $\varphi(u)$ и стремление к нулю при $u \rightarrow +\infty$. Аналогично исследуется поведение $\varphi(u)$ при $0 < u \leq 1$. Покажем, что φ убывает, т.е.

$$(0 <) u < v \implies \varphi(u) > \varphi(v). \quad (25)$$

Предварительно заметим, что если положить $L(u) = (l_{jk}(u))$ (см. (24)), то либо $l_{jk}(u) \equiv 0$, либо $l_{jk}(u) > 0$, причем $l'_{jk}(u) < 0$ при $0 < u < +\infty$.

Пусть $L(v)k = \sigma k$, где $\sigma \equiv \operatorname{spr} L(v) = \varphi(v) > 0$ и $0 \neq k \geq 0$. Если $k > 0$, то в каждой строке матрицы $L(v)$ есть положительный элемент $l_{jk}(v) > 0$. Так как $l_{jk}(u) > l_{jk}(v)$ для таких j и k , то $L(u)k > L(v)k = \sigma k$ и по лемме 1 получаем $\varphi(u) = \operatorname{spr} L(u) > \sigma = \operatorname{spr} L(v) = \varphi(v)$, т.е. имеет место (25).

В том случае, когда вектор k имеет нулевые компоненты, выпишем номера $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$ всех его положительных компонент $k_{i_1} > 0, \dots, k_{i_s} > 0$. Рассмотрим подматрицу $\hat{L}$, стоящую на пересечении строк и столбцов с номерами $i_1, \dots, i_s$ матрицы L , и вектор $\hat{k}$ с компонентами $k_{i_1}, \dots, k_{i_s}$. Ясно, что $\hat{L}(v)\hat{k} = \sigma \hat{k}$ и $\hat{k} > 0$. По уже доказанному $\operatorname{spr} \hat{L}(u) > \operatorname{spr} \hat{L}(v)$, и так как $\operatorname{spr} L(u) \geq \operatorname{spr} \hat{L}(u)$ и $\operatorname{spr} \hat{L}(v) = \operatorname{spr} L(v)$, то $\varphi(u) = \operatorname{spr} L(u) > \operatorname{spr} L(v) = \varphi(v)$, чем и завершается доказательство свойства (25).

Из леммы 2 вытекает, что уравнение (23) имеет единственное положительное решение, которое мы обозначим $\varkappa_0$. Поэтому если для некоторого $\varkappa > 0$ выполнено

$$\varphi(\varkappa) \equiv \operatorname{spr} \left(\frac{L_0}{\varkappa^p} + \frac{L_1}{\varkappa^{p-1}} + \dots + \frac{L_{p-1}}{\varkappa} \right) \geq 1, \quad (26)$$

то $\varkappa \leq \varkappa_0$.

ТЕОРЕМА 2. Для периода ω периодического нестационарного решения $x(t)$ системы (17), правые части которой удовлетворяют условию Липшица (18) с неотрицательными $(t \times t)$ -матрицами $L_0, L_1, \dots, L_{p-1}$, спектральный радиус суммы которых положителен, справедлива оценка снизу

$$\omega \geq \frac{2\pi}{\kappa_0}, \quad (27)$$

где κ_0 – единственный положительный корень уравнения (23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем от системы m векторных уравнений p -го порядка (17) к системе mp векторных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^{(1)}, \quad \dot{x}_2 = x_2^{(1)}, \quad \dots, \quad \dot{x}_m = x_m^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_1^{(p-2)} &= x_1^{(p-1)}, \quad x_2^{(p-2)} = x_2^{(p-1)}, \quad \dots, \quad x_m^{(p-2)} = x_m^{(p-1)}, \\ x_1^{(p-1)} &= g_1(x_1, \dots, x_m, x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}, \dots, x_1^{(p-1)}, \dots, x_m^{(p-1)}), \\ &\dots\dots\dots \\ x_m^{(p-1)} &= g_m(x_1, \dots, x_m, x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}, \dots, x_1^{(p-1)}, \dots, x_m^{(p-1)}). \end{aligned} \quad (28)$$

Мы видим, что в силу (18) она удовлетворяет условию Липшица типа (3) с блочной матрицей

$$L \equiv \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ L_0 & L_1 & L_2 & \dots & L_{p-1} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где I есть единичная $(m \times m)$ -матрица.

Покажем, что для неотрицательной $(mp \times mp)$ -матрицы L справедлива формула

$$\text{spr } L = \kappa_0, \quad (30)$$

где κ_0 , напомним, есть единственный положительный корень уравнения (23). Итак, $\kappa_0 > 0$ и

$$\text{spr} \left(\frac{L_0}{\kappa_0^p} + \frac{L_1}{\kappa_0^{p-1}} + \dots + \frac{L_{p-1}}{\kappa_0} \right) = 1.$$

Обозначим через $h^{(0)}$ соответствующий неотрицательный собственный вектор матрицы $L(\kappa_0)$:

$$\left(\frac{L_0}{\kappa_0^p} + \frac{L_1}{\kappa_0^{p-1}} + \dots + \frac{L_{p-1}}{\kappa_0} \right) h^{(0)} = h^{(0)}. \quad (31)$$

Тогда, полагая

$$h^{(1)} = \kappa_0 h^{(0)}, \quad h^{(2)} = \kappa_0^2 h^{(0)}, \quad \dots, \quad h^{(p-1)} = \kappa_0^{p-1} h^{(0)},$$

в силу (31) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(1)} &= \kappa_0 \mathbf{h}^{(0)}, \quad \mathbf{h}^{(2)} = \kappa_0 \mathbf{h}^{(1)}, \quad \dots, \quad \mathbf{h}^{(p-1)} = \kappa_0 \mathbf{h}^{(p-2)}, \\ \mathbf{L}_0 \mathbf{h}^{(0)} + \mathbf{L}_1 \mathbf{h}^{(1)} + \dots + \mathbf{L}_{p-1} \mathbf{h}^{(p-1)} &= \kappa_0 \mathbf{h}^{(p-1)}, \end{aligned}$$

что коротко может быть записано в виде $\mathbf{L}\mathbf{h} = \kappa_0 \mathbf{h}$, где $\mathbf{h} = \text{col}(\mathbf{h}^{(0)}, \mathbf{h}^{(1)}, \dots, \mathbf{h}^{(p-1)})$ (см. (29)). Так как $\mathbf{h}$ – ненулевой неотрицательный вектор, то из $\mathbf{L}\mathbf{h} = \kappa_0 \mathbf{h}$ в силу леммы 1 имеем $\text{spr } \mathbf{L} \geq \kappa_0$.

Итак, спектральный радиус ρ матрицы $\mathbf{L}$ положителен, и для доказательства формулы (30) нам осталось показать, что $\rho \leq \kappa_0$. Пусть $\mathbf{h}$ – перронов собственный вектор матрицы $\mathbf{L}$: $\mathbf{L}\mathbf{h} = \rho \mathbf{h}$ и $0 \neq \mathbf{h} \geq 0$. Тогда, полагая $\mathbf{h} = \text{col}(\mathbf{h}^{(0)}, \mathbf{h}^{(1)}, \dots, \mathbf{h}^{(p-1)})$, согласно (29) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(1)} &= \rho \mathbf{h}^{(0)}, \quad \mathbf{h}^{(2)} = \rho \mathbf{h}^{(1)}, \quad \dots, \quad \mathbf{h}^{(p-1)} = \rho \mathbf{h}^{(p-2)}, \\ \mathbf{L}_0 \mathbf{h}^{(0)} + \mathbf{L}_1 \mathbf{h}^{(1)} + \dots + \mathbf{L}_{p-1} \mathbf{h}^{(p-1)} &= \rho \mathbf{h}^{(p-1)}, \end{aligned}$$

отсюда находим

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(1)} &= \rho \mathbf{h}^{(0)}, \quad \mathbf{h}^{(2)} = \rho^2 \mathbf{h}^{(0)}, \quad \dots, \quad \mathbf{h}^{(p-1)} = \rho^{p-1} \mathbf{h}^{(0)}, \\ (\mathbf{L}_0 + \rho \mathbf{L}_1 + \dots + \rho^{p-1} \mathbf{L}_{p-1}) \mathbf{h}^{(0)} &= \rho^p \mathbf{h}^{(0)} \end{aligned}$$

и потому

$$\left(\frac{\mathbf{L}_0}{\rho^p} + \frac{\mathbf{L}_1}{\rho^{p-1}} + \dots + \frac{\mathbf{L}_{p-1}}{\rho} \right) \mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{h}^{(0)}. \quad (32)$$

Вектор $\mathbf{h}^{(0)}$ – ненулевой неотрицательный вектор, причем $\mathbf{L}(\rho) \mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{h}^{(0)}$ согласно (32). По лемме 1 получаем $\varphi(\rho) \equiv \text{spr } \mathbf{L}(\rho) \geq 1$, т.е. имеет место неравенство (26) и, значит, $(0 <) \rho \leq \kappa_0$. Формула (30) полностью доказана.

Наш успех, возможно, объясняется тем, что

$$\det(\lambda \mathbf{J} - \mathbf{L}) \equiv \det(\lambda^p \mathbf{I} - (\mathbf{L}_0 + \lambda \mathbf{L}_1 + \dots + \lambda^{p-1} \mathbf{L}_{p-1})),$$

где $\mathbf{J}$ – единичная $(mp \times mp)$ -матрица (а $\mathbf{I}$ – единичная $(m \times m)$ -матрица). Мы видим, что матрица $\mathbf{L}$ представляет собой блочный вариант *сопрядающей матрицы Фробениуса* для матричного многочлена $\lambda^p \mathbf{I} - (\mathbf{L}_0 + \lambda \mathbf{L}_1 + \dots + \lambda^{p-1} \mathbf{L}_{p-1})$.

Пусть $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$ – периодическое с периодом ω нестационарное решение системы (17). Тогда $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t), \dot{\mathbf{x}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{x}}_m(t), \dots, \mathbf{x}_1^{(p-1)}(t), \dots, \mathbf{x}_m^{(p-1)}(t)$ есть периодическое с периодом ω нестационарное решение системы (28). По теореме 1 имеет место оценка $\omega \geq 2\pi / \text{spr } \mathbf{L}$, где $\mathbf{L}$ – это матрица (29). Согласно формуле (30) из последнего неравенства приходим к оценке (27).

Вопрос о точности оценки (27) и свойствах экстремальных решений можно изучать так же, как это сделано при $p = 1$. Экстремальное решение по-прежнему имеет вид (15),

но свойства (16) могут отсутствовать (если, например, в системе (17) встречаются производные только четного или только нечетного порядка).

Отметим только, что векторная функция $x(t) = \exp(i\kappa_0 t)h^{(0)}$, где $L(\kappa_0)h^{(0)} = h^{(0)}$, является экстремальным решением системы (21), коротко записанной в виде

$$x^{(p)} = A_0 x + A_1 \dot{x} + \dots + A_{p-1} x^{(p-1)},$$

где

$$A_0 = i^p L_0, \quad A_1 = i^{p-1} L_1, \quad \dots, \quad A_{p-1} = i L_{p-1}.$$

Так как

$$|A_0| = L_0, \quad |A_1| = L_1, \quad \dots, \quad |A_{p-1}| = L_{p-1},$$

то условие Липшица (22) выполнено очевидным образом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [2] Jorke J. A. Periods of periodic solutions and the Lipschitz constants // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 22. P. 509–512.
- [3] Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985.
- [4] Крюков Б. И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. М.: Машиностроение, 1984.
- [5] Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Поля Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

Воронежский государственный университет
E-mail: perov@nosc.vsu.ru

Поступило
04.02.2000