Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Реповш, П. В. Семенов, О связи между невыпуклостью множества и невыпуклостью его ε -окрестностей, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 246–259

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:41:56

УДК 517

О СВЯЗИ МЕЖДУ НЕВЫПУКЛОСТЬЮ МНОЖЕСТВА И НЕВЫПУКЛОСТЬЮ ЕГО ε -ОКРЕСТНОСТЕЙ

Д. Реповш, П. В. Семёнов

С каждым замкнутым подмножеством P банахова пространства ассоциируется некоторая числовая функция α_P , характеризующая невыпуклость этого множества. Неравенства типа $\alpha_P(\cdot) < 1$ обеспечивают хорошие топологические свойства множества P : стягиваемость, экстензорность и т.п. В заметке построены примеры множеств, у которых функции невыпуклости сколь угодно тесных окрестностей существенно отличаются от функции невыпуклости самого множества. С другой стороны, доказано, что в равномерно выпуклых банаховых пространствах условия типа “функция невыпуклости меньше единицы” устойчивы относительно взятия ε -окрестностей множеств.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Пусть P – непустое замкнутое подмножество нормированного пространства B , и пусть открытый шар D радиуса r пересекает P . Число

$$\delta(P, D) = \sup \left\{ \frac{\text{dist}(q, P)}{r} \mid q \in \text{conv}(P \cap D) \right\}$$

естественно оценивает относительную невыпуклость пересечения множества P с шаром D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. (а) *Функция невыпуклости* $\alpha_P(\cdot)$ ставит в соответствие каждому числу $r > 0$ супремум множества всех чисел $\delta(P, D)$ по всем открытым шарам D радиуса r .

(б) Множество P назовем *α -паравыпуклым*, если его функция невыпуклости поточечно на $(0, \infty)$ не превосходит функции α .

(в) Множество P назовем *α -паравыпуклым с фиксированной точностью $\delta > 0$* , если его функция невыпуклости поточечно на (δ, ∞) не превосходит функции α .

В случае постоянства функции α определение 1.1(б) совпадает с определением паравыпуклости, предложенным Майклом в [1]. Ясно, что 0-паравыпуклость эквивалентна выпуклости. Функциональная паравыпуклость была рассмотрена в [2], а функции невыпуклости явно были введены в [3]. Возможны различные варианты в определении 1.1(а),

Работа первого автора выполнена при поддержке Министерства науки и техники Республики Словения, грант № J1-0885-0101-98, работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00009 и № 99-01-00235.

полезные в той или иной конкретной ситуации. Если вместо открытых шаров рассматривать замкнутые, то получится определение *замкнутой функции невыпуклости*. Если рассматривать не все точки $q \in \text{conv}(P \cap D)$, а только чебышевские центры (чебышевский центр в случае равномерной выпуклости нормы в B) выпуклого ограниченного множества $\text{conv}(P \cap D)$, то получится определение *центральной функции невыпуклости*. Или же, для каждого конечного подмножества $K \subset P$ чебышевского радиуса r естественно рассмотреть число

$$\delta_*(P, K) = \sup \left\{ \frac{\text{dist}(q, P)}{r} \mid q \in \text{conv } K \right\}$$

и определить *внутреннюю функцию невыпуклости* множества P , которая числу r ставит в соответствие супремум множества всех чисел $\delta_*(P, K)$ по всем конечным $K \subset P$ чебышевского радиуса r . Между различными функциями невыпуклости имеются определенные соотношения: если α_P^{in} – внутренняя функция невыпуклости множества P , а α_P^{cl} – его замкнутая функция невыпуклости, то для всех $r > 0$ выполнены неравенства

$$\alpha_P(r) \leq \alpha_P^{\text{in}}(r) \leq \alpha_P^{\text{cl}}(r) = \alpha_P(r + 0).$$

В частности, функции невыпуклости имеют пределы справа (и, на самом деле, непрерывны слева).

Контроль за невыпуклостью множества на самом деле состоит в контроле за некоторым итеративным поведением функции невыпуклости этого множества. Для последнего с каждой функцией $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ассоциируем “геометрическую со знаменателем α ” прогрессию:

$$q_\alpha^0(t) = t, \quad q_\alpha^1(t) = \alpha(t) \cdot t, \quad q_\alpha^{n+1}(t) = \alpha(q_\alpha^n(t)) \cdot q_\alpha^n(t).$$

При этом функция α доопределяется в нуле: $\alpha(0) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. (а) Функция $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ называется *геометрически суммируемой*, если функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q_\alpha^n(\cdot)$ поточечно всюду сходится.

(б) Функция α *меньше единицы слева*, если она имеет строгую геометрически суммируемую мажоранту; обозначение: $\alpha < 1_{-0}$.

Нетрудно видеть [2], что если все верхние правые пределы функции $\alpha: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ меньше единицы на полуоси $[0, \infty)$, то $\alpha < 1_{-0}$.

Проблема контролируемого отказа от выпуклости в селекционных теоремах для многозначных отображений допускает следующее решение (стандартные сведения о теории многозначных отображений см. [4]–[8]).

ТЕОРЕМА 1.3 [3], [9]. Пусть $F: X \rightarrow 2^Y$ – полунепрерывное снизу замкнутозначное отображение паракомпакта X в банахово пространство Y , и пусть

$$\sup \{ \alpha_{F(x)} \mid x \in X \} < 1_{-0}.$$

Тогда F имеет непрерывную однозначную селекцию.

Поэтому если функция невыпуклости некоторого множества меньше единицы слева, то с топологической точки зрения это множество устроено идеально: оно есть абсолютный экстензор (и локальный абсолютный экстензор) для класса паракомпактных пространств. В частности, оно стягиваемо и локально стягиваемо.

В настоящей работе исследуется устойчивость такого рода свойств множеств относительно взятия их метрических окрестностей. Более конкретно вопрос звучит так. Пусть функция невыпуклости некоторого множества P меньше единицы слева. Верно ли тогда, что и функции невыпуклости ε -окрестностей этого множества также меньше единицы слева?

В работе построен пример (см. теорему 2.1), показывающий, что ответ на такой вопрос, вообще говоря, отрицателен: уже в четырехмерном банаховом пространстве оказывается возможной ситуация, когда паравыпуклое множество имеет сколь угодно тесные не паравыпуклые ε -окрестности. С другой стороны (см. теорему 2.3), в банаховых пространствах с достаточно гладкой единичной сферой ответ все же положителен. С третьей стороны (см. предложение 2.4), даже в евклидовой плоскости функции невыпуклости ε -окрестностей некоторой кривой могут не сходить к функции невыпуклости самого множества при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. невыпуклость сколь угодно тесных окрестностей такой кривой может существенно отличаться от невыпуклости самого множества (хотя и быть при этом строго меньше единицы).

2. Формулировки результатов.

ТЕОРЕМА 2.1. *В четырехмерном банаховом пространстве $Y = l_\infty^3 \oplus_2 \mathbb{R}$ с нормой*

$$\|(x, y, z, t)\| = \sqrt{(\max\{|x|, |y|, |z|\})^2 + t^2}$$

существует одномерное q -паравыпуклое подмножество P , $0 \leq q < 1$, и существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такая, что у замкнутых ε_n -окрестностей $\overline{D}(P, \varepsilon_n) = P_n$ множества P функции невыпуклости α_{P_n} тождественно равны единице на некоторых интервалах $(0, \tau_n) \subset (0, \infty)$.

Подчеркнем, что равенство единице есть максимально “плохой” возможный случай для функций невыпуклости. Доказательство теоремы 2.1, грубо говоря, основано на том факте, что в банаховом пространстве $Y = l_\infty^3 \oplus_2 \mathbb{R}$ имеется большой запас троек точек, которые не лежат на одной прямой и для которых верно равенство треугольника. Основные технические детали собраны в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *В банаховом пространстве $Y = l_\infty^3 \oplus_2 \mathbb{R}$ найдется прямая $l \subset l_\infty^3$ со следующим свойством: для любых положительных R и ε в плоскости $\Pi = l \oplus_2 \mathbb{R}$ существует q -паравыпуклый ($0 \leq q < 1$) график $A \subset \Pi$ некоторой непрерывной функции $f: l \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что у его замкнутой ε -окрестности A_ε функция невыпуклости α_{A_ε} равна единице в точке R . Более того, q можно считать монотонно возрастающей функцией отношения R/ε (рис. 1).*

В банаховых пространствах с “хорошей” нормой таких геометрически непонятных примеров не существует.

Рис. 1

ТЕОРЕМА 2.3. Для любого равномерно выпуклого банахова пространства Y , любой функции $\alpha(\cdot) < 1_{-0}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\beta(\cdot) < 1_{-0}$ такая, что у любого α -паравыпуклого множества P его замкнутая ε -окрестность $\overline{D}(P, \varepsilon)$ является β -паравыпуклым множеством.

Следующее предложение занимает промежуточное между теоремами 2.1 и 2.3 положение. С одной стороны, оно находится в области применимости теоремы 2.3. С другой стороны, оно показывает, что даже на евклидовой плоскости функция $\beta = \beta(\alpha, \varepsilon)$ из теоремы 2.3 может поточечно не стремиться к функции α при $\varepsilon \rightarrow 0$. В то же время, ситуация из теоремы 2.1 с равенством $\beta(\cdot) = 1$ в некоторых точках здесь невозможна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Для евклидовой плоскости при любом $0 \leq q < 1$ найдутся число $p \in (q, 1)$, q -паравыпуклый компакт K и последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такие, что окрестности $\overline{D}(K, \varepsilon_n)$ не p -паравыпуклы.

3. Доказательство теоремы 2.1.

Вывод теоремы 2.1 из предложения 2.2. Возьмем произвольно числа $\tau_0 > 0$, $\tau \in (0, \tau_0)$, $R > 0$, $\varepsilon > 0$ так, чтобы $R/\varepsilon = \tau$. По предложению 2.2 построим $q(\tau)$ -паравыпуклое множество $A = A(R, \varepsilon) \subset \Pi = l \oplus_2 \mathbb{R}$, являющееся графиком некоторой функции $f: l \rightarrow \mathbb{R}$. В силу монотонности $q(\cdot)$ относительно частного R/ε множество A будет $q(\tau_0)$ -паравыпукло, $q(\tau_0) = q_0 < 1$, и, в то же время,

$$\alpha_{\overline{D}(A, \varepsilon)}(R) = 1.$$

Теперь фиксируем последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и для каждого ε_n рассмотрим все рациональные числа $R_{n,m} \in (0, \varepsilon_n \cdot \tau_0)$, $m \in \mathbb{N}$. Построим, как выше, множества $A_{n,m} = A(R_{n,m}, \varepsilon_n)$, и в евклидовой плоскости Π вдоль прямой l разместим изометричные копии (параллельные переносы) этих множеств так, чтобы концы дуг $A_{n,m}$ лежали бы на прямой l . При этом разместим это счетное число дуг “страшно далеко” друг от друга, т.е. чтобы расстояния между соседними копиями были бы на порядок больше суммы их диаметров. В промежутках на прямой между соседними копиями проведем отрезки. Получим множество $P \subset \Pi$, являющееся графиком некоторой непрерывной функции.

Докажем, что это множество q -паравыпукло для некоторого $q \in (q_0, 1)$. Используем внутреннюю функцию невыпуклости. Пусть Δ – произвольный симплекс с вершинами

из P . Так как P есть график непрерывной функции, то (см. [3]) можно считать Δ отрезком. Если его концы из различных копий, то это значит, что длина отрезка Δ огромна по сравнению с диаметрами этих копий. Поэтому относительное удаление точек отрезка Δ от множества P оценивается сверху достаточно малым числом. Следовательно, остаются два случая: либо концы отрезка Δ лежат ровно в одном множестве $A_{n,m}$, либо один конец лежит в $A_{n,m}$, а другой конец лежит на отрезке, выходящем из конца дуги $A_{n,m}$. В первом случае расстояние от точек отрезка Δ до множества P оценивается в силу q_0 -паравыпуклости дуги $A_{n,m}$. Во втором случае это относительное удаление не превышает $\sqrt{2}/2$ (см. [3]).

Рассмотрим теперь замкнутую ε_n -окрестность $\overline{D}(P, \varepsilon_n) = P_n$ множества P . По построению для каждого рационального $R_{n,m} \in (0, \tau_n)$, $\tau_n = \varepsilon_n \tau_0$, найдется точка $\theta_{n,m}$, являющаяся серединой некоторого отрезка длины $2R_{n,m}$ с концами из P_n и удаленная от P_n на расстояние $R_{n,m}$. Ясно, что минимум расстояний от $\theta_{n,m}$ до прямой l реализуется между концами дуги $A_{n,m}$. Значит, $\alpha_{P_n}(R_{n,m}) = 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$. По непрерывности функций невыпуклости слева получаем, что функция невыпуклости множества P_n тождественно равна единице на интервале $(0, \tau_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.2. Пусть

$$a = (1, 0, 1, 0), \quad b = (0, 1, 1, 0), \quad c = (0, 0, 1, 0),$$

$$x = Ra + \varepsilon b = (R, \varepsilon, R + \varepsilon, 0), \quad y = -Ra - \varepsilon c = (-R, 0, -R - \varepsilon, 0), \quad l = \text{span}\{x, y\}.$$

Тогда

$$\|x\| = R + \varepsilon = \|y\|, \quad \|x - y\| = \|(2R, \varepsilon, 2R + 2\varepsilon, 0)\| = 2R + 2\varepsilon = \|x\| + \|y\|.$$

Для произвольной точки $z(t) = (1-t)x + ty$ отрезка $[x, y]$ ее норма вычисляется явно:

$$\|z(t)\| = \max\{\varepsilon(1-t), (R+\varepsilon)|1-2t|\}.$$

Минимум функции $\|z(t)\|$ достигается в точке $t_0 = (R+2\varepsilon)/(2R+3\varepsilon)$ и равен

$$\|z_0\| = \|z(t_0)\| = \frac{(R+\varepsilon)\varepsilon}{2R+3\varepsilon}.$$

Рассмотрим евклидову плоскость $\Pi = l \oplus_2 \mathbb{R} \subset Y$, и в этой плоскости на отрезке $[x, y]$ рассмотрим график A функции

$$f(z(t)) = \sqrt{(R+\varepsilon)^2 - \|z(t)\|^2}, \quad f: [x, y] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Функция f унимодальна: она возрастает на $[x, z(t_0)]$ и убывает на $[z(t_0), y]$.

Так как концы отрезка $[x, y]$ лежат в A , то точки $\pm Ra$ лежат в замкнутой ε -окрестности $\overline{D}(A, \varepsilon) = A_\varepsilon$ множества A . Значит, начало координат θ лежит в $\text{con}\nu(A_\varepsilon)$. В то же время, все точки множества A_ε по построению удалены от θ именно на расстояние $R+\varepsilon$. Следовательно, $\alpha_{A_\varepsilon}(R) = 1$ и остается проверить паравыпуклость множества A , являющегося графиком непрерывной функции на отрезке.

К сожалению, функция эта не липшицева, а имеется только следующая оценка:

$$\frac{|f(z(t_1)) - f(z(t_2))|}{\|z(t_1) - z(t_2)\|} = \frac{||z(t_2)|| - ||z(t_1)|||}{\|z(t_1) - z(t_2)\|} \cdot \frac{\|z(t_2)\| + \|z(t_1)\|}{f(z(t_1)) + f(z(t_2))} \leq \frac{2(R+\varepsilon)}{f(z(t_1)) + f(z(t_2))}.$$

На концах отрезка последняя дробь обращается в бесконечность. Поэтому здесь напрямую не применима техника работ [2], [3].

ЛЕММА 3.1. Пусть в предыдущих обозначениях

$$t_0 = \frac{R + 2\varepsilon}{2R + 3\varepsilon}, \quad f_0 = f(z(t_0)), \quad p = \frac{f_0}{R + \varepsilon} = \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2R + 3\varepsilon}\right)^2},$$

число λ фиксировано на интервале $(1, p^{-1})$, а число μ фиксировано на интервале $(0, \sqrt{\lambda^2 - 1}/(p\lambda))$. Тогда график функции f , т.е. множество A , является q -паравыпуклым множеством, где

$$q = \max\{p\lambda, \sin(\arctg(L'))\}, \quad L' = \operatorname{tg} \frac{\arctg(L) + \pi/2}{2}, \quad L = \frac{1}{p\mu}$$

(см. рис. 2).

Рис. 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем горизонталь на высоте μf_0 . Имеются ровно две точки $z_1 < z_2$ на отрезке $[x, y]$, в которых функция f принимает значение μf_0 . Найдём разность $\|z_2 - z_1\|$. Имеем

$$\begin{aligned} f(z_i) &= (R + \varepsilon) \sqrt{1 - (1 - 2t_i)^2} = \mu f_0 = \mu(R + \varepsilon)p, \\ (1 - 2t_i)^2 &= 1 - \mu^2 p^2, \quad |t_2 - t_1| = \sqrt{1 - \mu^2 p^2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \|z_2 - z_1\| &= \|(1 - t_2)x + t_2y - (1 - t_1)x - t_1y\| = |t_2 - t_1| \cdot \|x - y\| \\ &= |t_2 - t_1| \cdot 2(R + \varepsilon) = 2\sqrt{1 - \mu^2 p^2}(R + \varepsilon). \end{aligned}$$

Для оценки паравыпуклости графика любой непрерывной функции достаточно рассматривать только *отрезки* с концами на графике [3]. Более того, достаточно получить верхнюю оценку для удаления только *середин* этих отрезков от графика функции. Действительно, тогда для точек отрезка, близких к середине, оценка будет почти такой же, а точки отрезка, заметно отличающиеся от середины, будут достаточно близки к концам

отрезка, лежащим на графике. Используем также следующее простое геометрическое наблюдение [3]. Если концы отрезка длины $2r$ лежат на графике липшицевой с константой K функции, то середина этого отрезка удалена от графика функции не более, чем на $\sin(\arctg(K)) \cdot r$.

Вернемся к нашей функции $f: [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$. Возьмем любой отрезок с концами на графике этой функции. Если спроектировать такой отрезок на “горизонтальную” ось $\text{span}\{x, y\}$, то возможны ровно три ситуации:

- а) левый конец попал в $[x, z_1]$, а правый – в $[z_2, y]$;
- б) правый конец попал в $[x, z_2]$;
- в) левый конец попал в $[z_1, y]$.

Случай а). Длина отрезка здесь не меньше $\|z_2 - z_1\|$, а расстояние от точек отрезка до графика функции не больше f_0 . Значит, относительное удаление середины этого отрезка от графика функции f данным случае оценивается сверху отношением

$$\frac{2f_0}{\|z_2 - z_1\|} = \frac{p}{\sqrt{1 - \mu^2 p^2}} < \lambda p,$$

где последнее неравенство обеспечено выбором $\mu \in (0, \sqrt{\lambda^2 - 1}/(p\lambda))$.

Случай б). Заметим сначала, что для ограничения на отрезок $[z_1, z_2]$ липшицевость функции f уже оценена выше: для любых t'_1 и t'_2 из отрезка $[t_1, t_1]$ верно неравенство

$$\frac{|f(z(t'_1)) - f(z(t'_2))|}{\|z(t'_1) - z(t'_2)\|} \leq \frac{2(R + \varepsilon)}{f(z(t'_1)) + f(z(t'_2))} \leq \frac{2(R + \varepsilon)}{f(z_1) + f(z_2)} = \frac{R + \varepsilon}{\mu f_0} = \frac{1}{\mu p} = L.$$

Для любой точки M графика с горизонтальной проекцией, лежащей на $[x, z_2]$, построим сначала следующий угол с вершиной в этой точке, смотрящий влево. Одна сторона – это вертикаль, направленная вниз. Другая сторона – это луч с отрицательным тангенсом угла наклона, по величине равным $\arctg(L)$. Угол этот, разумеется, меньше развернутого. Утверждается, что весь график функции f левее точки M лежит в построенном угле, величина которого равна

$$\frac{\pi}{2} + \arctg(L) = 2(\arctg(L) + \gamma), \quad \gamma = \frac{\pi/2 - \arctg(L)}{2}.$$

Для точек графика, у которых горизонтальная проекция больше z_1 , это верно согласно случаю а). Для точек графика на отрезке $[x, z_1]$ это верно, так как на этом отрезке функция f возрастает и левее любой своей точки график лежит в третьей координатной четверти.

Правее точки M график функции f (до точки z_2) лежит в угле величины $2 \arctg(L)$ с вершиной в M и горизонтальной биссектриссой. Значит, он тем более попадет в угол, смотрящий вправо, у которого одна сторона – вертикаль, направленная вверх, а другая сторона есть продолжение наклонной стороны построенного выше, смотрящего влево угла. Другими словами, построены два симметричных относительно точки M угла, каждый из которых равен $2(\arctg(L) + \gamma)$ и в объединении которых содержится график функции f на отрезке $[x, z_2]$.

В итоге, если повернуть систему координат против часовой стрелки на угол γ , то в новой системе координат нужный нам участок графика функции f будет графиком липшицевой функции с константой

$$L' = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(L) + \gamma) = \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg}(L) + \pi/2}{2}.$$

Значит, относительное удаление середины любого отрезка с концами на графике функции f на отрезке $[x, z_2]$ оценивается сверху числом $\sin(\operatorname{arctg}(L'))$.

Случай в) рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству предложения 2.2. Остается явно выразить индекс паравыпуклости q множества A через $R, \varepsilon, \tau = R/\varepsilon$. Итак, по определению

$$p = \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2R + 3\varepsilon}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\tau + 3}\right)^2}.$$

Значит, $p = p(\tau)$ монотонно возрастает от $p(0) = 2\sqrt{2}/3$ до $p(\infty) = 1$. Далее, в соответствии с леммой 3.1 функцию $\lambda = \lambda(\tau)$ можно считать равной $(p + 1)/(2p)$, а функцию $\mu = \mu(\tau)$ можно считать равной $\sqrt{\lambda^2 - 1}/(2p\lambda)$. Тогда и λ , и μ монотонно убывают, а

$$L = \frac{1}{\mu p}, \quad L' = \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg}(L) + \pi/2}{2} \quad \text{и} \quad \lambda p = \frac{p + 1}{2}$$

монотонно возрастают. Следовательно, и верхнюю оценку

$$q(\tau) = q = \max\{\lambda p, \sin(\operatorname{arctg}(L'))\}$$

функции невыпуклости множества A можно считать монотонно возрастающей относительно переменной $\tau = R/\varepsilon$. Предложение 2.2 и теорема 2.1 доказаны.

4. Доказательства теоремы 2.3 и предложения 2.4. Для дальнейшего требуется следующая лемма, доказанная в [9] для случая гильбертова пространства. Грубо говоря, она утверждает, что “высоты” треугольника малы, если одна из его сторон почти равна сумме двух других сторон. Напомним, что равномерная выпуклость банахова пространства Y означает положительность модуля выпуклости единичной сферы этого пространства:

$$0 < \delta(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon \in (0, 2].$$

Рис. 3

ЛЕММА 4.1. Пусть $(Y, \|\cdot\|)$ – равномерно выпуклое банахово пространство, и пусть $\lambda > 0$. Тогда существует непрерывная функция $\sigma_\lambda: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ такая, что из $\|x - y\| = a$, $\|y - z\| = b$, $\|x - z\| \geq \sigma_\lambda(a, b) \cdot a + b$ следует неравенство $\text{dist}(z, \text{span}\{x, y\}) \leq \lambda b$ (см. рис. 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n_y и n_z – единичные векторы, сонаправленные с $y - x$ и с $z - y$ соответственно. Тогда

$$y = x + an_y, \quad z = y + bn_z = x + an_y + bn_z.$$

На прямой, проходящей через x и y , возьмем точку $u = tx + (1 - t)y$ с $t = -b/a$ и найдем расстояние между z и u . Имеем

$$\begin{aligned} \|z - u\| &= \|tz + (1 - t)z - tx - (1 - t)y\| = \|t(z - x) + (1 - t)(z - y)\| \\ &= \|t(an_y + bn_z) + (1 - t)bn_z\| = b\|n_y - n_z\|. \end{aligned}$$

Значит, $\text{dist}(z, \text{span}\{x, y\}) \leq b\|n_y - n_z\|$. Остается добиться того, чтобы $\|n_y - n_z\| \leq \lambda$ или $\delta(\|n_y - n_z\|) \leq \delta(\lambda)$, где функция $\delta(\cdot)$ есть модуль выпуклости единичной сферы пространства Y .

Рассмотрим сначала случай $a \geq b$. Решающий технический момент (добавление и вычитание bn_y) указал авторам В. М. Кадец, которому мы выражаем признательность. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(a, b)a + b &\leq \|z - x\| = \|an_y + bn_z + bn_y - bn_y\| \leq (a - b) + 2\left\|\frac{n_y + n_z}{2}\right\| \\ &\leq (a - b) + 2b(1 - \delta(\|n_y - n_z\|)) = a + b - 2b\delta(\|n_y - n_z\|). \end{aligned}$$

Значит,

$$\delta(\|n_y - n_z\|) \leq \frac{a}{2b}(1 - \sigma_\lambda(a, b)).$$

Поэтому для того чтобы выполнялось неравенство $\delta(\|n_y - n_z\|) \leq \delta(\lambda)$, достаточно добиться того, что

$$\frac{a}{2b}(1 - \sigma_\lambda(a, b)) \leq \delta(\lambda).$$

Другими словами, формула

$$\sigma_\lambda(a, b) = \max \left\{ 0, 1 - \frac{2b}{a} \delta(\lambda) \right\}$$

дает нужный ответ.

Покажем теперь, что для $a < b$ можно положить $\sigma(a, b) = \sigma(a, a)$. Рассмотрим треугольник с вершинами $z, x, y + an_z$. В нем сторона $[x, y + an_z]$ по длине не меньше разности двух других сторон, и поэтому

$$\|y + an_z - x\| \geq \|z - x\| - (b - a)\|n_z\| \geq \sigma(a, b)a + b - b + a = \sigma(a, a)a + a.$$

Значит, к треугольнику с вершинами $x, y, y + an_z$ применим предыдущий случай, и поэтому расстояние от точки $y + an_z$ до прямой $\text{span}\{x, y\}$ не превышает числа $\lambda \cdot a$. Рассматривая гомотеию с коэффициентом b/a и центром y , получаем, что расстояние от точки z до прямой $\text{span}\{x, y\}$ не превышает числа $\lambda \cdot b$.

Отметим, что в силу непрерывности модуля выпуклости построенная функция σ будет непрерывной и по переменной λ .

Равномерная выпуклость банахова пространства гарантирует сохранение многих геометрических свойств, которые имеют место в гильбертовом пространстве. Например, расстояние от фиксированной точки до выпуклого замкнутого множества единственным образом реализуется в некоторой точке этого множества. Или же, ограниченное подмножество равномерно выпуклого банахова пространства имеет единственный чебышевский центр [10]. Нам потребуется еще одно свойство такого рода: если выпуклая оболочка $(n + 1)$ -элементного множества имеет размерность n и если чебышевский центр этой оболочки лежит внутри нее, то все расстояния от чебышевского центра до точек этого множества равны чебышевскому радиусу этого множества.

При доказательстве теоремы 2.3 мы, по-существу, будем оценивать не саму функцию невыпуклости множества, но его внутреннюю центральную функцию невыпуклости. Другими словами, мы будем брать конечные подмножества данного множества, рассматривать их чебышевские центры и оценивать удаление этих центров от самого множества некоторой подходящей числовой функцией от чебышевского радиуса этого конечного множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Пусть P – множество, функция невыпуклости которого α_P мажорируется на луче $(0, \infty)$ функцией $\alpha < 1_{-0}$. Оценим сверху функцию невыпуклости множества $\overline{D}(P, \varepsilon) = Q$ на этом же луче. Фиксируем произвольный открытый шар $D_r = D$ радиуса r , пересекающий множество Q .

Пусть $K = \{y_1, \dots, y_n\} \subset D \cap Q$, и пусть $y \in \text{conv}\{y_1, \dots, y_n\}$. Нам следует оценить сверху расстояние $\text{dist}(y, Q)$. Для этого фиксируем точки $z_i \in P$, ε -близкие к соответствующим точкам y_i . Если какое-то из расстояний $\|y_i - z_i\|$ меньше ε , то на полуинтервале $[y_i, z_i)$ возьмем точку u_i так, чтобы $\|y_i - u_i\| = \varepsilon$.

Рассмотрим ситуацию, когда точка y есть чебышевский центр (единственный в силу равномерной выпуклости единичной сферы пространства Y) многогранника $\text{conv}\{y_1, \dots, y_n\}$. Если размерность многогранника $\text{conv}\{y_1, \dots, y_n\}$ меньше $n - 1$ или если y

лежит на границе этого многогранника, то можно перейти к меньшему числу точек и проводить рассуждение по индукции. Поэтому достаточно рассматривать случай, когда все расстояния $\|y - u_i\|$ равны одному и тому же числу – чебышевскому радиусу r этого многогранника.

Итак, у нас фиксированы функция $\alpha < 1_{-0}$ и положительные числа r и ε . Положим $\lambda = 1 - \alpha(r + \varepsilon) \in (0, 1]$ и рассмотрим функцию $\sigma_\lambda(\cdot, \cdot)$, построенную в лемме 4.1. Возможны в точности следующие три случая:

- а) $\sigma(r, \varepsilon)r + \varepsilon < r$ и для некоторого i верно неравенство $\|y - u_i\| < \sigma(r, \varepsilon)r + \varepsilon$;
- б) $r \leq \sigma(r, \varepsilon)r + \varepsilon$ и для некоторого i верно неравенство $\|y - u_i\| < \sigma(r, \varepsilon)r + \varepsilon$;
- в) для всех точек u_i верно неравенство $\|y - u_i\| \geq \sigma(r, \varepsilon)r + \varepsilon$.

В случае а) в треугольнике $\Delta y u_i u_i$ одна из сторон с вершиной y равна r , а другая меньше. Тогда в силу равномерной выпуклости получаем, что $\text{dist}(y, P) \leq \|y - z_i\| < r$ и, значит, $\text{dist}(y, Q)$ равно нулю при $r \leq \varepsilon$ и меньше $r - \varepsilon$ при $r > \varepsilon$. В итоге в этом случае получаем, что

$$\frac{\text{dist}(y, Q)}{r} \leq \max\left\{0, 1 - \frac{\varepsilon}{r}\right\}.$$

В случае б) рассмотрение того же треугольника дает оценку

$$\text{dist}(y, P) \leq \|y - z_i\| < \sigma(r, \varepsilon)r + \varepsilon,$$

откуда следует

$$\frac{\text{dist}(y, Q)}{r} < \sigma(r, \varepsilon).$$

В случае в) к каждому из треугольников $\Delta y u_i u_i$ применима лемма 4.1 с $\lambda = 1 - \alpha(r + \varepsilon) \in (0, 1]$. Тогда точки u_i и, тем более, точки z_i будут $(\lambda\varepsilon)$ -близки к прямым, проходящим через точки y и u_i , и при этом точки y'_i , реализующие такое удаление, будут концами отрезков $[y, y'_i]$, содержащих точки u_i . Значит, точка y лежит в выпуклой оболочке $\text{conv}\{y'_1, y'_2, \dots, y'_n\}$ точек, каждая из которых $(\lambda\varepsilon)$ -близка ко множеству P .

Следовательно, точка y будет $(\lambda\varepsilon)$ -близка к некоторой точке z многогранника $\text{conv}\{z_1, \dots, z_n\}$. Но для таких точек по условию имеется следующая оценка для удаления от множества P :

$$\text{dist}(z, P) \leq \alpha_P(r + \varepsilon) \cdot (r + \varepsilon) < \alpha(r + \varepsilon) \cdot (r + \varepsilon).$$

Значит,

$$\text{dist}(y, P) < \lambda\varepsilon + \alpha(r + \varepsilon) \cdot (r + \varepsilon) = (1 - \alpha)(r + \varepsilon) \cdot \varepsilon + \alpha(r + \varepsilon) \cdot (r + \varepsilon) = \varepsilon + \alpha(r + \varepsilon) \cdot r$$

в силу выбора параметра λ . Следовательно, $\text{dist}(y, Q)/r < \alpha(r + \varepsilon)$. В итоге, имеем

$$\frac{\text{dist}(y, Q)}{r} < \max\left\{\alpha(r + \varepsilon), \sigma_\lambda(r, \varepsilon), 1 - \frac{\varepsilon}{r}, 0\right\}.$$

Правая часть последнего неравенства и дает ответ для искомой верхней оценки $\beta(\cdot) < 1_{-0}$ центральной функции невыпуклости множества Q . Тогда по лемме 14 из [9] и для обычной функции невыпуклости этого множества имеется некоторая геометрически суммируемая мажоранта, зависящая только от найденной мажоранты $\beta(\cdot)$ и от модуля равномерной выпуклости пространства Y . Теорема 2.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.4. Для фиксированного $0 \leq q < 1$ определим число $p \in (q, 1)$ как решение следующего уравнения:

$$\frac{\sqrt{1+q^2}-1}{p-q} = 2 \cdot \frac{p-q/\sqrt{1+q^2}}{1-p^2}.$$

Обе части этого уравнения непрерывны относительно переменной $p \in (q, 1)$. При этом при $p = 1$ левая часть конечна, а правая бесконечна, а при $p = q$ — наоборот. Значит, решения этого уравнения в интервале $(q, 1)$ действительно существуют.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ построим точки $C_{\pm} = (\pm R, 0)$, где R равняется произведению числа ε и левой (= правой) части вышеуказанного уравнения. Точки $A_{\pm}$ определим как сдвиги точек $C_{\pm}$ на $\pm \varepsilon q / \sqrt{1+q^2}$ по оси OX и поднятие на $1/\sqrt{1+q^2}$ по оси OY , а точки $B_{\pm}$ определим как поднятия точек $A_{\pm}$ по оси OY на $q \cdot x(A_{\pm})$.

Множество K_{ε} определим как ломаную $A_- B_- B_+ A_+$. По построению это множество q -паравыпукло. Кроме того, точки $C_{\pm}$ ε -близки к точкам $A_{\pm}$ и, значит, начало координат θ лежит в $\text{conv}(\overline{D}(K_{\varepsilon}, \varepsilon))$. Ясно, что минимумы расстояний между θ и точками множества K_{ε} достигаются в концах $A_{\pm}$ множества K_{ε} и в точке $B = (B_- + B_+)/2$. Но числа $R > 0$ и $p \in (q, 1)$ подобраны именно так, что

$$\text{dist}(\theta, A_{\pm}) = \text{dist}(\theta, B) = pR + \varepsilon.$$

Значит, $\text{dist}(\theta, \overline{D}(K_{\varepsilon}, \varepsilon)) = pR$ и множество $\overline{D}(K_{\varepsilon}, \varepsilon)$ не p -паравыпукло: значение его (замкнутой) функции невыпуклости в точке R в точности равно p .

Отметим, что для гомотетичной с коэффициентом $\lambda > 0$ копии множества K_{ε} аналогичный эффект будет наблюдаться для значения функции невыпуклости его замкнутой $(\lambda\varepsilon)$ -окрестности в точке λR . Остается взять сходящийся ряд из положительных чисел λ_n , на фиксированной прямой разместить λ_n -гомотетичные копии множества K_{ε} на подходящих расстояниях, добавить отрезки между ними и еще одну предельную точку. Полученный компакт K будет q -паравыпукл, но для каждого $n \in \mathbb{N}$ значение функции невыпуклости замкнутой $(\lambda_n \varepsilon)$ -окрестности этого множества будет равно $p > q$ в точке $\lambda_n R$. Предложение 2.4 доказано.

5. Заключение. Для полунепрерывных сверху многозначных отображений редукция их исследования к случаю однозначных отображений, как правило, производится с помощью (графических) аппроксимаций, а не селекций. Однозначное отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств называется ε -аппроксимацией многозначного отображения $F: X \rightarrow 2^Y$, если график отображения f лежит в $(\varepsilon \times \varepsilon)$ -окрестности графика отображения F . Аппроксимируемость (т.е. наличие ε -аппроксимаций для всех $\varepsilon > 0$) замкнутозначного полунепрерывного сверху отображения компактного абсолютного экстензора (= АЕ) X в себя гарантирует существование неподвижных точек этого отображения [4]–[7]. В случае n -мерного (не обязательно компактного) X аппроксимируемость полунепрерывного сверху компактозначного отображения $F: X \rightarrow Y$ является следствием чисто топологических, так называемых, UV^n -свойств значений $F(x)$: для всякой окрестности U множества $F(x)$ должна существовать его меньшая окрестность V ,

для которой тождественное включение $V \hookrightarrow U$ гомотопически тривиально в размерности n . В самом общем виде это недавно доказали Шепин и Бродский [11], используя идеи работ [12], [13]. Для бесконечномерного *компактного* абсолютного окрестностного экстензора ($=ANE$)-пространства X аппроксимируемость отображения $F: X \rightarrow X$ гарантируется $UV(\infty)$ -свойствами значений этого отображения; этот результат принадлежит Гранасу, Гурневичу, Крижевскому [14]. Обобщение для случая, когда X локально конечномерно полиэдрален, получено Крижевским [15]. Для произвольной бесконечномерной области определения X проблема аппроксимируемости не имеет чисто топологического решения даже для *компактных* X . Дело в том, что аппроксимируемые клеточноподобные сюръекции компактов не повышают лебегову размерность [16], а для просто клеточноподобных сюръекций такое повышение возможно [17]. В то же время, добавление условия *выпуклозначности* отображения F сразу дает решение этой проблемы, даже без условия его компактнозначности – это классическая аппроксимационная теорема фон Неймана–Челлины [6], [7].

Поэтому для нахождения невыпуклозначного аналога аппроксимационной теоремы фон Неймана–Челлины для бесконечномерной области определения естественно и возник вопрос о корреляции между характером невыпуклости множества и его ε -окрестностей. Теорема 2.3 показывает, что окрестности паравыпуклых подмножеств равномерно выпуклых банаховых пространств топологически тривиальны. В частности, такие паравыпуклые множества являются $UV(\infty)$ -подмножествами объемлющего пространства. Как следствие получаем, что всякое полунепрерывное сверху α -паравыпуклозначное отображение метрического пространства в равномерно выпуклое банахово пространство является аппроксимируемым; $\alpha < 1_{-0}$. Мы полагаем, что этот аппроксимационный факт верен для *любого* нормированного пространства.

В заключение, несколько слов о паравыпуклости с наперед заданной точностью (см. определение 1.1(в)). Дело в том, что паравыпуклость не является устойчивым свойством относительно метрики Хаусдорфа в экспоненте банахова пространства. Малые (относительно матрицы Хаусдорфа) шевеления паравыпуклого множества могут быть уже не только не паравыпуклыми, но и быть топологически нетривиальными. В противоположность этому паравыпуклость с фиксированной точностью уже *обладает* такой устойчивостью. Неравенство $\text{Hausd}(P, Q) < \lambda$ ниже означает, что множества P и Q лежат в λ -окрестностях друг друга.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для каждого нормированного пространства Y и любых чисел $q \in [0, 1)$, $\delta > 0$, $p \in (q, 1)$ существует число $\lambda \in (0, \delta)$ такое, что для каждого q -паравыпуклого с точностью δ подмножества $P \subset Y$ из неравенства $\text{Hausd}(P, Q) < \lambda$ следует, что множество Q является p -паравыпуклым с той же точностью δ .*

Наконец отметим, что аналог теоремы 2.3 верен и для паравыпуклости с наперед заданной точностью.

ТЕОРЕМА 5.2. *Для любого равномерно выпуклого банахова пространства Y , любой функции $\alpha(\cdot) < 1_{-0}$ и любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется функция $\beta(\cdot) < 1_{-0}$ такая, что у любого α -паравыпуклого с точностью δ множества P его замкнутая ε -окрестность $\overline{D}(P, \varepsilon)$ является β -паравыпуклым с точностью δ множеством.*

Доказательство теоремы 5.2 повторяет доказательство теоремы 2.3 с небольшой поправкой: всюду следует рассматривать только те конечные подмножества, у которых чебышевский радиус больше данной точности δ .

Авторы признательны рецензенту работы за сделанные им замечания и предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Michael E. Paracompact sets // Scand. Math. 1959. V. 7. P. 372–376.
- [2] Семенов П. В. Функционально паравыпуклые множества // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 74–81.
- [3] Repovš D., Semenov P. V. On functions of nonconvexity for graphs of continuous functions // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 196. P. 1021–1029.
- [4] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Мнозначные отображения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. 1982. Т. 19. С. 127–231.
- [5] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. О новых результатах в теории многозначных отображений. I // Итоги науки и техники. Матем. анализ. 1987. Т. 25. С. 123–197.
- [6] Aubin J.-P., Cellina A. Differential Inclusions. Set-valued Maps and Viability Theory. Grundlehren Math. Wiss. V. 264. Berlin: Springer Verlag, 1984.
- [7] Dugundji J., Granas A. Fixed Point Theory. Vol. I. Monogr. Math. V. 61. Warszawa: PWN, 1982.
- [8] Repovš D., Semenov P. V. Continuous Selections of Multivalued Mappings. Mathematics and its Applications. V. 455. Dordrecht: Kluwer, 1998.
- [9] Семенов П. В. Теоремы о неподвижной точке при контролируемом отказе от выпуклости значений многозначного отображения // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 3. С. 141–160.
- [10] Гаркави А. Л. Теория аппроксимаций в нормированных линейных пространствах // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1967. С. 75–132.
- [11] Щепин Е. В., Бродский Н. Б. Селекции фильтрованных многозначных отображений // Тр. МИАН. 1996. Т. 212. С. 220–240.
- [12] Чернавский А. В., Компанийц В. П. Эквивалентность двух классов отображений сферы // Докл. АН СССР. 1969. Т. 169. № 6. С. 1266–1268.
- [13] Lacher R. Cell-like spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 20. P. 598–602.
- [14] Gorniewicz L., Granas A., Krysiewicz W. On the homotopy method in the fixed point index theory of multivalued mappings of compact absolute neighborhood retracts // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 161. P. 457–473.
- [15] Krysiewicz W. Graph-approximation of set-valued maps on noncompact domains // Topology Appl. 1998. V. 83. P. 1–21.
- [16] Дранишников А. Н., Щепин Е. В. Клеточноподобные отображения. Проблема повышения размерности // УМН. 1986. Т. 41. № 6. С. 49–90.
- [17] Dranishnikov A. N. K -theory of Eilenberg–MacLane spaces and cell-like mapping problem // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 335. P. 91–103.

(Д. Реповш) University of Ljubljana, Slovenia

Поступило

(П. В. Семёнов) Московский государственный педагогический университет

18.03.1999

E-mail: dusan.repovs@fmf.uni-lj.si, pavels@orc.ru

Исправленный вариант

17.11.2000