Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Складов, О бесконечно-конечных неравенствах, связанных с весом Лагерра, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 260–269

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:08:17

УДК 517.518

О БЕСКОНЕЧНО-КОНЕЧНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ, СВЯЗАННЫХ С ВЕСОМ ЛАГЕРРА

В. П. Скляров

Уточняются неравенства Маскара–Рахманова–Саффа для полиномов с экспоненциальным весом.

Библиография: 8 названий.

Первый аналог бесконечно-конечных неравенств для экспоненциального веса был получен в 1971 году Фройдом [1]. В течение двух последних десятилетий эти неравенства были весьма детально изучены. Использование теоретико-потенциального подхода [2]–[5] позволило Маскару, Рахманову, Саффу и многим другим получить такие неравенства с асимптотически точными границами как для равномерной нормы, так и для норм пространств L_p . Ниже будет показано, что возможности “элементарных” приемов в рамках пространства $C[a, b]$ далеко не исчерпаны. Доказанные здесь теоремы 1–4 дают для весов Эрмита и Лагерра границы более точные, чем известные значения Маскара–Рахманова–Саффа [4].

Вначале рассмотрим ситуацию, не связанную с особенностями конкретного веса. Пусть на промежутке $\langle a, b \rangle$, не обязательно конечном, задана непрерывная весовая функция $\rho(x)$ такая, что $\rho(a) = \rho(b) = 0$, а при $x \in \langle a, b \rangle$ $\rho(x) > 0$. Если хотя бы один из концов промежутка, например a , лежит в бесконечности, то дополнительно предполагаем

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n \rho(x) = 0.$$

Здесь и далее натуральное число n произвольно, но фиксировано. Если точки x_i выбраны так, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, то из непрерывности $\rho(x)$ на $\langle a, b \rangle$ будет следовать, что на этом промежутке функция

$$U_n(x) = \rho(x)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

имеет, по крайней мере, $n + 1$ локальных экстремумов. Обозначим их следующим образом:

$$m_i = \sup_{x_i < x < x_{i+1}} |U_n(x)| = |U_n(s_i)|, \quad x_i < s_i < x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01120.

Конечно, значения s_i в случае произвольной весовой функции $\rho(x)$ могут определяться неоднозначно. Везде далее будем считать, что на интервале (x_0, x_1) s_0 – наибольший среди корней уравнения $|U_n(x)| = m_0$, а s_0 – наименьший. Поскольку множество рассматриваемых корней ограничено и замкнуто, то указанные величины существуют. Аналогичным образом обозначаем через s_n наименьший среди корней уравнения $|U_n(x)| = m_n$, а через $\bar{s}_n$ наибольший на (x_n, x_{n+1}) . Используя точки s_i в качестве узлов интерполирования, легко прийти к неравенству

$$\rho(x)|P_n(x)| \leq \Lambda_n(x) \cdot \max_{0 \leq i \leq n} \rho(s_i)|P_n(s_i)|. \quad (2)$$

Здесь $P_n(x)$ – любой алгебраический многочлен степени не выше n , а функция $\Lambda_n(x)$ определяется следующим образом:

$$\Lambda_n(x) = \rho(x) \sum_{i=0}^n \frac{1}{\rho(s_i)} |l_i(x)|, \quad l_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - s_i}{s_k - s_i}. \quad (3)$$

Будем называть ее *взвешенной функцией Лебега интерполяционного процесса ЛAGRANЖА*, или кратко *функцией Лебега*.

Везде далее норма непрерывной на промежутке $\langle a, b \rangle$ функции $F(x)$ определяется равенством

$$\|F\| = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} \rho(x)|F(x)|.$$

Алгебраический многочлен $T_n^*(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, для которого

$$\|T_n^*\| = \inf_{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \|x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0\|,$$

будем называть *наименее уклоняющимся от нуля в ρ -равномерной норме на всем промежутке $\langle a, b \rangle$* , или просто *наименее уклоняющимся от нуля*. Такая краткость в названиях для $\Lambda_n(x)$ и $T_n^*(x)$ не может вызвать затруднений, поскольку здесь они используются только в определенном выше смысле.

В силу известных теорем Чебышева для $T_n^*(x)$ на $\langle a, b \rangle$ найдется набор точек $\{\xi_i\}_{i=1}^{n+1}$ – чебышевский альтернанс – такой, что

$$\rho(\xi_i)|T_n^*(\xi_i)| = \|T_n^*\| \quad \text{и} \quad T_n^*(\xi_i) \cdot T_n^*(\xi_{i+1}) < 0.$$

Пусть $x_1 < x_n$ – крайние нули многочлена $T_n^*(x)$. Для множеств

$$M = \{\xi : \rho(\xi)|T_n^*(\xi)| = \|T_n^*\|\}, \\ M_1 = \{\xi : \xi \in M \text{ и } \xi < x_1\}, \quad M_n = \{\xi : \xi \in M \text{ и } \xi > x_n\}$$

введем обозначения $\underline{\xi} = \inf M$, $\bar{\xi} = \sup M$ и $\xi_* = \sup M_1$, $\xi^* = \inf M_n$.

ТЕОРЕМА 1. Если точки x_i выбраны так, что $m_n = \min_i m_i$, то для любого алгебраического многочлена степени не выше n верно неравенство

$$\sup_{x \in (s_n, b)} \rho(x)|P_n(x)| \leq \max_{0 \leq i \leq n} \rho(s_i)|P_n(s_i)|, \quad (4)$$

при этом все точки чебышевского альтернанса для многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, лежат левее $\bar{s}_n$, т.е. $\bar{\xi} \leq \bar{s}_n$.

ТЕОРЕМА 2. Если точки x_i выбраны так, что $m_0 = \min_i m_i$, то для любого алгебраического многочлена степени не выше n верно неравенство

$$\sup_{x \in (a, s_0)} \rho(x) |P_n(x)| \leq \max_{0 \leq i \leq n} \rho(s_i) |P_n(s_i)|, \quad (5)$$

при этом все точки чебышевского альтернанса для многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, лежат правее $\underline{s}_0$, т.е. $\underline{s}_0 \leq \underline{\xi}$.

Обе теоремы доказываются одинаково, поэтому рассматриваем лишь первую из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Неравенство (4) моментально следует из (2), если известно, что $\Lambda_n(x) \leq 1$ при $x \in (s_n, b)$. Поскольку все нули функции $U_n(x)$ простые, то $U_n(s_i) \cdot U_n(s_{i+1}) < 0$, поэтому при любом $x \in [s_n, b)$ имеем

$$|U_n(x)| = \rho(x) \sum_{i=0}^n |U_n(s_i)| \frac{1}{\rho(s_i)} |l_i(x)|.$$

Учитывая, что в этом случае $|U_n(s_n)| = \min_i |U_n(s_i)|$, отсюда находим

$$|U_n(x)| \geq |U_n(s_n)| \Lambda_n(x) \quad \text{или} \quad \Lambda_n(x) \leq \frac{|U_n(x)|}{|U_n(s_n)|} \leq 1.$$

Если в неравенстве (4) s_n заменить значением, большим $\bar{s}_n$, то оно становится строгим, и ни одна точка чебышевского альтернанса не может оказаться правее $\bar{s}_n$. Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из приведенного выше доказательства нетрудно заметить, что условие $\rho(a) = \rho(b) = 0$ не оказывает влияния на справедливость теорем 1, 2. Его выполнение исключает ситуацию, при которой либо $s_0 = a$, либо $s_n = b$. Очевидно, что в первом случае становится бессодержательным утверждение теоремы 2, а во втором – утверждение теоремы 1. Таким образом, условие $\rho(b) = 0$ гарантирует содержательность утверждения теоремы 1, а условие $\rho(a) = 0$ – теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Если степень алгебраического многочлена не выше n , то верно неравенство

$$\sup_{x \in (a, b) \setminus [\xi_*, \xi^*]} \rho(x) |P_n(x)| \leq \sup_{x \in [\xi_*, \xi^*]} \rho(x) |P_n(x)|, \quad (6)$$

при этом отрезок $[\xi_*, \xi^*]$ является наименьшим среди тех отрезков, для которых неравенство (6) остается справедливым для любого многочлена степени не выше n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (6) есть прямое следствие теорем 1, 2, поэтому остается доказать минимальность отрезка $[\xi_*, \xi^*]$. Пусть x_i – нули многочлена, наименее уклоняющегося от нуля. Тогда в силу теорем о чебышевском альтернансе имеем $m_0 = m_1 = \dots = m_n$ и $s_0 = \xi_*$, а $s_n = \xi^*$. Для произвольного $\delta > 0$ укажем многочлен $P_n(x)$ степени n такой, что

$$\sup_{x \in (a, b) \setminus [\xi_*, \xi^* - \delta]} \rho(x) |P_n(x)| > \sup_{x \in [\xi_*, \xi^* - \delta]} \rho(x) |P_n(x)|. \quad (7)$$

Положим

$$U_n(x, \varepsilon) = \rho(x)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n + \varepsilon).$$

Соответствующие локальные экстремумы обозначим через $m_i(\varepsilon)$, а точки, в которых они достигаются, — через $s_i(\varepsilon)$. Для $i = 0, 1, \dots, n - 1$ имеем

$$\frac{m_i(\varepsilon)}{m_i} \leq \frac{|U_n(s_i(\varepsilon), \varepsilon)|}{|U_n(s_i(\varepsilon))|} = \frac{|s_i(\varepsilon) - x_n + \varepsilon|}{|s_i(\varepsilon) - x_n|} = 1 - \frac{\varepsilon}{|s_i(\varepsilon) - x_n|} < 1,$$

в то же время при $i = n$ легко проверяется, что

$$\frac{m_n(\varepsilon)}{m_n} \geq 1 + \frac{\varepsilon}{s_n - x_n} > 1.$$

Заметим, что точка $s_n(\varepsilon)$ не может оказаться правее s_n , в этом случае мы получили бы противоречие утверждению теоремы 1. Предположение о том, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_n(\varepsilon) \neq s_n,$$

легко приводит к противоречию, связанному с выбором s_n , так как при ε , стремящемся к нулю, $U_n(x, \varepsilon)$ равномерно по x на всем промежутке $\langle a, b \rangle$ стремится к $T_n^*(x)$. Следовательно, при достаточно малом ε будем иметь $\delta > s_n - s_n(\varepsilon)$. Отсюда получаем неравенство (7). Поскольку построенная таким образом функция $|U_n(x, \varepsilon)|$ будет принимать наибольшее на промежутке $\langle a, b \rangle$ значение лишь в точках интервала $(\xi^* - \delta, b)$, то в неравенстве (6) число ξ^* нельзя заменить меньшим. Аналогичным образом решается вопрос о левом конце отрезка $[\xi_*, \xi^*]$. Теорема 3 доказана.

С помощью этой теоремы становится очевидной справедливость следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ. *Неравенство*

$$\sup_{x \in (a, b) \setminus [s, S]} \rho(x)|P_n(x)| \leq \sup_{x \in [s, S]} \rho(x)|P_n(x)| \quad (8)$$

будет выполняться для любого алгебраического полинома степени не выше n тогда и только тогда, когда имеет место включение $[\xi_, \xi^*] \subset [s, S]$.*

Сформулируем две задачи, которые явно или неявно обсуждались в ряде публикаций разных авторов.

ЗАДАЧА 1. Среди отрезков $[s, S]$ таких, что для любого алгебраического многочлена $P_n(x)$ степени $\leq n$ имеет место неравенство (8), найти наименьший отрезок.

ЗАДАЧА 2. Среди отрезков $[s, S]$, обладающих тем свойством, что для всякого алгебраического многочлена $P_n(x)$ степени $\leq n$ из равенства

$$\rho(\xi)|P_n(\xi)| = \|P_n\|$$

следует принадлежность точки ξ отрезку $[s, S]$, найти наименьший отрезок.

Вероятно, первая попытка решения задачи, подобной первой, принадлежит Фройду; что касается второй задачи, то ее решение для различных весов получено Маскаром,

Рахмановым, Саффов. Утверждение теоремы 3 позволяет заметить, что если на каждом из интервалов (a, x_1) и (x_n, b) (здесь x_i те же, что и в доказательстве теоремы 3) лежит ровно по одному корню уравнения

$$\rho(x)|T_n^*(x)| = \|T_n^*\|$$

(а в случае классических весов Лагерра, Эрмита, Якоби дело обстоит именно так), то решения обеих задач совпадают. Если же хотя бы один из упомянутых интервалов содержит более одного корня, то решения задач различны. В первом случае это отрезок $[\xi_*, \xi^*]$, во втором — $[\underline{\xi}, \bar{\xi}]$; очевидно, что при этом $[\xi_*, \xi^*] \subset [\underline{\xi}, \bar{\xi}]$.

ПРИМЕР. Чтобы убедиться в том, что описанная выше ситуация возможна, рассмотрим следующий пример:

$$\langle a, b \rangle = (-\infty, \infty), \quad \rho(x) = w(x)e^{-x^2/2}, \quad n = 1.$$

Здесь $w(x)$ — четная функция, которая на правой половине вещественной оси задана равенством

$$w(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < s - h, \\ 1 + \frac{A-1}{h}(x - s + h), & s - h \leq x < s, \\ 1 + \frac{A-1}{h}(s + h - x), & s \leq x < s + h, \\ 1, & x \geq s + h. \end{cases}$$

Параметры A, h, s — положительные числа. Легко заметить, что независимо от выбора этих величин в этом случае многочленом, наименее уклоняющимся от нуля в ρ -равномерной норме на всей вещественной прямой, будет $T_1^*(x) = x$.

Поскольку функция $xe^{-x^2/2}$ имеет равные по абсолютной величине экстремальные значения в точках ± 1 , то, выбрав s и h так, чтобы одновременно выполнялись неравенства $s > 1, 0 < h < s - 1$, получим, что функция $U_1(x) = |x|\rho(x)$ будет иметь на правой половине вещественной оси ровно две экстремальные точки. Обозначим точку второго экстремума через s_* . Нетрудно заметить, что при $A \geq 1$ возможные значения величины $U_1(s_*)$ заполняют промежуток $[se^{-s^2/2}, \infty)$. Если $s > 1$, то $se^{-s^2/2} < e^{-1/2}$, поэтому, считая параметры s и h фиксированными, можно подобрать значение A так, чтобы $U_1(s_*) = e^{-1/2}$. Следовательно, $U_1(x)$ свое наибольшее на всей вещественной оси значение будет принимать в четырех точках: $\pm 1, \pm s_*$. В этой ситуации ($n = 1$) $x_1 = x_n = 0$, поэтому каждый из интервалов (a, x_1) и (x_n, b) будет содержать ровно по два корня уравнения

$$\rho(x)|T_n^*(x)| = \|T_n^*\|.$$

Приводимое ниже утверждение показывает, что в нашем случае нахождение границ для чебышевского альтернанса всегда может быть сведено к оценке функции Лебега.

ТЕОРЕМА 4. Для того чтобы имело место неравенство $s < \underline{\xi}$, необходимо и достаточно, чтобы нашелся хотя бы один набор точек s_i , для которых

$$\sup_{a < x < s} \Lambda_n(x) < 1. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $s < \xi$. Тогда в силу чебышевских теорем об альтернансе мы можем подобрать $n+1$ точек s_i так, чтобы выполнялось неравенство $T_n^*(s_i) \cdot T_n^*(s_{i+1}) < 0$. Следовательно, на промежутке $(a, s_0]$ будет иметь место равенство

$$|T_n^*(x)| = \rho(x) \sum_{i=0}^n |T_n^*(s_i)| \frac{1}{\rho(s_i)} |l_i(x)|.$$

Поскольку в точках s_i функция $\rho(x)|T_n^*(x)|$ достигает своего наибольшего на промежутке $\langle a, b \rangle$ значения, то получаем для $x \in (a, s_0]$

$$\Lambda_n(x) = \frac{|T_n^*(x)|}{|T_n^*(s_0)|} \leq 1.$$

При x , лежащих левее точки ξ , последнее неравенство становится строгим. В силу непрерывности $\Lambda_n(x)$ верхняя грань в (9) достигается и необходимость доказана.

Достаточность. Чтобы установить достаточность условия (9), можно еще раз воспользоваться доказательством теоремы 1. Это дает справедливость неравенства

$$\sup_{a < x < s} \rho(x)|P_n(x)| < \sup_{s < x < b} \rho(x)|P_n(x)|$$

для любого многочлена степени не выше n . Следовательно, ни одна точка альтернанса не может лежать на интервале (a, s) . Теорема 4 полностью доказана.

Аналогичное утверждение имеет место и для верхней границы чебышевского альтернанса.

Далее рассмотрим два конкретных случая использования доказанных выше теорем.

1. Пусть $a = -\infty, b = \infty, \rho(x) = e^{-x^2/2}$. Воспользуемся известными из [6] свойствами многочленов Эрмита, определяемых равенством

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Положив $U_n(x) = \varphi'_{n-1}(x)$, получим, что точки s_i должны быть нулями функции $\varphi''_{n-1}(x)$, а поскольку $\varphi_{n-1}(x)$ является решением дифференциального уравнения $y'' + (2n-1-x^2)y(x) = 0$, то $s_0 = -s_n = -\sqrt{2n-1}$, а все остальные величины s_i являются корнями уравнения $H_{n-1}(x) = 0$. Из [7] известно, что в этом случае $m_0 = m_n = \min_i m_i$, поэтому, применяя доказанные выше теоремы 1 и 2, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Для любого алгебраического многочлена степени не выше $n \geq 1$ верно неравенство

$$\sup_{|x| \geq \sqrt{2n-1}} e^{-x^2/2} |P_n(x)| \leq \sup_{|x| \leq \sqrt{2n-1}} e^{-x^2/2} |P_n(x)|;$$

следовательно, все точки чебышевского альтернанса для многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, лежат на отрезке $[-\sqrt{2n-1}, \sqrt{2n-1}]$.

Это утверждение было получено ранее в [7] путем непосредственной проверки выполнения условий теоремы 4.

2. Пусть $a = 0$, $b = \infty$, $\rho(x) = x^\alpha e^{-x/2}$, $\alpha \geq 0$. Пусть $\underline{\xi}(n, \alpha) < \bar{\xi}(n, \alpha)$ – крайние точки чебышевского альтернанса многочлена, наименее уклоняющимся от нуля в ρ -равномерной норме на всей полуоси. В 1983 году Маскар и Сафф [4] получили неравенства

$$\frac{\alpha^2}{n + \alpha} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\alpha/(n + \alpha))^2}} \leq \underline{\xi}(n, \alpha) < \bar{\xi}(n, \alpha) \leq 2(n + \alpha) \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{n + \alpha} \right)^2} \right). \quad (10)$$

Обозначим левую и правую части неравенств (10) через $m(n, \alpha)$ и $M(n, \alpha)$ соответственно. Для того чтобы выяснить возможность изменения границ в неравенствах (10), нам потребуется рассмотреть свойства локальных экстремумов следующих функций:

$$\varphi_n(x, \alpha) = x^\alpha e^{-x/2} L_n^{2\alpha-1/2}(x), \quad (11)$$

$$\psi_n(x, \alpha) = x^\alpha e^{-x/2} L_n^{2\alpha-1}(x), \quad (12)$$

$$\theta_n(x, \alpha) = \psi'_{n-1}(x, \alpha + 1). \quad (13)$$

Здесь $L_n^\alpha(x)$ – многочлен Лагерра степени n , определяемый равенством

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}).$$

Используя известные свойства многочленов Лагерра [6]:

$$\begin{aligned} nL_n^\alpha(x) &= (2n + \alpha - 1 - x)L_{n-1}^\alpha(x) - (n + \alpha - 1)L_{n-2}^\alpha(x), \\ [L_n^\alpha(x)]' &= \frac{nL_n^\alpha(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x)}{x}, \end{aligned}$$

легко получаем представление для $\theta_n(x, \alpha)$, не содержащее производной,

$$\theta_n(x, \alpha) = \frac{nL_n^{2\alpha+1}(x) - (n + 2\alpha)L_{n-2}^{2\alpha+1}(x)}{2x} x^{\alpha+1} e^{-x/2}. \quad (14)$$

Известно, что $\varphi_n(x^2, \alpha)$ является решением дифференциального уравнения

$$y''(x) + \left[\lambda_n - x^2 + \frac{2\alpha(1 - 2\alpha)}{x^2} \right] y(x) = 0, \quad \lambda_n = 4n + 4\alpha + 1, \quad (15)$$

а $\psi_n(x, \alpha)$ – уравнения

$$z''(x) + \left[\frac{n + \alpha}{x} + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{x^2} - \frac{1}{4} \right] z(x) = 0. \quad (16)$$

Нетрудно заметить, что каждая из функций, определяемых равенствами (11)–(13), имеет вид $\rho(x)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$. Сохраняя за относительными экстремумами этих функций обозначения m_i (см. (1)), убедимся в справедливости следующих фактов.

ТЕОРЕМА 6. 1) Последовательность m_i для функции $\varphi_n(x, \alpha)$ возрастает, если $0 \leq \alpha \leq 1/2$, а при $\alpha > 1/2$ убывает для экстремумов, лежащих левее точки $\sqrt[4]{\alpha^2 - 1/4}$, и возрастает справа от нее. При этом для всех $\alpha \geq 0$ и натуральных n справедливы неравенства

$$s_0 \geq \frac{[j'_1(\alpha)]^2}{4n + 4\alpha + 1} \quad \text{и} \quad s_n \geq (4n + 4\alpha + 1)(1 - \varepsilon_n(\alpha)).$$

Здесь $j'_1(\alpha)$ – наименьший среди положительных корней уравнения

$$[\sqrt{x} J_{2\alpha-1/2}(x)]' = 0,$$

$J_\alpha(x)$ – функция Бесселя порядка α и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(\alpha) = 0$.

2) При любом $\alpha \geq 0$ для функции $\theta_n(x, \alpha)$ можно указать натуральное число $N_1(\alpha)$ такое, что для всякого $n \geq N_1(\alpha)$ будет верно равенство $m_n = \min_i m_i$; при этом

$$s_n = 2(n + \alpha) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(n + \alpha)^2}} \right) = S(n, \alpha). \quad (17)$$

3) При любом $\alpha \geq 1/4$ для функции $\sqrt[4]{x} \theta_n(x, \alpha - 1/4)$ можно указать натуральное число $N_2(\alpha)$ такое, что для всякого $n \geq N_2(\alpha)$ будет верно равенство $m_0 = \min_i m_i$, при этом

$$s_0 \geq 2 \left(n + \alpha - \frac{1}{4} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(\alpha - 1/4)(\alpha + 3/4)}{(n + \alpha - 1/4)^2}} \right) = s(n, \alpha). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Такое поведение последовательности относительных экстремумов функции $\varphi_n(x, \alpha)$ легко проверяется с помощью теоремы Сонина и уравнения (16). Оценка s_0 может быть получена повторением доказательства теоремы сравнения Штурма [8] для функций $\varphi_n(x^2, \alpha)$ и $\sqrt{x} J_{2\alpha-1/2}(x\sqrt{4n+4\alpha+1})$, поскольку последняя из них является решением уравнения

$$y''(x) + \left[4n + 4\alpha + 1 + \frac{2\alpha(1 - 2\alpha)}{4x^2} \right] y(x) = 0.$$

Оценка s_n есть следствие известной асимптотики больших нулей многочленов Лагерра.

Для доказательства утверждения 2) теоремы с помощью уравнения (16) можно установить, что относительные экстремумы функции $\theta_n(x, \alpha)$ возрастают, если лежат левее точки $2\alpha(\alpha + 1)/(n + \alpha)$, и убывают справа от нее. Следовательно, $\min_i m_i = \min\{m_n, m_0\}$. В этом случае точки s_0 и s_n являются корнями уравнения $x^2 - 4(n + \alpha)x + \alpha(\alpha + 1) = 0$, поэтому непосредственная подстановка s_0 в асимптотическую формулу для многочленов Лагерра типа формулы Хильба [6, 8.22.4, с. 206] позволяет установить, что

$$m_0 = |\theta_n(s_0, \alpha)| \geq O(n^{\alpha+1}).$$

Чтобы оценить скорость роста m_n , можно воспользоваться асимптотическими свойствами максимумов многочленов Лагерра [6, 8.91.1, с. 248]. С их помощью легко заметить, что

$$m_n = O(n^{\alpha+2/3}).$$

Таким образом, для достаточно больших n будет верно неравенство $m_0 > m_n$, поэтому искомое число $N_1(\alpha)$ существует.

Поскольку умножение функции $\theta_n(x, \alpha)$ на $\sqrt[n]{x}$ очевидным образом меняет асимптотику величин m_0 и m_n , а точки, в которых они достигаются, сдвигает вправо, то утверждение 3) теоремы следует из доказательства утверждения 2). Этим доказательство теоремы 6 завершено.

Описанное в теореме 6 поведение локальных экстремумов функций $\varphi_n(x, \alpha), \theta_n(x, \alpha)$ позволяет использовать их в роли $U_n(x)$ в теоремах 1–3; это приводит к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 7. *При всяком $\alpha > 1/2$ по крайней мере для достаточно больших n имеют место неравенства*

$$s(n, \alpha) \leq \underline{\xi}(n, \alpha) < \bar{\xi}(n, \alpha) \leq S(n, \alpha), \quad (19)$$

в которых числа $s(n, \alpha)$ и $S(n, \alpha)$ определены равенствами (17), (18). Если $0 \leq \alpha \leq 1/2$, то крайнее правое неравенство в (19) сохраняет свою силу при тех же предположениях, а крайнее левое может быть заменено оценкой

$$\frac{[\hat{j}'_1(\alpha)]^2}{4n + 4\alpha + 1} \leq \underline{\xi}(n, \alpha), \quad (20)$$

справедливой при любом натуральном n .

ТАБЛИЦА 1

	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$		$\alpha = 1.5$		$\alpha = 2.5$	
n	$m/\underline{\xi}$	$s/\underline{\xi}$	$m/\underline{\xi}$	$s/\underline{\xi}$	$m/\underline{\xi}$	$s/\underline{\xi}$	$m/\underline{\xi}$	$s/\underline{\xi}$	$m/\underline{\xi}$	$s/\underline{\xi}$
1	0.16681	0.89599	0.44503	0.91429	0.55922	0.90660	0.64870	0.88334	0.72467	0.84498
2	0.15500	0.91442	0.42405	0.94158	0.53994	0.94580	0.63310	0.93598	0.71350	0.90985
3	0.15153	0.92603	0.41693	0.95523	0.53294	0.96388	0.62724	0.96069	0.70935	0.94285
4	0.14997	0.93358	0.41348	0.96354	0.52940	0.97429	0.62415	0.97478	0.70713	0.96241
5	0.14911	0.93884	0.41149	0.96916	0.52729	0.98108	0.62226	0.98381	0.70573	0.97518
6	0.14857	0.94270	0.41021	0.97323	0.52590	0.98586	0.62097	0.99005	0.70476	0.98406
7	0.14821	0.94566	0.40933	0.97632	0.52493	0.98942	0.62006	0.99461	0.70404	0.99056
8	0.14795	0.94800	0.40869	0.97875	0.52421	0.99217	0.61937	0.99809	0.70349	0.99549
9	0.14776	0.94990	0.40821	0.98072	0.52366	0.99437	0.61883	1.00082	0.70306	0.99934
10	0.14761	0.95147	0.40784	0.98234	0.52323	0.99617	0.61841	1.00302	0.70271	1.00242
11	0.14749	0.95280	0.40754	0.98371	0.52289	0.99766	0.61807	1.00484	0.70242	1.00493
12	0.14740	0.95392	0.40730	0.98487	0.52261	0.99893	0.61778	1.00636	0.70217	1.00702
13	0.14732	0.95490	0.40710	0.98587	0.52237	1.00002	0.61754	1.00765	0.70196	1.00878
14	0.14725	0.95575	0.40693	0.98675	0.52217	1.00097	0.61734	1.00876	0.70178	1.01028
15	0.14720	0.95650	0.40679	0.98752	0.52200	1.00179	0.61716	1.00972	0.70163	1.01158
16	0.14715	0.95716	0.40667	0.98821	0.52186	1.00252	0.61701	1.01057	0.70149	1.01270
17	0.14711	0.95776	0.40656	0.98882	0.52173	1.00318	0.61688	1.01132	0.70137	1.01369
18	0.14708	0.95829	0.40647	0.98937	0.52162	1.00376	0.61676	1.01199	0.70127	1.01456
19	0.14704	0.95878	0.40639	0.98986	0.52152	1.00429	0.61666	1.01259	0.70117	1.01534
20	0.14702	0.95922	0.40631	0.99031	0.52144	1.00476	0.61657	1.01313	0.70109	1.01604

Если сравнение правых границ в неравенствах (10), (19) особого труда не представляет, то, чтобы проиллюстрировать поведение левых границ в (20), пришлось прибегнуть к непосредственным вычислениям. В обозначениях столбцов таблицы 1 буквы m, ξ заменяют соответственно величины $m(n, \alpha)$ и $\xi(n, \alpha)$ из неравенства (10), а s – левую часть в неравенстве (20).

Последнее неравенство в утверждении 1) теоремы 6 подтверждает асимптотическую точность правых границ в неравенствах (10) и (19) в том смысле, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(n, \alpha)}{\bar{\xi}(n, \alpha)} = 1.$$

Что же касается левых границ, то, поскольку точность нахождения величин, попавших в таблицу 1, существенно выше 10^{-6} и округлялся лишь последний из сохраняемых десятичных знаков, можно отметить следующие обстоятельства. Во-первых, вряд ли неравенство (20) сохраняет справедливость для любого $\alpha > 1/2$ при всех натуральных n (см. в таблице 1 $\alpha \geq 0.9, n \geq 9$); во-вторых, можно предположить, что равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi(n, \alpha)}{4n} = [j'_1(\alpha)]^2$$

будет иметь место при всех $\alpha \geq 0$. И, наконец, этим же путем, используя свойства многочленов Эрмита, в частном случае $\alpha = 1/2$ можно получить неравенства

$$\frac{(\pi/2)^2}{4n+5} \leq \xi\left(n, \frac{1}{2}\right) < \bar{\xi}\left(n, \frac{1}{2}\right) \leq 4n+5,$$

при этом крайнее левое из них подтверждает справедливость сделанного выше предположения, так как в этом случае $j'_1(1/2) = \pi/2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Freud G. On two polynomial inequalities. I // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1971. V. 22. № 1–2. P. 109–116.
- [2] Borwein P., Rakhmanov E. A., Saff E. B. Rational approximation with varying weights. I // Constructive Approximation. 1996. V. 12. № 2. P. 223–240.
- [3] Рахманов Е. А. Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси // Матем. сб. 1982. Т. 119 (161). С. 109–203.
- [4] Mhaskar H. N., Saff E. B. Extremal problems for polynomials with Laguerre weights // Approximation Theory IV. New York: Acad. Press, 1983. P. 619–624.
- [5] Mhaskar H. N., Saff E. B. Extremal problems for polynomials with exponential weights // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 285. P. 203–234.
- [6] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962.
- [7] Склýров В. П. Об одном полиномиальном неравенстве Г. Фройда // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 5. С. 788–792.
- [8] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

Саратовский государственный университет
E-mail: sklyarovvp@info.sgu.ru

Поступило
20.08.1999
Исправленный вариант
11.09.2000