Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Коровкин, В. Н. Малоземов, Базисы Ахмеда-Рао, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 6, 834–840

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm74>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:19:15

УДК 519.72

БАЗИСЫ АХМЕДА–РАО

А. В. Коровкин, В. Н. Малозёмов

При $N = 2^s$ в пространстве комплекснозначных N -периодических функций целочисленного аргумента построены s ортогональных базисов таких, что элементы r -го базиса при $r \in \{1, \dots, s\}$ принимают 2^r значений, равномерно расположенных на единичной окружности комплексной плоскости.

Библиография: 4 названия.

1. Пусть $N = 2^s$. Число $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ можно единственным образом представить в виде

$$j = j_{s-1}2^{s-1} + j_{s-2}2^{s-2} + \dots + j_0, \quad \text{где } j_k \in \{0, 1\}.$$

Для такого представления будем использовать более компактную запись

$$j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2.$$

Число

$$\text{rev}_s(j) = (j_0, j_1, \dots, j_{s-1})_2$$

называется *ревертированным* по отношению к j .

Возьмем два числа $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$ и $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \dots, k_0)_2$. Обозначим

$$\{k, j\}_p = \sum_{\alpha=0}^{p-1} k_\alpha j_\alpha, \quad p \in \{1, \dots, s\}.$$

Функции

$$v_k(j) = (-1)^{\{\text{rev}_s(k), j\}_s}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

называются *дискретными функциями Уолша* [1], [2]. Продолженные с периодом N на все целые j , они образуют базис в пространстве $\mathbb{C}_N$ комплекснозначных N -периодических функций целочисленного аргумента. Элементы этого базиса принимают два значения $+1$ и -1 .

Функции

$$u_k(j) = \omega_N^{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00231.

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$, образуют еще один базис в $\mathbb{C}_N$. Он называется *экспоненциальным*. Элементы экспоненциального базиса принимают $N = 2^s$ значений $1, \omega_N, \omega_N^2, \dots, \omega_N^{N-1}$.

В данной работе будут построены s базисов $\{w_r(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$, $r = 1, \dots, s$, так, что элемент r -го базиса $w_r(k; j)$ принимает 2^r значений: $1, \omega_{2^r}, \omega_{2^r}^2, \dots, \omega_{2^r}^{2^r-1}$. При этом $w_1(k; j) = v_k(j)$ и $w_s(k; j) = u_k(j)$ для всех $k = 0, 1, \dots, N-1$.

2. Целое число j допускает представление

$$j = j''2^p + j', \quad \text{где } j' \in \{0, 1, \dots, 2^p - 1\},$$

и такое представление единственно. Для неполного частного j'' и остатка j' используются обозначения $j'' = \lfloor j/2^p \rfloor$, $j' = \langle j \rangle_{2^p}$.

Напомним, что $N = 2^s$. Положим $N_p = N/2^p$ и при каждом $r \in \{1, \dots, s\}$ введем функции

$$w_r(k; j) = \omega_N^{kj}, \quad k = N_r k', \quad k' \in \{0, 1, \dots, 2^r - 1\}, \quad (1)$$

$$w_r(k; j) = \omega_N^{2^{p-r+1} \lfloor j/2^{p-r+1} \rfloor k} (-1)^{\{\text{rev}_s(k), j\}_{p-r+1}}, \quad (2)$$

$$k = N_{p+1}(2k' + 1), \quad k' \in \{0, 1, \dots, 2^p - 1\}, \quad p \in \{r, \dots, s-1\}.$$

Формула (1) определена для $k = (k_{s-1}, \dots, k_{s-r}, 0, \dots, 0)_2$. Пусть $k = (k_{s-1}, \dots, k_{\alpha+1}, 1, 0, \dots, 0)_2$, где $\alpha \leq s-r-1$. Имеем $\alpha = s-p-1$, где $p \in \{r, \dots, s-1\}$. Поскольку $k-2^\alpha$ делится на $2^{\alpha+1}$, т.е. $k-2^\alpha = k'2^{\alpha+1}$, то $k = N_{p+1}(2k' + 1)$. Формула (2) определяет $w_r(k; j)$ при таком k . После продолжения с периодом N на все целые j функции $w_r(k; j)$ будут принадлежать пространству $\mathbb{C}_N$.

Очевидно, что $w_s(k; j) = u_k(j)$. Покажем, что $w_1(k; j) = v_k(j)$. Согласно (1) имеем

$$w_1(0; j) \equiv 1 = (-1)^{\{\text{rev}_s(0), j\}_s},$$

$$w_1(2^{s-1}; j) = \omega_2^j = \omega_2^{j_0} = (-1)^{\{\text{rev}_s(2^{s-1}), j\}_s}.$$

Обратимся к формуле (2). Пусть $k' = (k'_{p-1}, \dots, k'_0)_2$. Тогда

$$2k' + 1 = (k'_{p-1}, \dots, k'_0, 1)_2, \quad k = (k'_{p-1}, \dots, k'_0, 1, 0, \dots, 0)_2,$$

$$\text{rev}_s(k) = (0, \dots, 0, 1, k'_0, \dots, k'_{p-1})_2, \quad \{\text{rev}_s(k), j\}_p = \sum_{\alpha=0}^{p-1} k'_{p-1-\alpha} j_\alpha, \quad (3)$$

$$\{\text{rev}_s(k), j\}_s = \{\text{rev}_s(k), j\}_p + j_p.$$

Далее,

$$\omega_N^{2^p \lfloor j/2^p \rfloor k} = \omega_2^{\lfloor j/2^p \rfloor (2k'+1)} = (-1)^{\lfloor j/2^p \rfloor} = (-1)^{j_p}. \quad (4)$$

На основании (2)–(4) получаем $w_1(k; j) = (-1)^{\{\text{rev}_s(k), j\}_s}$.

3. Формулу (1) можно переписать так:

$$w_r(k; j) = \omega_{2^r}^{k'j}, \quad k = N_r k', \quad k' \in \{0, 1, \dots, 2^r - 1\}. \quad (1')$$

Преобразуем формулу (2). Индекс $j \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ представим в виде

$$j = j''2^{p-r+1} + j', \quad j' \in \{0, 1, \dots, 2^{p-r+1} - 1\}.$$

Тогда $\{\text{rev}_s(k), j\}_{p-r+1} = \{\text{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1}$ и

$$2^{p-r+1} \left\lfloor \frac{j}{2^{p-r+1}} \right\rfloor k = N_r j''(2k' + 1).$$

Получаем

$$\begin{aligned} w_r(k; j) &= \omega_{2^r}^{j''(2k'+1)+2^{r-1}\{\text{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1}}, \\ k &= N_{p+1}(2k' + 1), \quad k' \in \{0, 1, \dots, 2^p - 1\}, \quad p \in \{r, \dots, s - 1\}. \end{aligned} \quad (2')$$

Из (1'), (2') следует, что функции $w_r(k; j)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, принимают значения из множества $\{1, \omega_{2^r}, \omega_{2^r}^2, \dots, \omega_{2^r}^{2^r-1}\}$.

4. Введем в $\mathbb{C}_N$ скалярное произведение и норму:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{y(j)}, \quad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

ТЕОРЕМА 1. При каждом $r \in \{1, \dots, s\}$ функции $w_r(k; j)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, ортогональны. При этом $\|w_r(k; \cdot)\|^2 = N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заключение теоремы при $r = s$ известно, поэтому считаем, что $r \in \{1, \dots, s - 1\}$. Функции вида (1) ортогональны, и квадрат их нормы равен N , поскольку это выборка из экспоненциального базиса. Разберемся с функциями вида (2). Нам потребуется вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. Пусть $r \in \{1, \dots, s - 1\}$ и $p \in \{r, \dots, s - 1\}$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{N_{p-r+1}-1} \omega_{2^r}^{(2l+1)j} = 0 \quad \forall l \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим индекс $j \in \{0, 1, \dots, 2^{s-p+r-1} - 1\}$ в виде $j = j''2^r + j'$, где $j' \in \{0, 1, \dots, 2^r - 1\}$, $j'' \in \{0, 1, \dots, 2^{s-p-1} - 1\}$. Поскольку $z := \omega_{2^r}^{2l+1} \neq 1$ и $z^{2^r} = 1$, то

$$\sum_{j=0}^{N_{p-r+1}-1} \omega_{2^r}^{(2l+1)j} = \sum_{j''=0}^{2^{s-p-1}-1} \sum_{j'=0}^{2^r-1} z^{j'} = 0.$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Имеем

$$\begin{aligned} \langle w_r(k; \cdot), w_r(l; \cdot) \rangle &= \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{2^{p-r+1} \lfloor j/2^{p-r+1} \rfloor k - 2^{q-r+1} \lfloor j/2^{q-r+1} \rfloor l} \\ &\quad \times (-1)^{\{\text{rev}_s(k), j\}_{p-r+1} + \{\text{rev}_s(l), j\}_{q-r+1}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $k = N_{p+1}(2k' + 1)$, $l = N_{q+1}(2l' + 1)$, $k' \in \{0, 1, \dots, 2^p - 1\}$, $l' \in \{0, 1, \dots, 2^q - 1\}$, $p, q \in \{r, \dots, s-1\}$. Пусть вначале $p \neq q$, для определенности $p > q$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \lfloor j/2^{q-r+1} \rfloor &= \lfloor (2^{p-r+1} \lfloor j/2^{p-r+1} \rfloor + \langle j \rangle_{2^{p-r+1}}) / 2^{q-r+1} \rfloor \\ &= 2^{p-q} \lfloor j/2^{p-r+1} \rfloor + \lfloor \langle j \rangle_{2^{p-r+1}} / 2^{q-r+1} \rfloor, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \langle w_r(k; \cdot), w_r(l; \cdot) \rangle &= \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{2^{p-r+1} \lfloor j/2^{p-r+1} \rfloor (k-l) - 2^{q-r+1} \lfloor \langle j \rangle_{2^{p-r+1}} / 2^{q-r+1} \rfloor l} \\ &\quad \times (-1)^{\{\text{rev}_s(k), \langle j \rangle_{2^{p-r+1}}\}_{p-r+1} + \{\text{rev}_s(l), \langle j \rangle_{2^{p-r+1}}\}_{q-r+1}}. \end{aligned}$$

Положим $j = j''2^{p-r+1} + j'$, $j' \in \{0, 1, \dots, 2^{p-r+1} - 1\}$, $j'' \in \{0, 1, \dots, N_{p-r+1} - 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle w_r(k; \cdot), w_r(l; \cdot) \rangle &= \sum_{j''=0}^{N_{p-r+1}-1} \omega_{2^r}^{j''(2k'+1-2^{p-q}(2l'+1))} \\ &\quad \times \sum_{j'=0}^{2^{p-r+1}-1} \omega_N^{-2^{q-r+1} \lfloor j'/2^{q-r+1} \rfloor l} (-1)^{\{\text{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1} + \{\text{rev}_s(l), j'\}_{q-r+1}}. \end{aligned}$$

По лемме первая сумма в правой части последнего равенства равна нулю. Значит, равно нулю и скалярное произведение.

Пусть теперь $q = p$ и $k' > l'$. Положив, как и раньше, $j = j''2^{p-r+1} + j'$, перепишем формулу (5) в виде

$$\langle w_r(k; \cdot), w_r(l; \cdot) \rangle = \sum_{j''=0}^{N_{p-r+1}-1} \omega_{N_{p-r+1}}^{j''(k-l)} \sum_{j'=0}^{2^{p-r+1}-1} (-1)^{\{\text{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1} + \{\text{rev}_s(l), j'\}_{p-r+1}}. \quad (6)$$

Как отмечалось в п. 2,

$$\begin{aligned} k &= (k'_{p-1}, \dots, k'_0, 1, 0, \dots, 0)_2, & \text{rev}_s(k) &= (0, \dots, 0, 1, k'_0, \dots, k'_{p-1})_2, \\ l &= (l'_{p-1}, \dots, l'_0, 1, 0, \dots, 0)_2, & \text{rev}_s(l) &= (0, \dots, 0, 1, l'_0, \dots, l'_{p-1})_2. \end{aligned}$$

Если

$$k'_\alpha = l'_\alpha \quad \text{при} \quad \alpha = r-1, \dots, p-1, \quad (7)$$

то $0 < k-l \leq 2^{s-p+r-1} - 1 = N_{p-r+1} - 1$. Число $z = \omega_{N_{p-r+1}}^{k-l}$ отлично от единицы и $z^{N_{p-r+1}} = 1$, поэтому

$$\sum_{j''=0}^{N_{p-r+1}-1} \omega_{N_{p-r+1}}^{j''(k-l)} = \sum_{j''=0}^{N_{p-r+1}-1} z^{j''} = 0.$$

Предположим, что условие (7) не выполняется. Имеем

$$\{\text{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1} = \sum_{\alpha=0}^{p-r} k'_{p-1-\alpha} j'_\alpha, \quad \{\text{rev}_s(l), j'\}_{p-r+1} = \sum_{\alpha=0}^{p-r} l'_{p-1-\alpha} j'_\alpha,$$

так что

$$\begin{aligned} & \sum_{j'=0}^{2^{p-r+1}-1} (-1)^{\{\text{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1} + \{\text{rev}_s(l), j'\}_{p-r+1}} \\ &= \sum_{j'_0=0}^1 \sum_{j'_1=0}^1 \dots \sum_{j'_{p-r}=0}^1 \prod_{\alpha=0}^{p-r} (-1)^{\langle k'_{p-1-\alpha} + l'_{p-1-\alpha} \rangle 2j'_\alpha} \\ &= \prod_{\alpha=0}^{p-r} \sum_{j'_\alpha=0}^1 (-1)^{\langle k'_{p-1-\alpha} + l'_{p-1-\alpha} \rangle 2j'_\alpha}. \end{aligned}$$

Поскольку условие (7) не выполняется, то хотя бы один из сомножителей в последнем произведении равен нулю. Значит, и все произведение равно нулю. Показано, что $\langle w_r(k; \cdot), w_r(l; \cdot) \rangle = 0$ при $q = p$ и $k' > l'$.

При $k = l$ из (6) следует, что $\|w_r(k; \cdot)\|^2 = N$.

Осталось проверить, что любая функция вида (1) ортогональна любой функции вида (2). Имеем

$$\begin{aligned} \langle w_r(l; \cdot), w_r(k; \cdot) \rangle &= \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj-2^{p-r+1} \lfloor j/2^{p-r+1} \rfloor k} (-1)^{\{\text{rev}_s(k), j\}_{p-r+1}} \\ &= \sum_{j''=0}^{N_{p-r+1}-1} \omega_{2^r}^{j''(2^{p-r+1}l' - (2k'+1))} \sum_{j'=0}^{2^{p-r+1}-1} \omega_{2^r}^{l'j'} (-1)^{\{\text{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1}}. \end{aligned}$$

По лемме первая сумма в правой части последнего равенства равна нулю. Значит, равно нулю и скалярное произведение.

Теорема доказана.

Согласно теореме 1 при каждом $r \in \{2, \dots, s-1\}$ функции $w_r(k; j)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, образуют ортогональные базисы в пространстве $\mathbb{C}_N$. Назовем их *базисами Ахмеда-Рао*. В неявной форме они появились в монографии [1, § 7.2].

5. Следуя [3], [4], рассмотрим вопрос о частоте дискретных N -периодических функций $w_r(k; j)$.

ТЕОРЕМА 2. Частота функции $w_r(k; j)$ при $r \in \{1, \dots, s\}$, $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ равна k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функций вида (1) это очевидно. Действительно, поскольку $w_r(k; j) = \exp(i(2\pi/N)kj)$, то при возрастании j от 0 до N аргумент $(2\pi/N)kj$ комплексного числа $w_r(k; j)$ возрастает от 0 до $2\pi k$. Величину k принимают за частоту функции $w_r(k; j)$.

Обратимся к функциям вида (2), (2'). Формула (2') определяет $w_r(k; j)$ при всех целых j как N -периодическую функцию, поскольку

$$j + lN = (j'' + l2^{r+s-p-1})2^{p-r+1} + j' \quad \text{и} \quad \omega_{2^r}^{(j''+l2^{r+s-p-1})(2k'+1)} = \omega_{2^r}^{j''(2k'+1)}.$$

Чтобы обеспечить монотонное неубывание аргумента комплексного числа $w_r(k; j)$ при возрастании j от 0 до N , потребуется дополнительное преобразование.

Имеем

$$(-1)^{\{\text{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1}} = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{p-r} k'_{p-1-\alpha} (j'_\alpha + j'_{\alpha+1} 2 + \dots + j'_{p-r} 2^{p-r-\alpha})}.$$

Обозначим

$$\varphi_k(j') := \sum_{\alpha=0}^{p-r} k'_{p-1-\alpha} \sum_{\beta=\alpha}^{p-r} j'_\beta 2^{\beta-\alpha} = \sum_{\beta=0}^{p-r} \left(\sum_{\alpha=0}^{\beta} k'_{p-1-\alpha} 2^{\beta-\alpha} \right) j'_\beta.$$

Тогда

$$w_r(k; j) = \omega_{2^r}^{j''(2k'+1) + 2^{r-1}\varphi_k(j')}. \quad (8)$$

Покажем, что функция $\varphi_k(j') = \sum_{\beta=0}^{p-r} a_\beta j'_\beta$, где $a_\beta = \sum_{\alpha=0}^{\beta} k'_{p-1-\alpha} 2^{\beta-\alpha}$, монотонно не убывает при возрастании j' от 0 до $2^{p-r+1} - 1$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} a_\beta &\geq 2 \sum_{\alpha=0}^{\beta-1} k'_{p-1-\alpha} 2^{\beta-1-\alpha} = 2a_{\beta-1} \geq a_{\beta-1} + 2a_{\beta-2} \geq \dots \\ &\geq a_{\beta-1} + a_{\beta-2} + \dots + a_1 + 2a_0, \end{aligned}$$

тем более,

$$a_\beta \geq a_{\beta-1} + a_{\beta-2} + \dots + a_1 + a_0. \quad (9)$$

Пусть $j' \in \{0, 1, \dots, 2^{p-r+1} - 2\}$, $j' = (j'_{p-r}, \dots, j'_0)_2$. Если $j'_0 = 0$, то

$$\varphi_k(j' + 1) = a_0 + \sum_{\beta=1}^{p-r} a_\beta j'_\beta \geq \varphi_k(j').$$

Предположим, что $j'_0 = 1$. В случае $j'_0 = j'_1 = \dots = j'_{\beta-1} = 1$, $j'_\beta = 0$ при некотором $\beta \in \{1, \dots, p-r\}$ получаем

$$\varphi_k(j' + 1) = a_\beta + \sum_{\nu=\beta+1}^{p-r} a_\nu j'_\nu.$$

Согласно (9)

$$\varphi_k(j' + 1) - \varphi_k(j') = a_\beta - \sum_{\nu=0}^{\beta-1} a_\nu \geq 0.$$

Тем самым, монотонное неубывание функции $\varphi_k(j')$ на множестве $\{0, 1, \dots, 2^{p-r+1} - 1\}$ установлено.

Обозначим $\psi_k(j) = \pi[2^{-r+1}j''(2k' + 1) + \varphi_k(j')]$ и перепишем формулу (8) в виде $w_r(k; j) = \exp(i\psi_k(j))$. При $j = N$ имеем $j'' = 2^{s-p+r-1}$, $j' = 0$, так что $\psi_k(N) = 2\pi k$. Кроме того, $\psi_k(0) = 0$. Если мы покажем, что функция $\psi_k(j)$ монотонно не убывает при возрастании j от 0 до N , то это будет означать, что частота функции $w_r(k; j)$ равна k .

Возьмем $j_1, j_2 \in \{0, 1, \dots, N\}$, $j_\alpha = j''_\alpha 2^{p-r+1} + j'_\alpha$, где $j'_\alpha \in \{0, 1, \dots, 2^{p-r+1} - 1\}$, $\alpha \in \{1, 2\}$, и предположим, что $j_1 > j_2$. Тогда $j''_1 \geq j''_2$, поскольку $|j'_1 - j'_2| \leq 2^{p-r+1} - 1$. При $j''_1 = j''_2$, $j'_1 > j'_2$ неравенство $\psi_k(j_1) \geq \psi_k(j_2)$ следует из монотонного неубывания функции $\varphi_k(j')$.

Допустим, что $j''_1 > j''_2$. Оценим $\varphi_k(j')$. Согласно определению

$$\varphi_k(2^{p-r+1} - 1) \leq \sum_{\alpha=0}^{p-r} k'_{p-1-\alpha} 2^{p-r-\alpha+1} \leq 2^{-r+1}(2k').$$

Принимая во внимание монотонное неубывание $\varphi_k(j')$, получаем

$$0 \leq \varphi_k(j') \leq 2^{-r+1}(2k') \quad \text{и} \quad |\varphi_k(j'_1) - \varphi_k(j'_2)| \leq 2^{-r+1}(2k').$$

Теперь запишем

$$\psi_k(j_1) - \psi_k(j_2) \geq \pi 2^{-r+1}[(j''_1 - j''_2)(2k' + 1) - 2k'] > 0.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980.
- [2] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
- [3] Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.
- [4] Малозёмов В. Н., Машарский С. М. Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 1. С. 111–157.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: malv@gamma.math.spbu.ru

Поступило
20.02.2003