Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кольца Безу, многочлены и дистрибутивность, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 270–288

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm740>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:31:44

УДК 512.55

КОЛЬЦА БЕЗУ, МНОГОЧЛЕНЫ И ДИСТРИБУТИВНОСТЬ

А. А. Туганбаев

Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A , $A_r[x, \varphi] \equiv R$ – правое кольцо косых многочленов. Если все правые аннуляторные идеалы кольца A являются идеалами, то R – правое кольцо Безу $\iff A$ – риккартово справа правое кольцо Безу, $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$ и элемент $\varphi(a)$ обратим в A для каждого регулярного $a \in A$. Если A строго регулярно и $n \geq 2$, то $R/x^n R$ – правое кольцо Безу $\iff R/x^n R$ – дистрибутивное справа кольцо $\iff R/x^n R$ – инвариантное справа кольцо $\iff \varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$. Кольцо $R/x^2 R$ дистрибутивно справа $\iff R/x^n R$ дистрибутивно справа для всех натуральных n $\iff A$ дистрибутивно справа и риккартово справа или слева, $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$ и $\varphi(a)$ обратимо в A для каждого регулярного $a \in A$. Если кольцо A является конечно-порожденным модулем над своим центром, то $A[x]$ – правое кольцо Безу $\iff A[x]/x^2 A[x]$ – правое кольцо Безу $\iff A$ – регулярное кольцо.

Библиография: 7 названий.

Введение. В настоящей работе все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Слова типа “кольцо Безу” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Если A – кольцо и φ – инъективный эндоморфизм кольца A , то через $A_r[x, \varphi]$ обозначается правое кольцо косых многочленов, состоящее из конечных формальных сумм $\sum x^i a_i$ от переменной x с каноническими коэффициентами $a_i \in A$, где умножение определяется с помощью правила $ax^i = x^i \varphi^i(a)$. Модуль называется *модулем Безу*, если каждый его конечно-порожденный подмодуль является циклическим модулем. Модуль называется *дистрибутивным*, если решетка всех его подмодулей дистрибутивна. Через $r(X)$ обозначается правый аннулятор подмножества X правого модуля M . Правый модуль M_A называется *риккартовым*, если для каждого $t \in M$ правый идеал $r(t)$ порождается идемпотентом кольца A . Элемент кольца A называется *регулярным справа (слева)*, если он не является левым (правым) делителем нуля в A . Кольцо называется *инвариантным справа*, если каждый его правый идеал является идеалом. Кольцо A называется *строго регулярным*, если для каждого $a \in A$ существует такое $b \in A$, что $a = a^2 b$ (это равносильно тому, что каждый главный правый идеал кольца A порождается центральным идемпотентом; см., например, [1, 3.30]).

Известно, что кольцо многочленов $A[x]$ над строго регулярным кольцом A является кольцом Безу (см., например, [1, 12.3]). В [2, предложение 8] доказано, что если A – строго регулярное кольцо, то $A[x]/x^n A[x]$ – инвариантное кольцо для любого натурального числа n . Основными результатами работы являются теоремы 1–4.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00382.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – кольцо, в котором все правые аннуляторные идеалы являются идеалами, φ – инъективный эндоморфизм кольца A . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) $A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу;
- (2) $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу;
- (3) $A_r[x, \varphi]$ – редуцированное правое кольцо Безу;
- (4) A – риккартово справа правое кольцо Безу, $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$ и элемент $\varphi(d)$ обратим в A для каждого регулярного элемента $d \in A$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – строго регулярное кольцо, φ – инъективный эндоморфизм кольца A и n – натуральное число ≥ 2 . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) $A_r[x, \varphi]/x^n A_r[x, \varphi]$ – инвариантное справа кольцо;
- (2) $A_r[x, \varphi]/x^n A_r[x, \varphi]$ – нормальное кольцо;
- (3) $A_r[x, \varphi]/x^n A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу;
- (4) $A_r[x, \varphi]/x^n A_r[x, \varphi]$ – дистрибутивное справа кольцо;
- (5) $A_r[x, \varphi]$ – редуцированное правое кольцо Безу и $A_r[x, \varphi]/x^k A_r[x, \varphi]$ – инвариантное справа дистрибутивное справа правое кольцо Безу для каждого натурального числа k ;
- (6) $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$ – дистрибутивное справа кольцо;
- (2) $A_r[x, \varphi]/x^n A_r[x, \varphi]$ – дистрибутивное справа кольцо для всех натуральных чисел n ;
- (3) A – дистрибутивное справа риккартово справа кольцо, $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$ и элемент $\varphi(d)$ обратим в A для каждого регулярного элемента $d \in A$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – кольцо, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром. Тогда равносильны следующие условия:

- (1) $A[x]$ – правое кольцо Безу;
- (2) $A[x]/x^2 A[x]$ – правое кольцо Безу;
- (3) A – регулярное кольцо.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В связи с приведенными выше теоремами заметим, что существует коммутативная цепная область A , не являющаяся строго регулярным кольцом и обладающая инъективным эндоморфизмом φ таким, что элемент $\varphi(a)$ обратим в A для любого ненулевого $a \in A$. (В частности, A – коммутативная дистрибутивная область Безу и $\varphi(J(A) \setminus \{0\}) \subseteq A \setminus J(A)$.) Пусть k – поле, F – поле рациональных функций над k от счетного числа переменных $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$. Положим $t \equiv t_0$. Существует инъективный эндоморфизм α поля F такой, что $\alpha(t_i) = t_{i+1}$ для всех i ; элемент t трансцендентен над $\alpha(F)$. Пусть A – кольцо, образованное всеми дробями $f/(1+yg)$, где f, g – произвольные многочлены из кольца многочленов $F[y]$. С помощью правила $\varphi(y) = t$ можно продолжить α до инъективного эндоморфизма φ кольца A . Непосредственно проверяется, что A –

коммутативная цепная область главных идеалов, не являющаяся полем, причем элемент $\varphi(a)$ обратим в A для любого ненулевого $a \in A$. Так как область A не является полем, то область A не является строго регулярным кольцом.

Доказательства теорем 1–4 разбиты на ряд лемм. Приведем необходимые определения и обозначения. Модуль называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Модуль M называется *конечномерным*, если M не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Через $J(A)$ обозначается радикал Джекобсона кольца A . Кольцо A называется *ортогонально конечным*, если A не содержит бесконечных множеств ненулевых ортогональных идемпотентов. Кольцо называется *регулярным*, если любой его главный правый идеал порождается идемпотентом. Кольцо A называется *бирегулярным*, если любой его 1-порожденный двусторонний идеал порождается центральным идемпотентом. Кольцо без ненулевых нильпотентных элементов называется *редуцированным* кольцом. Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны. Кольцо называется *прямо-конечным*, если все его обратимые справа или слева элементы обратимы. Кольцо называется *квази-инвариантным справа*, если все его максимальные правые идеалы являются идеалами. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*. Факторкольцо A/P называется *пирсовским слоем* кольца A , если идеал P является максимальным (по включению) элементом непустого множества всех собственных идеалов кольца A , порожденных центральными идемпотентами.

1. Доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 1.1. (1) Если A – редуцированное кольцо, то A – нормальное кольцо и $r(X) = \ell(X)$ – идеал в A для любого подмножества $X \subseteq A$.

(2) Если A – риккартово справа нормальное кольцо, то A – риккартово слева редуцированное кольцо, в котором каждый элемент является произведением центрального идемпотента на регулярный элемент.

(3) Если d – регулярный элемент кольца A и A/P – пирсовский слой кольца A , то $d + P$ – регулярный элемент кольца A/P .

(4) Если A – нормальное кольцо, то A прямо-конечно и каждый его пирсовский слой не имеет нетривиальных идемпотентов.

(5) Если A – риккартово справа нормальное кольцо, то каждый его пирсовский слой A/P является областью.

(6) Допустим, что существует такой инъективный эндоморфизм φ кольца A , что $a \in a\varphi(a)A$ для любого $a \in A$. Тогда $\varphi(e) = e$ для любого центрального идемпотента $e \in A$ и для каждого регулярного справа элемента $d \in A$ элемент $\varphi(d)$ обратим справа в кольце A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1), (2) и (3) доказаны в [3, 1.35 (1), 3.36, 6.89 (ii)].

(4) Так как A нормально, то каждый его пирсовский слой не имеет нетривиальных идемпотентов [3, 6.91]. Пусть $a, b \in A$ и $ab = 1$. Тогда $(ba)^2 = ba$. По условию ba – центральный идемпотент. Поэтому $baa = aba = a$. Тогда $ba = baab = ab = 1$.

(5) Пусть $a, b \in A \setminus P$. Согласно (2) существуют регулярные элементы $c, d \in A$ и центральные идемпотенты $e, f \in A$ такие, что $a = ce$ и $b = df$. Тогда $e, f \in A \setminus P$. Кроме того, факторкольцо A/P не имеет нетривиальных идемпотентов согласно (4). Поэтому

$1 - e, 1 - f \in P$. Тогда $a + P = c + P$ и $b + P = d + P$. Согласно (3) $a + P$ и $b + P$ – регулярные элементы факторкольца A/P . Поэтому A/P – область.

(6) По условию существуют $b, c \in A$ такие, что $e = e\varphi(e)b$ и $1 - e = (1 - e)(1 - \varphi(e))c = (1 - \varphi(e))c(1 - e)$. Тогда

$$e = e\varphi(e)b = e(\varphi(e))^2b = \varphi(e)e\varphi(e)b = \varphi(e)e = e\varphi(e)$$

и

$$\begin{aligned}\varphi(e) &= (e + (1 - e))\varphi(e) = e\varphi(e) + (1 - e)\varphi(e) \\ &= e + \varphi(e)(1 - e) = e + \varphi(e)(1 - \varphi(e))c(1 - e) = e.\end{aligned}$$

По условию существует элемент $t \in A$ такой, что $(1 - \varphi(d))t \in r(d) = 0$. Поэтому элемент $\varphi(d)$ обратим справа.

ЛЕММА 1.2. Пусть A – кольцо, в котором все правые аннуляторы являются идеалами. Допустим, что существует такой инъективный эндоморфизм φ кольца A , что $a \in a\varphi(a)A$ для любого $a \in A$.

(1) A нормально, $r(a) = r(\varphi(a))$ для любого $a \in A$ и $\varphi(e) = e$ для любого идемпотента $e \in A$.

(2) A – редуцированное риккартово кольцо и для любого $a \in A$ существует $b \in A$ такое, что $\varphi(a)b$ и $1 - \varphi(a)b$ – центральные идемпотенты, $a = a\varphi(a)b$, $\varphi(a) = \varphi(a)b\varphi(a) = (\varphi(a))^2b$ и $r(a) = \ell(a) = (1 - \varphi(a)b)A$.

(3) Для любого регулярного справа элемента $d \in A$ элемент $\varphi(d)$ обратим в кольце A .

(4) Пусть A/P – нирсовский слой кольца A . Тогда $\varphi(P) \subseteq P$, A/P – область, φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ области A/P и $\bar{\varphi}(a + P)$ – обратимый элемент области A/P для каждого ненулевого элемента $a + P \in A/P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в кольце A все правые аннуляторы являются идеалами, то кольцо A нормально.

(1) По лемме 1.1(6) $\varphi(e) = e$ для любого идемпотента $e \in A$. Пусть $a \in A$. По условию существует элемент $b \in A$ такой, что $a = a\varphi(a)b$. Пусть $x \in r(\varphi(a))$. Так как $r(\varphi(a))$ – идеал, то $bx \in r(\varphi(a))$. Поэтому $\varphi(a)bx = 0$, откуда $ax = a\varphi(a)bx = 0$. Тогда $r(\varphi(a)) \subseteq r(a)$.

Пусть $y \in r(a)$. Тогда $\varphi(y) \in r(\varphi(a))$. По условию существует элемент $z \in A$ такой, что $y = y\varphi(y)z$. Так как $r(\varphi(a))$ – идеал и $\varphi(y) \in r(\varphi(a))$, то верно включение $y\varphi(y) \in \varphi(a)$. Поэтому $\varphi(a)y\varphi(y) = 0$. Тогда $\varphi(a)y = \varphi(a)y\varphi(y)z = 0$. Поэтому $r(a) \subseteq r(\varphi(a))$.

(2) Пусть $x \in A$ и $x^2 = 0$. Согласно (1) $r(x) = r(\varphi(x))$. Так как $x \in r(x)$, то верно равенство $x\varphi(x) = 0$. По условию $x \in x\varphi(x)A$. Поэтому $x = 0$ и A – редуцированное кольцо.

Пусть $a \in A$. По условию существует элемент $b \in A$ такой, что $a = a\varphi(a)b$. Тогда $1 - \varphi(a)b \in r(a)$. Из (1) и леммы 1.1(1) следует, что $r(a) = \ell(a) = r(\varphi(a)) = \ell(\varphi(a))$. Поэтому $0 = \varphi(a)(1 - \varphi(a)b) = (1 - \varphi(a)b)\varphi(a)$. Тогда $\varphi(a) = \varphi(a)b\varphi(a) = (\varphi(a))^2b$. Поэтому $\varphi(a)b$ и $1 - \varphi(a)b$ – идемпотенты. Согласно (1) $\varphi(a)b$ и $1 - \varphi(a)b$ – центральные идемпотенты. Так как $1 - \varphi(a)b \in r(a)$, то остается доказать включение $r(a) \subseteq (1 - \varphi(a)b)A$.

Если $y \in r(a) = \ell(\varphi(a))$, то $y = y(1 - \varphi(a)b) \in A(1 - \varphi(a)b) = (1 - \varphi(a)b)A$. Поэтому идеал $r(a)$ порождается центральным идемпотентом $1 - \varphi(a)b$ и A – риккартово кольцо.

(3) По лемме 1.1(6) элемент $\varphi(d)$ обратим справа. По лемме 1.1(4) $\varphi(d)$ – обратимый элемент.

(4) По лемме 1.1(5) A/P – область. Пусть $h: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм и $P = \sum_{i \in I} e_i A$, где все e_i – центральные идемпотенты. Согласно (1) $\varphi(e_i) = e_i$ для всех e_i . Поэтому $\varphi(P) \subseteq P$ и φ индуцирует эндоморфизм $\overline{\varphi}$ области A/P . Пусть $a \in A \setminus P$. По лемме 1.1(2) $a = ed$, где e – центральный идемпотент и d – регулярный элемент. Так как $a = ed \in A \setminus P$, то верно включение $e \in A \setminus P$. Согласно (3) $\varphi(d)$ – обратимый элемент в A . Поэтому $h(\varphi(d))$ – обратимый элемент в A/P . Согласно (1) $\varphi(e) = e \in A \setminus P$ и $h(\varphi(e)) = h(e) = h(1)$ – единица кольца A/P . Поэтому $e = \varphi(e) = \varphi(e)\varphi(d)(\varphi(d))^{-1} = \varphi(a)\varphi(d)^{-1} \in A \setminus P$. Тогда $\varphi(a) \in A \setminus P$ и $h(1) = h(\varphi(a))h(\varphi(d)^{-1})$. Поэтому $\text{Ker}(\overline{\varphi}) = 0$ и $h(\varphi(a)) = \overline{\varphi}(a + P)$ – обратимый элемент области A/P .

ЛЕММА 1.3. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A , $R \equiv A_r[x, \varphi]$. Допустим, что R/x^2R – правое кольцо Безу.

(1) A – правое кольцо Безу и для каждого $a \in A$ существуют $f_0, g_0, u_0, v_0, b, c \in A$ такие, что выполняются следующие равенства:

- (i) $a = af_0u_0$;
- (ii) $af_0v_0 = 0$;
- (iii) $1 = \varphi(a)b + g_0v_0$;
- (iv) $\varphi(a)c = g_0u_0$.

(2) Если в кольце A все правые аннуляторы являются идеалами, то для любого $a \in A$ существует $b \in A$ такое, что $a = a\varphi(a)b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как существует сюръективный гомоморфизм $R/x^2R \rightarrow R/xR \cong A$, то A – правое кольцо Безу. Пусть $h: R \rightarrow R/x^2R$ – естественный эпиморфизм. Так как $h(R)$ – правое кольцо Безу, то $h(aR + xR)$ – главный правый идеал кольца $h(R)$. Поэтому существуют многочлены $f, g \in R$ такие, что $h(aR + xR) = h((af + xg)R)$. Тогда существуют многочлены $u, v \in R$ такие, что $(af + xg)u - a \in x^2R$ и $(af + xg)v - x \in x^2R$. Пусть f_0, g_0, u_0 и v_0 – свободные члены многочленов f, g, u, v соответственно, f_1, u_1, v_1 – канонические коэффициенты при x многочленов f, u, v соответственно. Так как свободные члены и коэффициенты при x многочленов $(af + xg)u - a$ и $(af + xg)v - x$ равны нулю, то получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} af_0u_0 - a &= 0, & af_0v_0 &= 0, \\ \varphi(a)(\varphi(f_0)u_1 + f_1u_0) + g_0u_0 &= 0, & \varphi(a)(\varphi(f_0)v_1 + f_1v_0) + g_0v_0 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Теперь можно положить $b \equiv \varphi(f_0)v_1 + f_1v_0$, $c \equiv -\varphi(f_0)u_1 - f_1u_0$.

(2) Согласно (1) существуют $f_0, g_0, u_0, v_0, b \in A$ такие, что верны следующие равенства:

- (i) $a = af_0u_0$;
- (ii) $af_0v_0 = 0$;
- (iii) $1 = \varphi(a)b + g_0v_0$.

Согласно (ii) $v_0 \in r(af_0)$. Так как $r(af_0)$ – идеал в A по условию, то верно включение $u_0g_0v_0 \in r(af_0)$. Поэтому $af_0u_0g_0v_0 = 0$. Из (i) следует, что $a(g_0v_0) = (af_0u_0)g_0v_0 = 0$. Из (iii) следует, что $a = a \cdot 1 = a\varphi(a)b + ag_0v_0$. Так как $ag_0v_0 = 0$, то верно равенство $a = a\varphi(a)b$.

ЛЕММА 1.4. Пусть A – область, φ – инъективный эндоморфизм области A такой, что элемент $\varphi(a)$ обратим в A для каждого ненулевого $a \in A$. Положим $R \equiv A_r[x, \varphi]$.

(1) Для любых двух таких ненулевых многочленов $f, g \in R$, что $\deg(f) < \deg(g)$, существует многочлен $h \in R$ такой, что $\deg(h) < \deg(g)$ и $fR + gR = fR + hR$.

(2) Если G – ненулевой правый идеал кольца R и $m \equiv \min_{0 \neq g \in G} \deg(g)$, то правый идеал G порождается многочленами степени m .

(3) Если F – конечно-порожденный ненулевой правый идеал кольца R и

$$m \equiv \min_{0 \neq f \in F} \deg(f),$$

то правый идеал F порожден конечным числом многочленов степени m .

(4) Для любого ненулевого многочлена $f \in R$ существуют целое число $m \geq 0$, ненулевой элемент $f_0 \in A$ и многочлен $s \in R$ такие, что $fR = x^m f_0(1 + xs)R$.

(5) Пусть F и G – главные правые идеалы кольца R , n – натуральное число, $h: R \rightarrow R/x^n R$ – естественный эпиморфизм. Допустим, что главные правые идеалы $h(F)$ и $h(G)$ кольца $h(R)$ не сравнимы по включению. Тогда существуют не сравнимые по включению главные правые идеалы F_0, G_0 кольца A и целое число $m \geq 0$ такие, что $h(F) = h(x^m)h(F_0)h(R)$, $h(G) = h(x^m)h(G_0)h(R)$, $h(F) \cap h(G) = h(x^m)h(F_0 \cap G_0)h(R)$, $h(F) + h(G) = h(x^m)h(F_0 + G_0)h(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Положим $m \equiv \deg(f) \geq 0$ и $\deg(g) \equiv n > m$. Тогда существуют ненулевые $a, b \in A$ такие, что $f = x^m a + s$ и $g = x^n b + t$, где $\deg(s) < m$ и $\deg(t) < n$. Обратимый справа элемент $\varphi(a)$ области A обратим в A . Тогда $x^{n-m} = ax^{n-m}(\varphi^{n-m}(a))^{-1}$. Поэтому

$$g - t = x^n b = x^m a x^{n-m} \varphi^{n-m}(a)^{-1} b = (f - s) x^{n-m} \varphi^{n-m}(a)^{-1} b.$$

Положим

$$h \equiv g - f x^{n-m} \varphi^{n-m}(a)^{-1} b = t - s x^{n-m} \varphi^{n-m}(a)^{-1} b \in fR + gR.$$

Тогда $\deg(h) < n$ и $g = f x^{n-m} \varphi^{n-m}(a)^{-1} b + h \in fR + hR$. Поэтому

$$fR + gR \subseteq fR + hR \subseteq fR + gR.$$

(2) Пусть F – ненулевой правый идеал кольца R , порожденный всеми многочленами степени m , лежащими в G . Допустим, что $F \neq G$. Тогда существует целое число $n > m$ такое, что все многочлены из G степени $< n$ лежат в F и $\deg(g) = n$ для некоторого многочлена $g \in G \setminus F$. В правом идеале F возьмем произвольный ненулевой многочлен f степени m . Согласно (1) существует многочлен $h \in R$ такой, что $\deg(h) < n$ и $fR + gR = fR + hR$. Так как $h \in G$ и $\deg(h) < n$, то $h \in F$. Поэтому $g \in fR + hR \subseteq F$. Получено противоречие.

(3) следует из (2) и того, что из каждой системы образующих конечно-порожденного правого идеала можно выбрать конечную систему образующих.

(4) Для f существуют целое число $m \geq 0$, ненулевой элемент $f_0 \in A$ и многочлен $s \in R$ такие, что

$$f = x^m(f_0 + xs) = x^m f_0(1 + x(\varphi(f_0))^{-1}s).$$

Поэтому $fR = x^m f_0(1 + xs)R$.

(5) Согласно (4) существуют целые числа $k \geq 0$ и $m \geq 0$, ненулевые элементы $f_0, g_0 \in A$ и многочлены $s, t \in R$ такие, что $F = x^k f_0(1 + xs)R$ и $G = x^m g_0(1 + xt)R$. Так как $h(xs)$ и $h(xt)$ – нильпотентные элементы кольца $h(R)$, то верны равенства

$$h(R) = h(1 + xs)h(R) = h(1 + xt)h(R).$$

Поэтому $h(F) = h(x^k)f_0h(R)$ и $h(G) = h(x^m)g_0h(R)$. Допустим, что $k \neq m$. Например, пусть $k < m$. Тогда

$$x^m g_0 = x^k x^{m-k} g_0 = x^k f_0 x^{m-k} (\varphi^{m-k}(f_0))^{-1} g_0 \in x^k f_0 R.$$

Поэтому $h(G) = h(x^m g_0)h(R) \subseteq h(x^k f_0)h(R) = h(F)$. Тогда главные правые идеалы $h(F)$ и $h(G)$ кольца $h(R)$ сравнимы по включению. Получено противоречие. Следовательно, $k = m$. Тогда $h(F) = h(x^m)f_0h(R)$ и $h(G) = h(x^m)g_0h(R)$, где $F_0 \equiv f_0A$ и $G_0 \equiv g_0A$. Так как $h(F)$ и $h(G)$ не сравнимы по включению, то F_0 и G_0 не сравнимы по включению. Равенства

$$h(F) \cap h(G) = h(x^m)h(F_0 \cap G_0)h(R) \quad \text{и} \quad h(F) + h(G) = h(x^m)h(F_0 + G_0)h(R)$$

проверяются непосредственно.

ЛЕММА 1.5. Пусть A – область и φ – ее инъективный эндоморфизм. Равносильны следующие условия:

- (1) $A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу;
- (2) $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу;
- (3) A – правое кольцо Безу и $\varphi(a)A = A$ для каждого ненулевого $a \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $R \equiv A_r[x, \varphi]$. Импликация (1) $\implies$ (2) очевидна.

(2) $\implies$ (3). По лемме 1.3 A – правая область Безу и $a \in a\varphi(a)A$ для любого $a \in A$. По лемме 1.2(3) $\varphi(a)A = A$ для каждого ненулевого $a \in A$.

(3) $\implies$ (1). Пусть F – конечно-порожденный ненулевой правый идеал кольца R и $m \equiv \min_{0 \neq f \in F} \deg(f)$. По лемме 1.4(3) существуют ненулевые многочлены $f_1, \dots, f_n$ степени $m \geq 0$ такие, что $F = \sum_{i=1}^n f_i R$. Пусть a_i – ненулевые старшие коэффициенты многочленов f_i ($i = 1, \dots, n$). Так как A – правое кольцо Безу, то существуют $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n \in A$ такие, что

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) c_j = a_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Положим $g \equiv \sum_{i=1}^n f_i b_i \in F$, $h_j \equiv f_j - g c_j \in F$. Тогда $\deg(h_j) < m$. Так как $m \equiv \min_{0 \neq f \in F} \deg(f)$, то получаем равенства $h_j = 0$ и $f_j = g c_j$ ($j = 1, \dots, n$). Поэтому $F = gR$.

ЛЕММА 1.6 [3, 6.90]. Пусть $a_1, \dots, a_m$ – элементы кольца A , и пусть $f_1, \dots, f_k$ – многочлены с целыми коэффициентами от некокоммутирующих переменных $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$. Равносильны следующие условия:

(1) существуют элементы $b_1, \dots, b_n \in A$ такие, что

$$f_i(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) = 0 \quad \text{при } i = 1, \dots, k;$$

(2) для произвольного пирсовского слоя $\bar{A}$ кольца A существуют элементы $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n \in \bar{A}$ такие, что

$$f_i(h(a_1), \dots, h(a_m), \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n) = 0 \quad \text{при } i = 1, \dots, k,$$

где $h: A \rightarrow \bar{A}$ – естественный эпиморфизм.

ЛЕММА 1.7. A – правое кольцо Безу $\iff$ каждый пирсовский слой кольца A является правым кольцом Безу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $\implies$ следует из того, что каждое факторкольцо правого кольца Безу является правым кольцом Безу.

$\Leftarrow$ Пусть $a_1, a_2 \in A$ и $x_1, x_2, y_1y_2, y_3, y_4$ – некокоммутирующие переменные. Обозначим через $f_1(x_1, x_2, y_1y_2, y_3, y_4)$ и $f_2(x_1, x_2, y_1y_2, y_3, y_4)$ многочлены $(x_1y_1 + x_2y_2)y_3 - x_1$ и $(x_1y_1 + x_2y_2)y_4 - x_2$ соответственно. Пусть $\bar{A}$ – произвольный пирсовский слой кольца A и $h: A \rightarrow \bar{A}$ – естественный эпиморфизм. По условию $\bar{A}$ – правое кольцо Безу. Поэтому существуют $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4 \in \bar{A}$ такие, что $f_i(h(a_1), h(a_2), \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_4) = 0$ при $i = 1, 2$. По лемме 1.6 существуют $b_1, b_2, b_3, b_4 \in A$ такие, что $f_i(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4) = 0$ при $i = 1, 2$. Поэтому A – правое кольцо Безу.

ЛЕММА 1.8. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A , $R \equiv A_\varphi[x, \varphi]$, n – натуральное число ≥ 2 и $h: R \rightarrow R/x^nR$ – естественный эпиморфизм.

(1) Если f – многочлен из R такой, что $h(f)$ – ненулевой идемпотент кольца $h(R)$, то свободный член f_0 многочлена f является ненулевым идемпотентом.

(2) Если f – многочлен из R такой, что $h(f)$ лежит в центре кольца $h(R)$, то f_0 лежит в центре кольца R и $f_0 = \varphi(f_0)$.

(3) Если f – многочлен из R такой, что $h(f)$ – идемпотент кольца $h(R)$ и f_0 – центральный идемпотент кольца R , то $h(f) = h(f_0)$.

(4) Если f – такой многочлен из R , что $h(f)$ – центральный идемпотент кольца $h(R)$, то f_0 – центральный идемпотент кольца R , $f_0 = \varphi(f_0) \in A$ и $h(f) = h(f_0)$.

(5) Если f – центральный идемпотент кольца R , то f содержится в кольце A и $f = \varphi(f)$.

(6) Пусть $D(A)$ – множество всех таких центральных идемпотентов e кольца A , что $\varphi(e) = e$. Тогда множество всех центральных идемпотентов кольца R совпадает с $D(A)$ и множество всех центральных идемпотентов кольца $h(R)$ совпадает с $h(D(A))$.

(7) Если кольцо R конечномерно слева, то ${}_{\varphi(A)}\varphi(A)$ – существенный подмодуль модуля ${}_{\varphi(A)}A$.

(8) Если A – полупростое артиново кольцо и R конечномерно слева, то φ – автоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как $h(f) \neq 0$, то $f \neq 0$. По условию $f - f^2 \in x^n R$. Поэтому свободный член $f_0 - f_0^2$ многочлена $f - f^2$ равен нулю и f_0 – идемпотент. Допустим, что $f_0 = 0$. Тогда существует $k \geq 1$ такое, что $f = x^k(a + xg)$, где $0 \neq a \in A$ и $g \in R$. Так как $h(f) \neq 0$, то $k < n$. Тогда a – коэффициент при x^k многочлена $f - f^2 \in x^n R$. Поэтому $a = 0$. Получено противоречие.

(2) Коэффициент при x многочлена $xf - fx$ равен $f_0 - \varphi(f_0)$. Так как $xf - fx \in x^n R$ и $n \geq 2$, то верно равенство $f_0 - \varphi(f_0) = 0$. Поэтому $f_0 = \varphi(f_0)$, откуда $f_0 x = x f_0$. Пусть $a \in A$. Свободный член многочлена $fa - af$ равен $f_0 a - a f_0$. Так как $fa - af \in x^n R$, то верно равенство $f_0 a = a f_0$. Кроме того, $f_0 x = x f_0$. Поэтому f_0 лежит в центре кольца R .

(3) Допустим, что $h(f) = h(f f_0)$. Тогда существует многочлен $g \in R$ такой, что $h(f) = h(1 + xg)h(f_0)$. Так как $h(f_0)$ и $h(f)$ – идемпотенты кольца $h(R)$ и $h(f_0)$ лежит в центре кольца R , то верно равенство $h(1 + xg)h(f_0) = (h(1 + xg))^2 h(f_0)$. Элемент $h(1 + xg)$ обратим в кольце $h(R)$, поскольку элемент $h(xg)$ нильпотентен. Поэтому $h(f_0) = h(1 + xg)h(f_0) = h(f)$.

Допустим, что $h(f) \neq h(f f_0)$. Так как $h(f_0)$ – центральный идемпотент кольца $h(R)$, то $h(1 - f_0)$ – центральный идемпотент кольца $h(R)$. Кроме того, $h(f)$ – идемпотент. Тогда $h(f)h(1 - f_0)$ – ненулевой идемпотент кольца $h(R)$. Кроме того, свободный член многочлена $f(1 - f_0)$ равен нулю. Это противоречит (1).

(4) Согласно (1) и (2) f_0 – центральный идемпотент кольца R и $f_0 = \varphi(f_0) \in A$. Согласно (3) $h(f) = h(f_0)$.

(5) Возьмем целое число $k \geq 2$ такое, что $k > \deg(f)$. Пусть $h^*: R \rightarrow R/x^k R$ – естественный эпиморфизм. Тогда $h^*(f)$ – центральный идемпотент кольца $h^*(R)$. Применим (4) к случаю $h = h^*$. Согласно (4) $f_0 = \varphi(f_0) \in A$ и $h^*(f) = h^*(f_0)$. Тогда $f - f_0 \in x^k R$. Так как $k > \deg(f - f_0)$, то $f = f_0 \in A$.

(6) следует из (4) и (5).

(7) Допустим противное. Тогда $\varphi(A)a \cap \varphi(A) = 0$ для некоторого ненулевого $a \in A$. Достаточно доказать, что бесконечная сумма $\sum_{n=0}^{\infty} R x^{n+1} \varphi^n(a)$ является прямой суммой. Для каждого n все коэффициенты всех многочленов из $R x^{n+1} \varphi^n(a)$ содержатся в $\varphi^{n+1}(A) \varphi^n(a)$. Остается доказать, что сумма аддитивных групп $\varphi^{i+1}(A) \varphi^i(a)$ является прямой суммой. Допустим противное. Тогда $\sum_{i=k}^n b_i = 0$ для некоторого $b_i \in \varphi^{i+1}(A) \varphi^i(a)$, и можно считать, что $b_k \neq 0$. Тогда

$$b_k \in \sum_{i=k+1}^n \varphi^{i+1}(A) \varphi^i(a) \subseteq \varphi^{k+1}(A).$$

Поэтому $\varphi^{k+1}(A) \varphi^k(a) \cap \varphi^{k+1}(A) \neq 0$; получено противоречие.

(8) Так как $\varphi(A)$ – полупростое артиново кольцо, то $\varphi(A) \varphi(A)$ – прямое слагаемое модуля $\varphi(A) A$. Согласно (2) $\varphi(A) \varphi(A)$ – существенный подмодуль в $\varphi(A) A$. Поэтому $\varphi(A) = A$.

ЛЕММА 1.9. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A , $R \equiv A_r[x, \varphi]$, n – натуральное число ≥ 2 , $h: R \rightarrow R/x^n R$ – естественный эпиморфизм, $\mathcal{E}(A)$, $\mathcal{E}(R)$ и $\mathcal{E}(h(R))$ – множества всех пирсовских слоев колец A , R и $h(R)$ соответственно. Допустим, что $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента e кольца A .

(1) Для каждого пирсовского слоя A/P кольца R/PR и $h(R)/h(PR)$ являются пирсовскими слоями колец R и $h(R)$ соответственно. Кроме того, правилами

$s(A/P) = R/PR$ и $t(A/P) = h(R)/h(PR)$ задаются биекции $s: \mathcal{E}(A) \rightarrow \mathcal{E}(R)$ и $t: \mathcal{E}(A) \rightarrow \mathcal{E}(h(R))$.

(2) Если A/P – пирсовский слой кольца A , то $\varphi(P) \subseteq P$, φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ кольца A/P и $\bar{\varphi}$ индуцирует естественные кольцевые изоморфизмы

$$\alpha: R/PR \rightarrow (A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$$

и

$$\beta: h(R)/h(PR) \rightarrow (A/P)_r[x, \bar{\varphi}]/x^n(A/P)_r[x, \bar{\varphi}].$$

(3) Пусть $\mathcal{F}$ – класс колец такой, что $X \in \mathcal{F} \iff$ все пирсовские слои кольца X принадлежат $\mathcal{F}$. Тогда $h(R) \in \mathcal{F} \iff$ для каждого пирсовского слоя A/P кольца A кольцо $(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]/x^n(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$ принадлежит $\mathcal{F}$. Кроме того, $R \in \mathcal{F} \iff$ для каждого пирсовского слоя A/P кольца A кольцо $(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$ принадлежит $\mathcal{F}$.

(4) R – правое кольцо Безу $\iff$ для каждого пирсовского слоя A/P кольца A кольцо $(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$ является правым кольцом Безу.

(5) $h(R)$ – правое кольцо Безу $\iff$ для каждого пирсовского слоя A/P кольца A кольцо $(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]/x^n(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$ является правым кольцом Безу.

(6) Если A – полупростое артиново кольцо, то R – кольцо главных правых идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из леммы 1.8(6).

(2) Пусть $P = \sum_{i \in I} e_i A$, где все e_i – центральные идемпотенты в A . Так как $\varphi(e_i) = e_i$ для всех e_i , то верно включение $\varphi(P) \subseteq P$ и φ индуцирует эндоморфизм $\bar{\varphi}$ кольца A/P . Пусть $a + P \in \text{Ker}(\bar{\varphi})$, где $a \in A$. Тогда $\varphi(a) \in P$ и существует конечное подмножество $J \subseteq I$ такое, что $\varphi(a) \in \sum_{j \in J} e_j A$. Обозначим через u центральный идемпотент кольца A , являющийся произведением всех центральных идемпотентов $(1 - e_j)$ ($j \in J$). Тогда $1 - u \in P$, $\varphi(a)u = 0$ и $u = \varphi(u)$ по условию. Поэтому $0 = \varphi(a)\varphi(u) = \varphi(au)$. Тогда $ua = au \in \text{Ker}(\varphi) = 0$. Поэтому $a = (1 - u)a \in P$ и $\bar{\varphi}$ – инъективный эндоморфизм. Непосредственно проверяется, что $\bar{\varphi}$ индуцирует естественные кольцевые изоморфизмы $\alpha: R/PR \rightarrow (A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$ и $\beta: h(R)/h(PR) \rightarrow (A/P)_r[x, \bar{\varphi}]/x^n(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$.

(3) следует из (1) и (2).

(4) и (5) следуют из (3) и леммы 1.7.

(6) Существуют ненулевые ортогональные центральные идемпотенты $e_1, \dots, e_n \in A$ такие, что все $e_i A$ – простые артиновы кольца. По условию $\varphi(e_i) = e_i$ для всех i . Поэтому можно считать, что A – простое артиново кольцо. Тогда R – кольцо главных правых идеалов [4, 3.1].

ЛЕММА 1.10. Пусть A – риккартово справа нормальное кольцо, φ – инъективный эндоморфизм кольца A такой, что $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$ и элемент $\varphi(d)$ обратим в кольце A для каждого регулярного элемента $d \in A$.

(1) $A_r[x, \varphi]$ – редуцированное кольцо.

(2) Если A/P – пирсовский слой кольца A и $h: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм, то $h(A)$ – область, $\varphi(P) \subseteq P$, φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ области $h(A)$ и $\bar{\varphi}(\bar{a})h(A) = h(A)$ для каждого ненулевого $\bar{a} \in h(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Допустим противное. Положим $R \equiv A_r[x, \varphi]$. Существует ненулевой многочлен $f \in R$ такой, что $f^2 = 0$. Пусть $f = x^n(a + xg)$, где $n \geq 0$, $g \in R$, $0 \neq a \in A$. Тогда $0 = f^2 = x^n(a + xg)x^n(a + xg) = x^{2n}(\varphi^n(a)a + xh)$, где $h \in R$. Поэтому $\varphi^n(a)a = 0$. Так как A – нормальное риккартово справа кольцо, то по лемме 1.1(2) $a = ed$, где e – ненулевой центральный идемпотент и d – регулярный элемент. Кроме того, по условию $\varphi(e) = e \neq 0$. Поэтому $0 = \varphi^n(ed)ed = \varphi^n(d)de$. Кроме того, либо $n = 0$ и $\varphi^n(d) = d$, либо $n > 0$ и $\varphi^n(d)$ – обратимый элемент по условию. В обоих случаях $\varphi^n(d)d$ – регулярный элемент. Так как $\varphi^n(d)de = 0$, то верно равенство $e = 0$. Получено противоречие.

(2) По лемме 1.1(5) $h(A)$ – область. По лемме 1.9(2) $\varphi(P) \subseteq P$ и φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ области $h(A)$. Пусть $\bar{a} = h(a)$, где $a \in A \setminus P$. Так как A – риккартово справа нормальное кольцо, то по лемме 1.1(2) $a = ed$, где e – центральный идемпотент кольца A , d – регулярный элемент. Поскольку $\bar{a} = h(e)h(d) \neq 0$, то $h(e)$ – ненулевой идемпотент области $h(A)$. Поэтому $h(e) = h(1)$ и $h(eA) = h(A)$. По условию $\varphi(e) = e$ и $\varphi(d)A = A$. Поэтому $\bar{\varphi}(\bar{a})h(A) = h(e)h(\varphi(d)A) = h(eA) = h(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как в кольце A все правые аннуляторы являются идеалами, то A – нормальное кольцо. Импликация (3) $\implies$ (1) очевидна. Импликация (1) $\implies$ (2) следует из того, что все факторкольца правых колец Безу являются правыми кольцами Безу.

(2) $\implies$ (4). По лемме 1.3 A – правое кольцо Безу и $a \in a\varphi(a)A$ для любого $a \in A$. По лемме 1.2 A – риккартово справа правое кольцо Безу, $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$ и элемент $\varphi(a)$ обратим в A для каждого регулярного элемента $a \in A$.

(4) $\implies$ (3). По лемме 1.10(1) $A_r[x, \varphi]$ – редуцированное кольцо. Пусть A/P – пирсовский слой кольца A , $h: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм. По лемме 1.10(2) $h(A)$ – область, $\varphi(P) \subseteq P$, φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ области $h(A)$ и $\bar{\varphi}(\bar{a})h(A) = h(A)$ для каждого ненулевого $\bar{a} \in h(A)$. Так как A – правое кольцо Безу, то $h(A)$ – правое кольцо Безу. По лемме 1.5 $h(A)_r[x, \bar{\varphi}]$ – правое кольцо Безу. По лемме 1.9(4) $A_r[x, \bar{\varphi}]$ – правое кольцо Безу.

2. Доказательство теорем 2, 3 и 4.

ЛЕММА 2.1. Пусть A – кольцо.

(1) Если A – дистрибутивное справа кольцо, то A – нормальное кольцо и все его нильпотентные элементы лежат в $J(A)$.

(2) Если A – квази-инвариантное справа правое кольцо Безу, то A дистрибутивно справа.

(3) Если $A/J(A)$ – строго регулярное кольцо, то A – правое кольцо Безу $\iff A$ дистрибутивно справа.

(4) Если существует нильидеал N кольца A такой, что A/N – строго регулярное кольцо, то A – правое кольцо Безу $\iff A$ дистрибутивно справа.

(5) Для любых $a, b \in A$ существуют $c, d, f, g \in A$ такие, что $1 = c + d$, $ac = bf$, $bd = ag \iff A$ дистрибутивно справа $\iff$ каждый пирсовский слой кольца A дистрибутивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [1, 5.14(1), 8.35 (4)]; (2) и (3) доказаны в [1, 3.26, 3.33].

(4) Так как N – нильидеал, то $N \subseteq J(A)$. Поэтому кольцо $A/J(A)$ изоморфно факторкольцу строго регулярного кольца A/N . Тогда $A/J(A)$ – строго регулярное кольцо и (4) следует из (3).

(5) Первая эквивалентность доказана в [1, 1.17], вторая эквивалентность доказана в [3, 6.94].

ЛЕММА 2.2. Пусть A – строго регулярное кольцо.

(1) A – инвариантное дистрибутивное редуцированное риккартово кольцо Безу, в котором каждый элемент является произведением центрального идемпотента на обратимый элемент.

(2) Если d – регулярный справа элемент кольца A и φ – инъективный эндоморфизм кольца A , то d и $\varphi(d)$ – обратимые элементы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) хорошо известно (см., например, [1, 3.30]); (2) следует из (1).

ЛЕММА 2.3. Пусть A – строго регулярное кольцо, φ – инъективный эндоморфизм кольца A , n – натуральное число, $R \equiv A_r[x, \varphi]$, $h: R \rightarrow R/x^n R$ – естественный эпиморфизм.

(1) $h(R)$ – правое кольцо Безу $\iff h(R)$ дистрибутивно справа.

(2) Если $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента e кольца A , то для каждого главного правого идеала T кольца R существуют ортогональные идемпотенты $e_0, \dots, e_{n-1} \in A$ такие, что все e_i лежат в центре кольца R и $h(T) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} h(e_i)h(x^i R)$ – идеал кольца $h(R)$ (некоторые из e_i могут быть равны нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Идеал $h(xR)$ кольца $h(R)$ нильпотентен. Так как $h(R)/h(xR) \cong A$, то $h(R)/h(xR)$ – строго регулярное кольцо. Поэтому (1) следует из леммы 2.1(4).

(2) Положим $T_0 \equiv T$. Пусть $T_0 = f^{(0)}R \neq 0$ и $f^{(0)} = a_0 + xg^{(0)}$, где $a_0 \in A$ и $g^{(0)} \in R$. По лемме 2.2(3) $a_0 = e_0 d_0$, где e_0 – центральный идемпотент и d_0 – обратимый элемент. Так как $\varphi(e_0) = e_0$, то e_0 – центральный идемпотент кольца R и $T_0 = e_0(d_0 + xg^{(0)})R \oplus x(1 - e_0)g^{(0)}R$. Положим $f^{(1)} \equiv (1 - e_0)g^{(0)} \in R$, $T_1 \equiv xf^{(1)}R$. Пусть $f^{(1)} = a_1 + xg^{(1)}$, где $a_1 \in A$ и $g^{(1)} \in R$. По лемме 2.2(3) $a_1 = e_1 d_1$, где e_1 – центральный идемпотент и d_1 – обратимый элемент. Так как $\varphi(e_1) = e_1$, то e_1 – центральный идемпотент кольца R и $T_1 = e_1 x(d_1 + xg^{(1)})R \oplus x^2(1 - e_1)g^{(1)}R$. Положим $f^{(2)} \equiv (1 - e_1)g^{(1)} \in R$, $T_2 \equiv xf^{(2)}R$. Повторим эти действия несколько раз. Так как многочлен $f^{(0)}$ имеет конечную степень, то в конце концов мы получим прямое разложение

$$T = \bigoplus_{i=0}^{n-1} e_i x^i (d_i + xg^{(i)})R,$$

где $g^{(i)} \in R$, d_i – обратимые элементы кольца A , e_i – ортогональные идемпотенты кольца A , лежащие в центре кольца R ($i = 0, \dots, n-1$). Так как $h(xg^{(i)})$ – нильпотентные элементы кольца $h(R)$ и $h(d_i)$ – обратимые элементы кольца $h(A)$, то $h(d_i + xg^{(i)})$ – обратимые элементы кольца $h(R)$ для всех i . Поэтому $h(x^i(d_i + xg^{(i)})R) = h(x^i R)$ для всех i . Кроме того, $h(e_i)$ – ортогональные идемпотенты кольца $h(A)$, лежащие в центре кольца $h(R)$ ($i = 0, \dots, n-1$). Тогда

$$h(T) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} h(e_i)h(x^i(d_i + xg^{(i)})R) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} h(e_i)h(x^i R)$$

– идеал кольца $h(R)$.

ЛЕММА 2.4. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A . Равносильны следующие условия:

- (1) $A_r[x, \varphi]$ – нормальное кольцо;
- (2) $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$ – нормальное кольцо;
- (3) $A_r[x, \varphi]/x^n A_r[x, \varphi]$ – нормальное кольцо для каждого натурального числа n ;
- (4) A – нормальное кольцо и $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $R \equiv A_r[x, \varphi]$. Импликация (3) $\implies$ (2) очевидна.

(2) $\implies$ (4). Пусть $h: R \rightarrow R/x^2 R$ – естественный эпиморфизм. Так как $A \cap \text{Ker}(h) = 0$, то кольцо A изоморфно подкольцу нормального кольца $h(R)$. Поэтому A – нормальное кольцо. Пусть e – центральный идемпотент кольца A . Тогда $h(e)$ – идемпотент нормального кольца $h(R)$. Поэтому $h(ex) = h(e)h(x) = h(x)h(e) = h(xe)$. С другой стороны, $h(ex) = h(x\varphi(e))$. Тогда $h(x\varphi(e) - xe) = 0$, откуда $x(\varphi(e) - e) \in x^2 R$. Поэтому $\varphi(e) - e = 0$.

(4) $\implies$ (3). Пусть $h: R \rightarrow R/x^n R$ – естественный эпиморфизм и f – многочлен из R такой, что $h(f)$ – ненулевой идемпотент кольца $h(R)$. Пусть e – свободный член многочлена f . По лемме 1.8(1) e – ненулевой идемпотент нормального кольца A . По условию $\varphi(e) = e$. Тогда $ex = xe$. Поэтому e – центральный идемпотент кольца R . Тогда $h(e)$ – центральный идемпотент кольца $h(R)$. По лемме 1.8(3) $h(f) = h(e)$.

(1) $\iff$ (4). Доказательство импликации (1) $\implies$ (4) аналогично доказательству импликации (2) $\implies$ (4). Доказательство импликации (4) $\implies$ (1) аналогично доказательству импликации (4) $\implies$ (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Импликации (5) $\implies$ (4) и (5) $\implies$ (1) очевидны. Эквивалентность условий (3) и (4) следует из леммы 2.3(1). Импликация (1) $\implies$ (2) следует из того, что каждое инвариантное справа кольцо является нормальным кольцом. Импликация (2) $\implies$ (6) следует из леммы 2.4. Импликация (4) $\implies$ (2) следует из того, что каждое дистрибутивное справа кольцо нормально по лемме 2.1(1).

(6) $\implies$ (5). По лемме 2.2 A – риккартово кольцо Безу, причем элемент $\varphi(d)$ обратим в A для каждого регулярного элемента $d \in A$. Пусть $R \equiv A_r[x, \varphi]$, $h: R \rightarrow R/x^k R$ – естественный эпиморфизм. По теореме 1 R – редуцированное правое кольцо Безу. Тогда $h(R)$ – правое кольцо Безу. По лемме 2.3(2) каждый главный правый идеал кольца $h(R)$ является идеалом в $h(R)$. Поэтому $h(R)$ – инвариантное справа кольцо. По лемме 2.1(2) инвариантное справа правое кольцо Безу $h(R)$ дистрибутивно справа.

ЛЕММА 2.5. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A . Допустим, что $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$ – дистрибутивное справа кольцо.

(1) A дистрибутивно справа и для любого $a \in A$ существует элемент $b \in A$ такой, что $a = a\varphi(a)b$.

(2) A – нормальное кольцо, $\varphi(e) = e$ для любого идемпотента $e \in A$ и для каждого регулярного справа элемента $d \in A$ элемент $\varphi(d)$ обратим в кольце A .

(3) A – риккартово редуцированное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R \equiv A_r[x, \varphi]$ и $h: R \rightarrow R/x^2R$ – естественный эпиморфизм.

(1) Так как $A \cong h(R)/h(xR)$, то A – дистрибутивное справа кольцо. Пусть $a \in A$. По лемме 2.1(5) для элементов $h(a)$ и $h(x)$ дистрибутивного справа кольца $h(R)$ существуют многочлены $f, c, d \in R$ такие, что $h(a)h(f) = h(x)h(c)$ и $h(x)h(1-f) = h(a)h(d)$. Поэтому существуют многочлены $v, w \in R$ такие, что $af = xc + x^2v$ и $x(1-f) = ad + x^2w$. Приравнявая свободные члены в первом равенстве и коэффициенты при x во втором равенстве, получим равенства $af_0 = 0$ и $1 - f_0 = \varphi(a)d_1$, где f_0 – свободный член многочлена f и $d_1 \equiv b$ – коэффициент при x многочлена d . Поэтому $a = a(1 - f_0) = a\varphi(a)b$.

(2) По лемме 2.1(1) дистрибутивное справа кольцо A является нормальным кольцом. Поэтому оставшиеся утверждения следуют из (1), леммы 1.1(4) и леммы 1.1(6).

(3) Пусть a – произвольный нильпотентный элемент кольца A . Согласно (1) существует элемент $b \in A$ такой, что $a(1 - \varphi(a)b) = 0$. Так как $\varphi(a)$ – нильпотентный элемент, то $\varphi(a) \in J(A)$ по лемме 2.1(1). Поэтому $1 - \varphi(a)b$ – обратимый элемент. Тогда $0 = a(1 - \varphi(a)b)(1 - \varphi(a)b)^{-1} = a$ и A – редуцированное кольцо. По лемме 1.1(1) все правые аннуляторы элементов из A являются идеалами в A . По лемме 1.2(2) A – риккартово кольцо.

ЛЕММА 2.6. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A , $R \equiv A_r[x, \varphi]$, n – натуральное число ≥ 2 . Равносильны следующие условия:

- (1) R/x^nR – дистрибутивное справа кольцо;
- (2) для каждого пирсовского слоя A/P кольца A эндоморфизм φ индуцирует естественным образом инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ кольца A/P и $(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]/x^n(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$ – дистрибутивное справа кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}$ – класс всех дистрибутивных справа колец. По лемме 2.1(5) $X \in \mathcal{F} \iff$ все пирсовские слои кольца X принадлежат $\mathcal{F}$. Пусть e – произвольный центральный идемпотент кольца A . Если $\varphi(e) = e$, то эквивалентность (1) $\iff$ (2) следует из леммы 1.9(3). Поэтому достаточно доказать, что $\varphi(e) = e$, если выполняется (1) или (2).

Допустим, что выполнено (1). Тогда кольцо R/x^2R дистрибутивно справа, поскольку R/x^2R – гомоморфный образ дистрибутивного справа кольца R/x^nR . По лемме 2.5(2) $\varphi(e) = e$.

Допустим, что выполнено (2). Пусть A/P – любой пирсовский слой кольца A и $\pi: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм. Так как каждое кольцо является подпрямым произведением своих пирсовских слоев [3, 6.89(10)], то достаточно доказать, что $\varphi(e) - e \in P$. Так как $(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]/x^2(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$ – гомоморфный образ дистрибутивного справа кольца $(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]/x^n(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$, то $(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]/x^2(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$ – дистрибутивное справа кольцо. По лемме 2.5(2) $\bar{\varphi}(\pi(e)) = \pi(e)$. Поэтому $\varphi(e) - e \in P$.

ЛЕММА 2.7. Пусть A – область и φ – ее инъективный эндоморфизм. Равносильны следующие условия:

- (1) $A_r[x, \varphi]/x^2A_r[x, \varphi]$ – дистрибутивное справа кольцо;
- (2) $A_r[x, \varphi]/x^nA_r[x, \varphi]$ – дистрибутивное справа кольцо для каждого натурального числа n ;
- (3) A дистрибутивно справа и $\varphi(a)A = A$ для каждого ненулевого $a \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $(2) \Rightarrow (1)$ очевидна. Импликация $(1) \Rightarrow (3)$ следует из леммы 2.5.

$(3) \Rightarrow (2)$. Положим $R \equiv A_r[x, \varphi]$. Пусть $h: R \rightarrow R/x^n R$ – естественный эпиморфизм, F, G и H – произвольные главные правые идеалы кольца R . Достаточно доказать следующее равенство:

$$h(F) \cap (h(G) + h(H)) = h(F) \cap h(G) + h(F) \cap h(H). \quad (*)$$

Если любые два из трех правых идеалов $h(F), h(G), h(H)$ не сравнимы по включению, то равенство $(*)$ следует из леммы 1.4(5). Если либо $h(F) \subseteq h(G)$, либо $h(F) \subseteq h(H)$, то равенство $(*)$ проверяется непосредственно. Если либо $h(F) \supseteq h(G)$, либо $h(F) \supseteq h(H)$, то равенство $(*)$ следует из модулярного закона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Так как все гомоморфные образы дистрибутивных справа колец являются дистрибутивными справа кольцами, то импликация $(2) \Rightarrow (1)$ следует из того, что $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$ – гомоморфный образ кольца $A_r[x, \varphi]/x^n A_r[x, \varphi]$, если $n \geq 2$. Импликация $(1) \Rightarrow (3)$ следует из леммы 2.5.

$(3) \Rightarrow (2)$. Дистрибутивное справа кольцо A является нормальным кольцом по лемме 2.1(1). Пусть A/P – произвольный пирсовский слой кольца A и $h: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм. По лемме 1.10(2) $h(A)$ – область, $\varphi(P) \subseteq P$, φ индуцирует инъективный эндоморфизм $\bar{\varphi}$ области $h(A)$ и $\bar{\varphi}(\bar{a})h(A) = h(A)$ для каждого ненулевого $\bar{a} \in h(A)$. По лемме 2.7 $h(A)_r[x, \bar{\varphi}]/x^n h(A)_r[x, \bar{\varphi}]$ – дистрибутивное справа кольцо. По лемме 2.6 $A_r[x, \varphi]/x^n A_r[x, \varphi]$ – дистрибутивное справа кольцо.

ЛЕММА 2.8. (1) *Каждое ортогонально конечное кольцо является прямо-конечным.*

(2) *Если каждое примитивное справа факторкольцо кольца A либо ортогонально конечно, либо прямо-конечно, то A – прямо-конечное кольцо.*

(3) *Если A – PI-кольцо, то A – прямо-конечное кольцо, у которого все примитивные справа факторкольца являются артиновыми кольцами.*

(4) *Если A – бирегулярное кольцо, то все пирсовские слои кольца A являются простыми кольцами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в [5, 19.40].

(2) Пусть $a, b \in A$ и $ab = 1$. Достаточно доказать, что ba – обратимый элемент. Положим $x \equiv 1 - ba$. Если $x \in J(A)$, то $ba = 1 - x$ – обратимый элемент. Допустим, что $x \notin J(A)$. Тогда существует примитивное справа факторкольцо A/P такое, что $h(x) \neq 0$, где $h: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм. Согласно (1) $h(A)$ – прямо-конечное кольцо. Так как $h(a)h(b) = h(1)$, то $h(b)h(a) = h(1)$. С другой стороны, $h(b)h(a) \neq h(1)$, поскольку $h(1) - h(b)h(a) = h(x) \neq 0$. Получено противоречие.

(3) следует из (2) и того, что каждое примитивное справа PI-кольцо является артиновым кольцом.

(4) Пусть A/P – произвольный пирсовский слой кольца A , $h: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм, a – элемент кольца A такой, что $h(a)$ – ненулевой элемент кольца $h(A)$. Так как A – бирегулярное кольцо, то существует центральный идемпотент e кольца A такой, что $AaA = eA$. Тогда $h(eA) = h(AaA) \neq 0$ и $e \notin P$. Так как A/P – пирсовский слой кольца A и e – центральный идемпотент кольца A , не лежащий в идеале P , то $h(1) = h(e) \in h(AaA)$. Поэтому A/P – простое кольцо.

ЛЕММА 2.9. Пусть A – прямо-конечное кольцо, φ – инъективный эндоморфизм кольца A . Допустим, что $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу.

(1) $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$.

(2) Для каждого регулярного справа элемента $d \in A$ элемент $\varphi(d)$ обратим в A .

(3) Верно равенство $\varphi(A) \cap J(A) = 0$. Следовательно, если φ – автоморфизм, то A полупрimitивно.

(4) Если φ отображает первичный радикал N кольца A внутрь $J(A)$, то A полупервично. Следовательно, если $\varphi(N) \subseteq N$, то A полупервично.

(5) Если φ – автоморфизм и B – идеал кольца A такой, что $\varphi(B) = B$, то $B^2 = B$ и A/B – полупрimitивное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть e – центральный идемпотент кольца A . Из леммы 1.3(1) и того, что e – центральный идемпотент, следует существование элементов $f_0, g_0, u_0, v_0, b, c \in A$ таких, что выполнены следующие равенства:

- (i) $e = (ef_0)(eu_0)$;
- (ii) $(ef_0)(ev_0) = 0$;
- (iii) $1 = \varphi(e)b + g_0v_0$.

Так как A – прямо-конечное кольцо, то eA – прямо-конечное кольцо. Поэтому из (i) следует, что элементы ef_0 и eu_0 обратимы в кольце eA . Тогда из (ii) следует, что $0 = ev_0 = v_0e$. Поэтому из (iii) следует, что $e = e\varphi(e)b$. Следовательно, $e = e\varphi(e)$ для произвольного центрального идемпотента $e \in A$. Так как $1 - e$ также центральный идемпотент, то аналогично получаем, что $1 - e = (1 - e)\varphi(1 - e) = (1 - e)(1 - \varphi(e))$. Тогда $\varphi(e) = e\varphi(e) + (1 - e)\varphi(e) = e + (1 - e)(1 - \varphi(e))\varphi(e) = e$.

(2) Из леммы 1.3(1) и равенства $r(d) = 0$ следует существование $f_0, g_0, u_0, v_0, b \in A$ таких, что $1 = f_0u_0$, $f_0v_0 = 0$, $1 = \varphi(d)b + g_0v_0$. Так как A – прямо-конечное кольцо, то из равенства $1 = f_0u_0$ следует, что f_0 – обратимый элемент. Так как $f_0v_0 = 0$, то $v_0 = 0$. Поэтому из равенства $1 = \varphi(d)b + g_0v_0$ следует, что $1 = \varphi(d)b$. Так как A – прямо-конечное кольцо, то $\varphi(d)$ – обратимый элемент.

(3) Пусть $a \in A$ и $\varphi(a) \in J(A)$. По лемме 1.3(1) существуют $f_0, g_0, u_0, v_0, b \in A$ такие, что верны следующие равенства:

- (i) $a = af_0u_0$;
- (ii) $af_0v_0 = 0$;
- (iii) $1 = \varphi(a)b + g_0v_0$.

Так как $\varphi(a) \in J(A)$, то элемент $1 - \varphi(a)b$ обратим. В силу (iii) элемент g_0v_0 обратим. Тогда элемент v_0 обратим слева. Так как A – прямо-конечное кольцо, то v_0 – обратимый элемент. Поэтому из (ii) следует, что $af_0 = 0$. По (i) $a = af_0u_0 = 0$.

(4) Согласно (3) $\varphi(A) \cap J(A) = 0$. Так как $\varphi(N) \subseteq J(A)$, то $\varphi(N) \subseteq \varphi(A) \cap J(A) = 0$. Поэтому $N = 0$.

(5) Пусть $h: A \rightarrow A/B^2$ – естественный эпиморфизм. Так как $\varphi(B) = B$, то $\varphi(B^2) = B^2$ и автоморфизм φ индуцирует автоморфизм $\bar{\varphi}$ факторкольца $h(A)$. Так как кольцо $h(A)_r[x, \bar{\varphi}]/x^2 h(A)_r[x, \bar{\varphi}]$ является гомоморфным образом правого кольца Безу $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$, то $h(A)_r[x, \bar{\varphi}]/x^2 h(A)_r[x, \bar{\varphi}]$ – правое кольцо Безу. Применяя (3) к автоморфизму $\bar{\varphi}$ кольца $h(A)$, получим, что $h(A)$ – полупрimitивное кольцо. В частности, $h(A)$ – полупервичное кольцо с нильпотентным идеалом $h(B)$. Тогда $h(B) = 0$, откуда $B = B^2$ и $h(A) = A/B$.

ЛЕММА 2.10. Пусть A – такое кольцо, что $A[x]/x^2A[x]$ – правое кольцо Безу.

(1) Если A прямо-конечно, то $B^2 = B$ для каждого его идеала B .

(2) Если каждое примитивное справа факторкольцо кольца A ортогонально конечно, то $B^2 = B$ для каждого идеала B кольца A .

(3) Если A – PI-кольцо, то A – регулярное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из леммы 2.9(5) при $\varphi \equiv 1_A$; (2) следует из (1) и леммы 2.8(2).

(3) Из (2) и леммы 2.8(3) следует, что $B^2 = B$ для каждого идеала B кольца A . Так как A – PI-кольцо и $B^2 = B$ для каждого его идеала B , то A регулярно [6, теорема 1].

ЛЕММА 2.11. Пусть A – бирегулярное кольцо и φ – инъективный эндоморфизм кольца A такой, что $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$.

(1) Если все пирсовские слои кольца A являются артиновыми кольцами, то $A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу.

(2) Если A – PI-кольцо, то $A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A/P – произвольный пирсовский слой кольца A . По лемме 2.8(4) A/P – простое кольцо.

(1) По условию простое кольцо A/P является артиновым. По лемме 1.9(6) $(A/P)_r[x, \bar{\varphi}]$ – кольцо главных правых идеалов. По лемме 1.9(4) $A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу.

(2) По лемме 2.8(3) простое PI-кольцо A/P является артиновым кольцом. Согласно (1) $A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Импликация (1) $\implies$ (2) следует из того, что все факторкольца правых колец Безу являются правыми кольцами Безу. Импликация (2) $\implies$ (3) следует из леммы 2.10(3) и того, что каждое кольцо, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром, является PI-кольцом.

(3) $\implies$ (1). Так как A – регулярное кольцо, являющееся конечно-порожденным модулем над своим центром, то A – бирегулярное кольцо [7, теорема 6.3]. По лемме 2.11(2) $A[x]$ – правое кольцо Безу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. Пусть φ – автоморфизм кольца A . Равносильны следующие условия:

(1) A – правое или левое кольцо Голди и $A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу;

(2) A – правое или левое кольцо Голди и $A_r[x, \varphi]/x^2A_r[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу;

(3) $A_r[x, \varphi]$ – кольцо главных правых идеалов;

(4) $A_r[x, \varphi]/x^2A_r[x, \varphi]$ – кольцо главных правых идеалов;

(5) A – артиново полупростое кольцо и $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (5) $\implies$ (3) следует из леммы 1.9(6). Импликации (3) $\implies$ (4), (4) $\implies$ (2), (3) $\implies$ (1) и (1) $\implies$ (2) проверяются непосредственно.

(2) $\implies$ (5). По лемме 2.8(1) A – прямо-конечное кольцо. По леммам 2.9(3) и 2.9(1) A – полупрimitивное кольцо и $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$. Так как A – полупервичное правое или левое кольцо Голди, то A – правый или левый порядок в полупростом артиновом кольце Q . По лемме 2.9(2) для каждого регулярного

элемента $d \in A$ элемент $\varphi(d)$ обратим в A . Кроме того, φ – автоморфизм. Поэтому каждый регулярный элемент кольца A обратим в A . Тогда $A = Q$.

ЛЕММА 2.13. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A такой, что $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$ – левое кольцо Безу.

(1) Для каждого $a \in A$ существуют $f_0, g_0, u_0, v_0, b, c \in A$ такие, что верны следующие равенства:

- (i) $a = u_0 f_0 a$;
- (ii) $v_0 f_0 a = 0$;
- (iii) $\varphi(u_0)\varphi(g_0) = ba$;
- (iv) $\varphi(v_0)\varphi(g_0) = 1 - ca$.

(2) Если кольцо A прямо-конечно, то A полупрimitивно, каждый его регулярный слева элемент обратим и $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$.

(3) Если A – правое или левое кольцо Голди, то A – полупростое артиново кольцо и $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Положим $R \equiv A_r[x, \varphi]$. Пусть $h: R \rightarrow R/x^2 R$ – естественный эпиморфизм. Так как $h(R)$ – левое кольцо Безу, то $h(Ra + Rx)$ – главный левый идеал кольца $h(R)$. Поэтому существуют многочлены $f, g, u, v \in R$ такие, что $u(fa + gx) - a \in x^2 R$ и $v(fa + gx) - x \in x^2 R$. Пусть f_0, g_0, u_0, v_0 – свободные члены многочленов f, g, u, v соответственно. Пусть f_1, u_1, v_1 – канонические коэффициенты при x многочленов f, u, v соответственно. Свободные члены и коэффициенты при x многочленов $u(fa + gx) - a$ и $v(fa + gx) - x$ равны нулю. Поэтому получаем следующие равенства: $u_0 f_0 a = a$, $v_0 f_0 a = 0$, $(u_1 f_0 + \varphi(u_0)f_1)a + \varphi(u_0)\varphi(g_0) = 0$, $(v_1 f_0 + \varphi(v_0)f_1)a + \varphi(v_0)\varphi(g_0) = 1$. Теперь можно положить $b \equiv -u_1 f_0 - \varphi(u_0)f_1$, $c \equiv v_1 f_0 + \varphi(v_0)f_1$.

(2) Пусть $a \in A$. Согласно (1) существуют $f_0, g_0, u_0, v_0, b, c \in A$ такие, что верны следующие равенства:

- (i) $a = u_0 f_0 a$;
- (ii) $v_0 f_0 a = 0$;
- (iii) $\varphi(u_0)\varphi(g_0) = ba$;
- (iv) $\varphi(v_0)\varphi(g_0) = 1 - ca$.

Допустим, что $a \in J(A)$. Тогда элемент $1 - ca$ обратим. В силу (iv) элемент $\varphi(v_0)$ обратим справа. Так как A прямо-конечно, то элемент $\varphi(v_0)$ обратим. Кроме того, из (ii) следует равенство $\varphi(v_0)\varphi(f_0 a) = 0$. Поэтому $\varphi(f_0 a) = 0$, откуда $f_0 a = 0$. В силу (i) $a = u_0(f_0 a) = 0$. Поэтому A полупрimitивно.

Допустим, что a – регулярный слева элемент. В силу (i) $1 - u_0 f_0 \in \ell(a) = 0$. Поэтому элемент u_0 обратим справа. Так как A прямо-конечно, то u_0 обратим. Поэтому $\varphi(u_0)$ обратим. В силу (iii) $\varphi(g_0) = (\varphi(u_0))^{-1}ba$. Из этого равенства и из (iv) следует равенство $1 = ca + \varphi(v_0)(\varphi(u_0))^{-1}ba$. Поэтому a – обратимый слева элемент прямо-конечного кольца A . Тогда a обратим.

Допустим, что a – центральный идемпотент в A . Так как A прямо-конечно, то кольцо Aa прямо-конечно. Согласно (i) $(u_0 a)(f_0 a) = a$ – единица прямо-конечного кольца Aa . Поэтому $f_0 a$ – обратимый элемент кольца Aa . Кроме того, $(v_0 a)(f_0 a) = 0$ в силу (ii).

Тогда $0 = v_0 a = a v_0$. Кроме того, $1 - ca = \varphi(v_0)\varphi(g_0)$ в силу (iv). Поэтому

$$\begin{aligned}(1-a)\varphi(a) &= \varphi(a)(1-a)(1-ca) = (1-a)\varphi(a)(1-ca) \\ &= (1-a)\varphi(a)\varphi(v_0)\varphi(g_0) = (1-a)\varphi(av_0)\varphi(g_0) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi(a) = a\varphi(a) \in aA$. Так как $1-a$ – центральный идемпотент и $\varphi(a) \in aA$ для произвольного центрального идемпотента $a \in A$, то $\varphi(1-a) \in (1-a)A$, откуда $a(1-\varphi(a)) = a\varphi(1-a) = 0$. Тогда $a = a\varphi(a) + a(1-\varphi(a)) = a\varphi(a) = \varphi(a)$.

(3) По лемме 2.8(1) конечномерное слева кольцо A прямо-конечно. В силу (2) A полупрimitивно, каждый его регулярный слева элемент обратим и $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$. Полупервичное правое или левое кольцо Голди A является правым или левым порядком в полупростом артиновом кольце Q . Так как все регулярные элементы кольца A обратимы, то $A = Q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. Пусть φ – инъективный эндоморфизм кольца A . Тогда равносильны следующие условия:

- (1) $A_r[x, \varphi]$ – кольцо главных левых идеалов;
- (2) A – левое или правое кольцо Голди, $A_r[x, \varphi]$ – конечномерное слева кольцо и $A_r[x, \varphi]/x^2 A_r[x, \varphi]$ – левое кольцо Безу;
- (3) A – артиново полупростое кольцо, φ – автоморфизм и $\varphi(e) = e$ для каждого центрального идемпотента $e \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\implies$ (2) проверяется непосредственно. Импликация (2) $\implies$ (3) следует из лемм 2.13(3) и 1.8(8).

(3) $\implies$ (1). Так как φ – автоморфизм, то $A_r[x, \varphi]$ совпадает с левым кольцом косых многочленов $A_\ell[x, \varphi^{-1}]$. В кольце $A_\ell[x, \varphi^{-1}]$ коэффициенты стоят слева от x и $xa = \varphi^{-1}(a)x$ для всех $a \in A$. Если e – центральный идемпотент кольца A , то $\varphi(e) = e = \varphi^{-1}(e)$. По левостороннему аналогу предложения 2.12 $A_\ell[x, \varphi^{-1}]$ – кольцо главных левых идеалов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1998.
- [2] Hirano Y., Hong C.-Y., Kim J.-Y., Park J. K. On strongly bounded rings and duo rings // Comm. Algebra. 1995. V. 23. № 6. P. 2199–2214.
- [3] Tuganbaev A. A. Distributive Modules and Related Topics. Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 1999.
- [4] Jategaonkar A. V. Left principal ideal rings // Lecture Notes in Math. 1970. V. 123. P. 1–145.
- [5] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979.
- [6] Armendariz E. P., Fisher J. W. Regular P.I.-rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 39. № 2. P. 247–251.
- [7] Michler G. O., Villamayor O. E. On rings whose simple modules are injective // J. Algebra. 1973. V. 25. P. 185–201.