Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Филиппов, О правосимметричных и новиковских
ниль-алгебрах ограниченного индекса, *Матем. заметки*,
2001, том 70, выпуск 2, 289–295

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:49:18

УДК 512.554

О ПРАВОСИММЕТРИЧНЫХ И НОВИКОВСКИХ НИЛЬ-АЛГЕБРАХ ОГРАНИЧЕННОГО ИНДЕКСА

В. Т. Филиппов

Пусть Φ – поле характеристики 0. Доказано, что правосимметричная ниль-алгебра индекса n над Φ является правонильпотентной, а новиковская ниль-алгебра индекса n над Φ – нильпотентной.

Библиография: 5 названий.

Правосимметричными алгебрами называются неассоциативные алгебры, удовлетворяющие тождеству

$$(x, y, z) = (x, z, y), \quad (1)$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ – ассоциатор элементов x, y, z .

В [1] был введен класс правосимметричных алгебр, удовлетворяющих дополнительному тождеству

$$x(yz) = y(xz). \quad (2)$$

Впоследствии (см., например, [2]) алгебры из этого класса получили название *правых алгебр Новикова*. В [2], [3] и в некоторых других работах рассматривались левосимметричные алгебры и левые алгебры Новикова, антиизоморфные соответственно правосимметричным и правым алгебрам Новикова (*левосимметричной алгеброй* называется алгебра, удовлетворяющая тождеству $(x, y, z) = (y, x, z)$, а *левой алгеброй Новикова* – левосимметричная алгебра с тождеством $(xy)z = (xz)y$). В дальнейшем правые алгебры Новикова будем просто называть *алгебрами Новикова*.

В настоящей работе доказана правонильпотентность ниль-алгебр ограниченного индекса над полем характеристики 0, если они являются правосимметричными (теорема 1), и их нильпотентность, если они являются алгебрами Новикова (теорема 2). При доказательстве этих утверждений существенно используется теорема Зельманова [4] о нильпотентности алгебры Ли над полем характеристики 0, удовлетворяющей n -му условию Энгеля.

В дальнейшем для сокращения записи неассоциативные слова вида

$$w = (\dots((x_1 x_2) x_3) \dots) x_n$$

будем записывать без скобок: $w = x_1 x_2 \dots x_n$ и стоящие подряд одинаковые буквы собирать в степень. Например, запись $x_1 x_2^3 x_3^2$ означает слово $((((x_1 x_2) x_2) x_2) x_3) x_3$.

Пусть Φ – поле характеристики 0, V – произвольная неассоциативная алгебра над Φ .

Алгебра V называется *правонильпотентной*, если она удовлетворяет тождеству $x_1 x_2 \dots x_n = 0$ для некоторого натурального n .

Обычным образом определяется нильпотентность алгебры V .

Алгебру V назовем (*правой*) *ниль-алгеброй индекса n* , если в V выполняется тождество

$$x^n = 0, \quad \text{где } x^n = \underbrace{xx \dots x}_n. \quad (3)$$

Правым и левым умножением на x называются соответственно отображения $R_x: y \rightarrow yx$ и $L_x: y \rightarrow xy$ элемента $y \in V$. *Алгеброй умножений* алгебры V называется подалгебра $M(V)$ алгебры эндоморфизмов $\text{End } V$ пространства V , порожденная всеми умножениями R_x и L_x , $x \in V$.

Пусть $[x, y] = xy - yx$ – коммутатор элементов x и y , δ_x – отображение, задаваемое формулой $y \rightarrow [y, x]$, $y \in V$. По определению $\delta_x = R_x - L_x$. Отсюда $L_x = R_x - \delta_x$ и, следовательно, алгебра $M(V)$ порождается всеми операторами R_x и δ_x , $x \in V$, т.е. любой элемент из $M(V)$ является линейной комбинацией M -слов вида $W = M_{x_1} \dots M_{x_k}$, где M_{x_i} – это R_{x_i} либо δ_{x_i} . Число k назовем *M -длиной* M -слова W и обозначим через $d_M(W)$. Число операторов R_{x_i} (соответственно операторов δ_{x_i}) в слове W назовем *R -длиной* (соответственно *δ -длиной*) слова W ; R -длину и δ -длину будем обозначать соответственно через $d_R(W)$ и $d_\delta(W)$. Если M -слово W имеет вид $W = R_{x_1} \dots R_{x_k}$ (соответственно $W = \delta_{x_1} \dots \delta_{x_k}$), то W будем называть *R -словом* (соответственно *δ -словом*).

Обычным образом определим коммутаторы степени k ($k \geq 1$) от элементов фиксированного подмножества X алгебры V : *коммутаторами степени 1* назовем элементы множества X ; если w_1 и w_2 – произвольные коммутаторы степеней k_1 и k_2 соответственно ($k_1, k_2 \geq 1$), то $[w_1, w_2]$ – коммутаторы степени $k = k_1 + k_2$.

Алгебра $V^{(-)}$, полученная операцией коммутирования $[x, y] = xy - yx$ на линейном пространстве алгебры V , называется *коммутаторной алгеброй* алгебры V .

Пусть A – произвольная правосимметричная алгебра над Φ .

Известно, что коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ алгебры A является алгеброй Ли. Действительно, в любой неассоциативной алгебре выполняется тождество

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = (x, y, z) - (x, z, y) + (z, x, y) - (z, y, x) + (y, z, x) - (y, x, z).$$

Отсюда и из тождества (1) следует тождество Якоби

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0.$$

В силу определения ассоциатора и коммутатора тождество (1) можно записать в виде

$$xyz - xzy = x[y, z]. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. В алгебре A выполняется тождество

$$[\dots [t, \underbrace{x, \dots, x}_n] \dots] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^i t x^{n-i} \quad (5)$$

для любого натурального n , $n \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ тождество (5) следует из определения коммутатора. Пусть

$$[\dots [t, x], \underbrace{\dots, x}_{n-1}] = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} x^i t x^{n-1-i}, \quad n \geq 2.$$

Заменим в этом тождестве t на $[t, x]$, а затем используем (4) и формулу

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}$$

для биномиальных коэффициентов. Имеем

$$\begin{aligned} [\dots [t, x], \underbrace{\dots, x}_n] &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} x^i [t, x] x^{n-1-i} \\ &= tx^n - txt^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} x^i tx^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} x^{i+1} tx^{n-1-i} \\ &= tx^n - txt^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} x^i tx^{n-i} - \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1} x^i tx^{n-i} \\ &= tx^n - txt^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} x^i tx^{n-i} \\ &\quad + (-1)^n x^n t - \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1} x^i tx^{n-i} \\ &= tx^n + (-1)^n x^n t + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} x^i tx^{n-i} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i-1} x^i tx^{n-i} \\ &= tx^n + (-1)^n x^n t + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] x^i tx^{n-i} \\ &= tx^n + (-1)^n x^n t + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} x^i tx^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^i tx^{n-i}. \end{aligned}$$

Следовательно, (5) выполняется для любого n . Лемма доказана.

В любой неассоциативной алгебре V выполняется тождество

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n - (x_2 + x_3 + \dots + x_n)^n - \dots \\ &\quad - (x_1 + \dots + x_{n-1})^n + (x_3 + \dots + x_n)^n + \dots \\ &\quad + (-1)^s (x_{s+1} + \dots + x_n)^n + \dots \\ &\quad + (-1)^s (x_1 + \dots + x_{n-s})^n + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} x_1^n + \dots + (-1)^{n-1} x_n^n. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} x^i y x^{n-i-1} = \sum_j \alpha_j u_j^n,$$

где $\alpha_j \in \Phi, u_j \in V$. Поэтому

$$(n-1)! y \frac{\partial}{\partial x} x^n = \sum_j \alpha_j u_j^n, \quad (6)$$

где $y \frac{\partial}{\partial x}$ — оператор дифференциальной подстановки, $\alpha_j \in \Phi, u_j \in V$.

Из определения дифференциальной подстановки и (4) получим в A тождество

$$[t, x] \frac{\partial}{\partial x} x^n = \sum_{i=0}^{n-1} x^i [t, x] x^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} (x^i t x^{n-i} - x^{i+1} t x^{n-1-i}) = t x^n - x^n t.$$

Отсюда

$$t x^n = x^n t + [t, x] \frac{\partial}{\partial x} x^n. \quad (7)$$

Антикоммутативная алгебра B называется *алгеброй, удовлетворяющей k -му условию Энгеля*, если в B выполняется тождество $y x^k = 0$.

ЛЕММА 2. *Если A — правосимметричная ниль-алгебра индекса n , то ее коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ удовлетворяет $(2n-1)$ -му условию Энгеля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3) и (6) в алгебре A выполняется тождество

$$y \frac{\partial}{\partial x} x^n = 0. \quad (8)$$

Применив (3) и (8) к правой части (7), получим тождество

$$t x^n = 0. \quad (9)$$

В силу (5) в алгебре A выполняется тождество

$$[\dots [t, \underbrace{x, \dots, x}_{2n-1}]] = \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i \binom{2n-1}{i} x^i t x^{2n-i-1}.$$

В силу (3) и (9) правая часть этого тождества равна нулю. Следовательно, в A имеет место тождество

$$[\dots [t, \underbrace{x, \dots, x}_{2n-1}]] = 0. \quad (10)$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Правосимметричная ниль-алгебра A индекса n над полем Φ характеристики 0 правоильпотентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (9) для любого $x \in A$ имеем соотношение

$$R_x^n = 0. \quad (11)$$

Отсюда полной линейризацией по x получим соотношение

$$\sum_{\sigma \in S_n} R_{x_{\sigma(1)}} R_{x_{\sigma(2)}} \dots R_{x_{\sigma(n)}} = 0, \quad (12)$$

где σ пробегает симметрическую группу S_n , $x_1, \dots, x_n$ – произвольные элементы из A .

В силу (4) в $M(A)$ выполняется соотношение

$$R_y R_z = R_z R_y + R_{[y,z]}. \quad (13)$$

Используя это соотношение, R -слово $R_{x_{\sigma(1)}} R_{x_{\sigma(2)}} \dots R_{x_{\sigma(n)}}$ можно представить в виде

$$R_{x_{\sigma(1)}} \dots R_{x_{\sigma(n)}} = R_{x_1} \dots R_{x_n} + \sum_i R_{y_{i_1}} \dots R_{y_{i_k}}, \quad (14)$$

где $k < n$, $y_{i_1}, \dots, y_{i_k}$ – коммутаторы от $x_1, \dots, x_n$. Применив (14) к каждому слагаемому, стоящему в левой части (12), после приведения подобных слагаемых, получим соотношение

$$n! R_{x_1} R_{x_2} \dots R_{x_n} + \sum_j \alpha_j R_{z_{j_1}} \dots R_{z_{j_m}} = 0,$$

где $m = m(j) < n$, $\alpha_j \in \Phi$, $z_{j_1}, \dots, z_{j_m}$ – коммутаторы от $x_1, \dots, x_n$. Отсюда

$$R_{x_1} R_{x_2} \dots R_{x_n} = \sum_j \beta_j R_{z_{j_1}} \dots R_{z_{j_m}}, \quad (15)$$

где $\beta_j = -\frac{1}{n!} \alpha_j \in \Phi$. В силу (15) для любого $n' \geq n$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_{n'} \in A$ имеем соотношение

$$R_{x_1} R_{x_2} \dots R_{x_{n'}} = \sum_i \beta_i R_{z_{i_1}} \dots R_{z_{i_k}}, \quad (16)$$

где $k = k(i) < n$, $\beta_i \in \Phi$, $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$ – коммутаторы от $x_1, x_2, \dots, x_{n'}$.

В силу (10) коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ алгебры A удовлетворяет $(2n-1)$ -му условию Энгеля и, следовательно, по теореме Зельманова [4] нильпотентна. Пусть N – индекс нильпотентности алгебры $A^{(-)}$.

Положим в (16) $m = (N-1)(n-1)+1$. Поскольку каждое R -слово $W_i = R_{z_{i_1}} \dots R_{z_{i_k}}$, стоящее в правой части (16), имеет R -длину $k < n$, то найдется хотя бы один коммутатор z_{i_j} степени больше или равной N . Но тогда $z_{i_j} = 0$, $W_i = 0$ и, следовательно, для любых $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$ выполняется соотношение

$$R_{x_1} R_{x_2} \dots R_{x_m} = 0, \quad (17)$$

т.е. алгебра A правонильпотентна индекса $m+1$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Ниль-алгебра Новикова A индекса n над полем Φ характеристики 0 нильпотентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что любая неассоциативная алгебра нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентна ее алгебра умножений. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать нильпотентность алгебры умножений $M(A)$ алгебры A .

Снова через N обозначим индекс нильпотентности алгебры $A^{(-)}$, а через $m + 1$ — индекс правой нильпотентности алгебры A (см. доказательство теоремы 1).

По определению оператора δ и в силу равенства $[A^{(-)}]^N = 0$ для любых $y, x_1, \dots, x_{N-1} \in A$ выполняется тождество

$$y\delta_{x_1}\delta_{x_2}\dots\delta_{x_{N-1}} = [\dots[[y, x_1], x_2], \dots, x_{N-1}] = 0.$$

Следовательно, в $M(A)$ выполняется соотношение

$$\delta_{x_1}\delta_{x_2}\dots\delta_{x_{N-1}} = 0 \quad (18)$$

для любых $x_1, x_2, \dots, x_{N-1} \in A$.

В силу (2) в $M(A)$ выполняется соотношение

$$R_z L_x = R_{xz}.$$

Отсюда и из определения оператора δ получим соотношение

$$R_z \delta_x = R_z(R_x - L_x) = R_z R_x - R_z L_x = R_z R_x - R_{xz}. \quad (19)$$

Используя (19), получаем, что любое M -слово $R_z \delta_{x_1} \dots \delta_{x_k}$ можно представить в виде

$$R_z \delta_{x_1} \dots \delta_{x_k} = \sum_i \alpha_i R_{y_{i_1}} \dots R_{y_{i_{s(i)}}}, \quad (20)$$

где $\alpha_i \in \Phi$, $y_{i_j} \in A$, $s(i) \geq 1$.

Пусть $k = (N-1)(m+1)-1$. Докажем, что $[M(A)]^k = 0$. Поскольку любой элемент из $[M(A)]^k$ является линейной комбинацией M -слов вида $W = M_{x_1} \dots M_{x_t}$, где $t \geq k$, а M_{x_i} — это R_{x_i} либо δ_{x_i} , $i = 1, \dots, t$, то достаточно доказать, что если W — произвольное M -слово такого вида и $d_M(W) = k$, то $W = 0$. Если $d_R(W) = s$, то W имеет вид

$$W = \Delta_0 R_{z_1} \Delta_1 R_{z_2} \Delta_2 \dots \Delta_{s-1} R_{z_s} \Delta_s,$$

где Δ_i — δ -подслова вида $\delta_{x_{i_1}} \dots \delta_{x_{i_t}}$ (для некоторых i δ -подслова Δ_i могут отсутствовать).

Пусть $s \geq m$. Применив (20) к подсловам M -слова W , имеющим вид $R_{z_i} \Delta_i$, слово W мы можем представить в виде

$$W = \sum_j \beta_j \Delta_0 R_{v_{j_1}} \dots R_{v_{j_{t(j)}}},$$

где $\beta_j \in \Phi$, $t(j) \geq m$. Но тогда в силу (17) $W = 0$.

Пусть теперь $s < m$. Тогда

$$d_\delta(W) = d_M(W) - s = (N-1)(m+1) - 1 - s > (N-1)(m+1) - 1 - m = (N-2)(m+1). \quad (21)$$

Предположим, что все подслова $\Delta_0, \dots, \Delta_s$, входящие в W , имеют δ -длину $d_\delta \leq N-2$. Тогда

$$d_\delta(W) \leq (N-2)(s+1) < (N-2)(m+1),$$

что противоречит (21). Следовательно, в W найдется δ -подслово Δ_i , имеющее δ -длину $d_\delta(\Delta_i) \geq N-1$. Но тогда в силу (18) $\Delta_i = 0$ и, следовательно, $W = 0$. Поэтому $[M(A)]^k = 0$, т.е. нильпотентна и алгебра A . Теорема доказана.

Заметим, что в [5, пример 1] построена двумерная ненильпотентная алгебра Новикова, удовлетворяющая тождеству $x(yz) = 0$. Этот пример показывает, что из левого ниль-тождества $x(xx) = 0$ не следует нильпотентность алгебры Новикова.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Балинский А. А., Новиков С. П. Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 5. С. 1036–1039.
- [2] Osborn J. M. Novicov algebras // Nova J. Algebra Geometry. 1992. V. 1. № 1. P. 1–13.
- [3] Винберг Э. Б. Выпуклые однородные области // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. № 3. С. 521–524.
- [4] Зельманов Е. И. Об энгелевых алгебрах Ли // Сиб. матем. ж. 1988. Т. 29. № 5. С. 112–117.
- [5] Зельманов Е. И. Об одном классе локальных трансляционно инвариантных алгебр Ли // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 6. С. 1294–1297.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: filipp@math.nsc.ru

Поступило
26.01.2000