Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Чеботарев, Вариационные неравенства для оператора типа Навье–Стокса и односторонние задачи для уравнений вязкой теплопроводной жидкости, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 296–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:34:07

УДК 517.95

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ТИПА НАВЬЕ–СТОКСА И ОДНОСТОРОННИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

А. Ю. Чеботарев

Рассматривается класс стационарных вариационных неравенств для операторов типа Навье–Стокса, в виде которых можно представить задачи с нелинейными краевыми условиями для уравнений динамики вязкой жидкости. Основной результат – теорема о разрешимости – применяется для исследования односторонних краевых задач для системы уравнений тепловой конвекции вязкой жидкости.

Библиография: 19 названий.

1. Введение

Моделирование нелинейных условий типа неравенств в задачах гидродинамики приводит к вариационным неравенствам для соответствующих гидродинамических операторов [1]–[9]. Классические краевые условия (например, условия Дирихле или Неймана) являются при этом частным случаем субдифференциальных соотношений, связывающих гидродинамические параметры; с другой стороны, рассмотрение субдифференциальных краевых задач позволяет исследовать широкий класс физически интересных постановок. В работах [1]–[9] рассматривались вариационные неравенства для моделей гидродинамики, не учитывающих тепловых эффектов. Учет влияния теплопроводности жидкости на ее физические характеристики приводит в рамках модели Буссинеска к появлению дополнительных нелинейных операторов по сравнению с классической моделью Навье–Стокса. В настоящей работе рассматривается класс стационарных неравенств для операторов типа Навье–Стокса, связанных с моделью динамики вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости (модель тепловой конвекции). Естественно ожидать, что результаты для таких вариационных неравенств будут аналогичны соответствующим результатам для неравенств в модели однородной несжимаемой вязкой жидкости без учета тепловых эффектов, поскольку характер нелинейности соответствующих операторов не изменяется.

Результат о разрешимости вариационных неравенств для операторов типа Навье–Стокса применяется в данной работе к односторонним краевым задачам для системы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00256.

Буссинеска. Отметим, что указанным способом можно также исследовать задачи тепловой конвекции вязкой жидкости с краевыми условиями, не содержащими неравенств, рассмотренными в [10]–[19], а также с различными нелинейными краевыми условиями на скорость и температуру, аналогичными рассмотренным в [17].

2. Вариационные неравенства для операторов типа Навье–Стокса

Пусть Y и Z – вещественные гильбертовы пространства такие, что $Y \subset Z$, Y плотно в Z и вложение Y в Z компактно. Отождествляя Z с его сопряженным и обозначая через Y' сопряженное к Y , можно рассматривать Z как подпространство в Y' , $Y \subset Z \subset Y'$. Обозначим через $\|\cdot\|$, $|\cdot|$, $\|\cdot\|_*$ нормы в пространствах Y , Z , Y' соответственно, а через (f, y) – значение функционала $f \in Y'$ на элементе $y \in Y$, совпадающее со скалярным произведением в Z , если $f \in Z$, $((\cdot, \cdot))$ – скалярное произведение в пространстве Y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор $N: Y \rightarrow Y'$ будем называть *оператором типа Навье–Стокса*, если

$$Ny = Ay + B[y] + Ty,$$

где

1) $A: Y \rightarrow Y'$ – линейный непрерывный оператор такой, что

$$(Ay, z) = (Az, y) \quad \exists \alpha > 0: (Ay, y) \geq \alpha \|y\|^2 \quad \forall y, z \in Y. \quad (1)$$

2) $B[y] = B(y, y)$, $B: Y \times Y \rightarrow Y'$ – билинейный непрерывный оператор, удовлетворяющий условиям

$$(B(y, z), z) = 0 \quad \forall y, z \in Y; \quad (2)$$

$$\text{отображение } B[y]: Y \rightarrow Y' \text{ слабо непрерывно.} \quad (3)$$

3) $T: Y \rightarrow Y'$ – компактный оператор.

Пусть $\Phi: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = (-\infty; +\infty]$ – выпуклый, полунепрерывный снизу функционал, являющийся собственным в следующем смысле:

$$\exists y_0 \in Y \quad \Phi(y_0) < +\infty, \quad \forall y \in Y \quad \Phi(y) > -\infty.$$

Через $\partial\Phi(y)$ обозначаем субдифференциал Φ в точке y , т.е. множество

$$\partial\Phi(y) = \{g \in Y': \Phi(z) - \Phi(y) \geq (g, z - y) \quad \forall z \in Y\}.$$

Главным объектом исследования в данном разделе будет следующее включение (уравнение с многозначным оператором)

$$-(Ny - F) \in \partial\Phi(y). \quad (4)$$

Здесь $F \in Y'$ – заданный элемент.

В силу определения $\partial\Phi(y)$ включение (4) равносильно вариационному неравенству

$$(Ny - F, y - z) + \Phi(y) - \Phi(z) \leq 0 \quad \forall z \in Y, \quad (5)$$

при этом $\Phi(y) < +\infty$.

Как будет показано ниже в разделе 3, в виде (4) или (5) можно записать ряд нелинейных краевых задач для уравнений динамики вязкой теплопроводной жидкости. Для доказательства разрешимости вариационного неравенства (5) воспользуемся результатами о существовании решений неравенств с псевдомонотонными операторами [1, с. 190].

ЛЕММА 1 [1]. *Оператор типа Навье–Стокса N является псевдомонотонным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из слабой непрерывности отображения $y \rightarrow B[y] + Ty$ и монотонности оператора A [1, с. 201].

Пусть $K \subset Y$ – замкнутое выпуклое множество, являющееся эффективным множеством функционала Φ ; при этом

$$\Phi(y) = G(y) + I_K(y), \quad \text{где } I_K(y) - \text{индикаторная функция множества } K \quad (6)$$

$$I_K(y) = \begin{cases} 0, & y \in K, \\ +\infty, & y \notin K, \end{cases}$$

$$G - \text{выпуклый и непрерывный на } K \text{ функционал.} \quad (7)$$

ЛЕММА 2. *Для произвольного $r > 0$ существует решение $y \in K_r$ вариационного неравенства*

$$(Ny - F, y - z) + G(y) - G(z) \leq 0 \quad \forall z \in K_r. \quad (8)$$

Здесь

$$K_r = \{z \in K : \|z\| + |G(z)| \leq r\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя [1, с. 266], определим

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= Y \times \mathbb{R}, & \tilde{K} &= \{\tilde{z} \in \tilde{Y}; & \tilde{z} &= \{z, \alpha\}, \quad z \in K, \quad \alpha \geq G(z)\}, \\ \tilde{N}\tilde{y} &= \{Ny, 0\}, & & \text{где } \tilde{y} = \{y, \xi\} \in \tilde{Y}. \end{aligned}$$

Оператор $\tilde{N}$ является псевдомонотонным, а неравенство (8) равносильно неравенству

$$(\tilde{N}\tilde{y} - \tilde{F}, \tilde{y} - \tilde{z}) \leq 0 \quad \forall \tilde{z} \in \tilde{K}_r, \quad (9)$$

где $\tilde{K}_r = \{\tilde{z} \in \tilde{K} : \tilde{z} = \{z, \alpha\}, \|z\| + |\alpha| \leq r\}$, $\tilde{F} = \{F, -1\}$. В силу ограниченности K_r вариационное неравенство (9) имеет по крайней мере одно решение [1, с. 258].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть для достаточно больших $r > 0$ произвольное решение неравенства (8) удовлетворяет априорной оценке*

$$\|y\| \leq C, \quad (10)$$

где C не зависит от y, r . Тогда множество решений вариационного неравенства (5) непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим оценку решения $\tilde{y}$ неравенства (9), соответствующего решению $y \in K_r$ неравенства (8). Положим в (9) $\tilde{z} = \{y, G(y_0)\}$, $y_0 \in K$. Тогда для $\tilde{y} = \{y, \xi\}$ имеем неравенства

$$G(y) \leq \xi \leq G(y_0). \quad (11)$$

В силу условия (7) множество $\partial G(y_0)$ непусто и, следовательно,

$$G(y) \geq G(y_0) + (\chi, y - y_0), \quad \chi \in \partial G(y_0). \quad (12)$$

Таким образом, из (10)–(12) получаем

$$\begin{aligned} G(y_0) - \|\chi\|_*(C + \|y_0\|) &\leq \xi \leq G(y_0), \\ \|y\| + |\xi| &\leq C_1 = C + |G(y_0)| + \|\chi\|_*(C + \|y_0\|). \end{aligned}$$

Отметим, что постоянная C_1 не зависит от r . Выбирая $r > C_1$, получаем, что $\tilde{y}$ фактически является решением неравенства

$$(\tilde{N}\tilde{y} - \tilde{F}, \tilde{y} - \tilde{w}) \leq 0 \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{K}. \quad (13)$$

Действительно, если $\tilde{w} \in \tilde{K}$ произвольный элемент, то при малых $\varepsilon > 0$

$$\tilde{z} = (1 - \varepsilon)\tilde{y} + \varepsilon\tilde{w} \in K_r \quad \text{при } r > C_1.$$

Тогда из (9) следует (13). Поскольку (13) эквивалентно вариационному неравенству (5), то теорема доказана.

Следуя [5], можно привести достаточные условия на операторы B , T и множество ограничений K , гарантирующие получение априорной оценки (10). В частности, достаточно обосновать “подчиненность” нелинейного оператора $B[u] + T(u)$ оператору A на множестве K ; а именно, для всех $\gamma > 0$ существует $w_\gamma \in K$ такое, что

$$(B[y], w_\gamma) - (Ty, y - w_\gamma) \leq \gamma\|y\|^2 + C_\gamma \quad \forall y \in K,$$

где C_γ не зависит от $y \in K$.

3. Разрешимость односторонних краевых задач для уравнений тепловой конвекции

3.1. Постановка краевых задач. Пусть Ω – ограниченная односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ со связной границей $\Gamma \in C^2$. Рассмотрим движение вязкой теплопроводной жидкости в области Ω , которая описывается следующей системой уравнений:

$$-\nu\Delta u + \operatorname{rot} u \times u + \beta g\theta = -\nabla h + f, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (14)$$

$$-\kappa\Delta\theta + u\nabla\theta = q. \quad (15)$$

Здесь $u = \{u_i\}_1^3$, h и θ – скорость, полный напор и температура жидкости, $\nu = \operatorname{const} > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, $\kappa = \operatorname{const} > 0$ – коэффициент температуропроводности, $g = -(0, 0, g_0)$ – вектор ускорения свободного падения (при этом ось x_3

декартовой системы координат считается направленной вдоль вектора $(-g)$, f – массовая плотность внешних сил, q – объемная плотность источников тепла.

Предположим, что на границе Γ заданы нулевые касательные компоненты вектора скорости

$$u_\tau = u - u_n n = 0, \quad (16)$$

где n – единичный вектор внешней нормали к границе Γ , $u_n = (u \cdot n)$.

Субдифференциальная краевая задача для системы (14), (15) заключается в отыскании решения этой системы, удовлетворяющего условию (16) и субдифференциальным граничным условиям

$$h \in \partial\varphi(u_n, x), \quad (17)$$

$$-\frac{\partial\theta}{\partial n} \in \partial\Psi(\theta, x), \quad x \in \Gamma. \quad (18)$$

Здесь через $\varphi: \mathbb{R} \times \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$, $\Psi: \mathbb{R} \times \Gamma \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ обозначены заданные выпуклые и полунепрерывные снизу по первому аргументу функции, $\varphi \not\equiv +\infty$, $\Psi \not\equiv +\infty$. Под $\partial\varphi(a, x)$ (соответственно $\partial\Psi(a, x)$) понимается субдифференциал φ (соответственно Ψ) по первому аргументу, т.е. множество

$$\partial\varphi(a, x) = \{z \in \mathbb{R}: \varphi(b, x) - \varphi(a, x) \geq z(b - a) \quad \forall b \in \mathbb{R}\}.$$

Наличие второго аргумента x в функциях φ , Ψ связано с тем, что граничные условия (17), (18) могут иметь различный характер на разных участках границы Γ .

Приведем примеры односторонних краевых условий, которые можно записать в виде (17), (18).

ПРИМЕР 1. Пусть заданы две функции $\theta_1(x), \theta_2(x)$, $x \in \Gamma$, $0 < \theta_1(x) \leq \theta_2(x)$, и требуется, чтобы температура $\theta(x)$ на границе Γ принимала значения из отрезка $[\theta_1(x), \theta_2(x)]$. Определим функцию Ψ следующим образом:

$$\Psi(\lambda, x) = \begin{cases} 0, & \lambda \in [\theta_1(x), \theta_2(x)]; \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases} \quad (19)$$

Тогда

$$\partial\Psi(\lambda, x) = \begin{cases} [0, +\infty), & \lambda = \theta_2(x); \\ 0, & \lambda \in (\theta_1(x), \theta_2(x)); \\ (-\infty, 0], & \lambda = \theta_1(x). \end{cases}$$

Условие (18) в данном случае принимает вид односторонних граничных условий на температуру:

$$\begin{aligned} \theta_1(x) \leq \theta(x) \leq \theta_2(x), \quad \frac{\partial\theta}{\partial n} = 0, \quad \text{если } \theta_1(x) < \theta(x) < \theta_2(x), \\ \frac{\partial\theta}{\partial n} \geq 0, \quad \text{если } \theta(x) = \theta_1(x), \quad \frac{\partial\theta}{\partial n} \leq 0, \quad \text{если } \theta(x) = \theta_2(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Далее, выбрав в качестве φ функцию

$$\varphi(\lambda, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda = 0, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad (21)$$

мы дополним краевые условия (20) условием Дирихле для скорости течения

$$u = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (22)$$

ПРИМЕР 2. Пусть граница Γ области течения Ω состоит из участков $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ таких, что

$$\begin{aligned} u &= 0, & x \in \Gamma_0 - \text{непроницаемая часть границы,} \\ u_n &\leq 0, & x \in \Gamma_1 - \text{участок "втекания",} \\ u_n &\geq 0, & x \in \Gamma_2 - \text{участок "вытекания",} \\ \Gamma &= \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{aligned}$$

Зададим функцию φ соотношением

$$\varphi(\lambda, x) = \begin{cases} l(x)\lambda, & \text{если } x \in \Gamma_1, \lambda \leq 0 \text{ или } x \in \Gamma_2, \lambda \geq 0, \\ 0, & \text{если } x \in \Gamma_0, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad (23)$$

где $l(x)$, $x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, – заданная функция. В этом случае помимо односторонних граничных условий для температуры (20) из (17) вытекают односторонние условия для скорости и полного напора

$$\begin{aligned} u_n(h-l) &= 0, \quad h \geq l, \quad u_n \geq 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ h &\leq l, \quad u_n \leq 0, \quad x \in \Gamma_2, \quad u_n = 0, \quad x \in \Gamma_0. \end{aligned} \quad (24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полагая

$$\varphi(\lambda, x) = \begin{cases} 0, & \lambda = u_0(x), \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad \Psi(\lambda, x) = \begin{cases} 0, & \lambda = \theta_0(x), \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases}$$

можно записать в виде (17), (18) классические граничные условия

$$u_n = u_0(x), \quad \theta = \theta_0(x), \quad x \in \Gamma. \quad (25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно рассмотреть обобщение “разделенных” условий (17), (18), если обозначить

$$y = \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} h \\ -\partial\theta/\partial n \end{pmatrix}, \quad \gamma y = \begin{pmatrix} u_n \\ \theta|_{\Gamma} \end{pmatrix}$$

и определить выпуклую функцию $\xi(\mu, x): \mathbb{R}^2 \times \Gamma \rightarrow (-\infty, +\infty]$, полунепрерывную снизу по μ , причем $\xi \not\equiv +\infty$. Тогда субдифференциальное условие

$$z \in \partial\xi(\gamma y, x), \quad x \in \Gamma, \quad (26)$$

позволяет описывать различные, более сложные краевые условия, связывающие скорость и температуру жидкости на границе Γ .

3.2. Обобщенное решение задачи (14)–(18). Обозначим через $\mathcal{W}$ множество бесконечно-дифференцируемых в Ω , соленоидальных вектор-функций w таких, что

$$w \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad w_\tau = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Через V , H обозначим замыкание $\mathcal{W}$ в нормах $W_2^1(\Omega)$ и $L^2(\Omega)$ соответственно. Здесь и далее через W_p^1 обозначается обычное пространство Соболева. В качестве скалярных произведений в пространствах V , H выберем билинейные формы

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v \, dx; \quad (u, v)_H = (u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx.$$

Отметим, что норма в V , порождаемая указанным скалярным произведением, эквивалентна норме в $W_2^1(\Omega)$, что вытекает из равенства [3, с. 138]

$$(\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v) = (\nabla u, \nabla v) + \int_{\Gamma} k(u_n v_n) \, ds,$$

справедливого для соленоидальных векторов $u, v \in W_2^1(\Omega)$ с нулевыми касательными составляющими на границе Γ . Здесь $k = k(x)$ – удвоенная средняя кривизна Γ в точке x .

Пусть

$$Y = V \times W_2^1(\Omega), \quad Y_0 = H \times L^2(\Omega),$$

причем вторые сомножители в декартовом произведении пространств являются пространствами скалярных функций; при этом

$$(y, z)_Y = ((u, v)) + (\theta, \zeta)_{W_2^1(\Omega)} \quad \forall y = \{u, \theta\}, \quad z = \{v, \zeta\}.$$

Отождествляя Y_0 с его сопряженным Y'_0 , имеем

$$Y \subset Y_0 = Y'_0 \subset Y'.$$

Через (F, y) будем обозначать значение функционала $F \in Y'$ на элементе $y \in Y$, которое совпадает со скалярным произведением в Y_0 , если $F, y \in Y_0$,

$$(F, y) = (f, u) + \int_{\Omega} \zeta(x) \theta(x) \, dx, \quad F = \{f, \zeta\}, \quad y = \{u, \theta\}.$$

Определим операторы $A: Y \rightarrow Y'$, $B: Y \times Y \rightarrow Y'$ и функционал $\Phi: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = (-\infty; +\infty]$ для всех $y = \{u, \theta\}$, $z = \{v, \zeta\}$, $r = \{w, \xi\}$ следующими соотношениями:

$$(Ay, z) = \nu(\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v) + \kappa(\nabla \theta, \nabla \zeta), \quad (27)$$

$$(B(y, z), r) = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} u \times v) w \, dx, \quad (28)$$

$$(Ty, z) = \beta \int_{\Omega} g \theta v \, dx + \int_{\Omega} u \nabla \theta \zeta \, dx, \quad (29)$$

$$\Phi(y) = \begin{cases} \int_{\Gamma} (\varphi(u_n, x) + \psi(\theta, x)) \, ds, & \text{если } \varphi(u_n(x), x) + \psi(\theta(x), x) \in L^1(\Gamma), \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases} \quad (30)$$

Пусть

$$F = \{f, q\} \in Y', \quad (F, z) = \int_{\Omega} (fv + q\zeta) \, dx,$$

если $f \in L^2(\Omega)$, $q \in L^2(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $y = \{u, \theta\} \in Y$ называется *обобщенным решением задачи* (14)–(18), если для всех $z \in Y$ выполнено неравенство

$$(Ay + B[y] + Ty - F, y - z) + \Phi(y) - \Phi(z) \leq 0. \quad (31)$$

Вариационное неравенство (31) получается путем умножения уравнения импульсов в (14) на $(u - v)$, уравнения для температуры на $(\theta - \varphi)$, интегрирования по частям в Ω и сложения неравенств, полученных после применения условий (17), (18). Покажем, что в определенном смысле справедливо и обратное. Если $y = \{u, \theta\}$, где функции u, θ являются достаточно гладкими, то найдется скалярная функция h (полный напор течения) такая, что тройка u, θ, h удовлетворяет условиям (14)–(18). Действительно, поскольку $u \in V$, то выполняется условие (16) и уравнение неразрывности $\operatorname{div} u = 0$, что вытекает из определения пространства V . Полагая в неравенстве (31) для произвольного $w \in V \cap C_0^\infty(\Omega)$

$$y = \{u, \theta\}, \quad z = \{u \pm w, \theta\},$$

получаем

$$\nu(\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} w) + \int_{\Omega} (\operatorname{rot} u \times u)w \, dx + \beta(\theta g, w) - (f, w) = 0.$$

Последнее равенство влечет выполнение уравнения импульсов в (14) для некоторой скалярной функции h [18, с. 27].

Умножив указанное уравнение на $(u - v)$, проинтегрировав по Ω и сравнив затем с неравенством (31), где в качестве $z \in Y$ выбрана пара $\{v, \theta\}$, получаем

$$\int_{\Gamma} (\varphi(v_n, x) - \varphi(u_n, x)) \, ds \geq \int_{\gamma} h(v_n - u_n) \, ds.$$

Следовательно [19, с. 134], справедливо условие (17). Аналогичным образом, полагая в (31) $z = \{u, \theta \pm \zeta_0\}$, где $\zeta_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем уравнение (15) и включение (18).

3.3. Разрешимость односторонних краевых задач.

ЛЕММА 3. Оператор $N: Y \rightarrow Y'$, где $Ny = Ay + B[y] + Ty$, а операторы A, B, T определены в (27)–(29), является оператором типа Навье–Стокса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка условий (1), (2) очевидна. Условие (3) проверяется аналогично [5]. Осталось доказать компактность оператора (29). Пусть $y_m = \{u_m, \theta_m\}$ – ограниченная в Y последовательность. Тогда, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, заключаем

$$u_m \rightarrow u \text{ слабо в } V, \text{ сильно в } H, L^4(\Omega), \quad (32)$$

$$\theta_m \rightarrow \theta \text{ слабо в } W_2^1(\Omega), \text{ сильно в } L^2(\Omega), L^4(\Omega), L^2(\Gamma). \quad (33)$$

Пусть $z = \{v, \xi\}$, $\|z\|_Y = 1$, $y = \{u, \theta\}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} (Ty_m - Ty, z) &= \beta \int_{\Omega} g(\theta_m - \theta)v \, dx + \int_{\Omega} (u_m \nabla \theta_m - u \nabla \theta)\xi \, dx \\ &\leq \beta \|g\| \|\theta_m - \theta\|_{L^2(\Omega)} \|V\|_H + \|u_m - u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \theta_m\|_{L^2(\Omega)} \|\xi\|_{L^4(\Omega)} \\ &\quad + \|u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \xi\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_m - \theta\|_{L^4(\Omega)} + \int_{\Gamma} (u \cdot n)(\theta_m - \theta)\xi \, ds. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|Ty_m - Ty\|_{Y'} &= \sup_{\|z\|=1} (Ty_m - Ty, z) \\ &\leq C_m (\|\theta_m - \theta\|_{L^2(\Omega)} + \|u_m - u\|_{L^4(\Omega)} + \|\theta_m - \theta\|_{L^4} + \|\theta_m - \theta\|_{L^2(\Gamma)}). \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь

$$C_m = \max(\beta|g|\|v\|, \|\nabla\theta_m\| \|\xi\|_{L^4(\Omega)}, \|u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla\xi\|_{L^2(\Omega)}, \|u_n\|_{L^4(\Gamma)} \|\xi\|_{L^4(\Gamma)})$$

– последовательность, ограниченная в силу (33) и условий $\|v\| \leq 1$, $\|\xi\|_{W_2^1(\Omega)} \leq 1$. Из (34) на основании (32), (33) вытекает, что $Ty_m \rightarrow Ty$ сильно в Y' . Поскольку непрерывность T очевидна, то лемма доказана.

Рассмотрим примеры приложения теоремы 1 к доказательству разрешимости односторонних краевых задач для уравнений тепловой конвекции.

ЗАДАЧА 1. Найти решение системы (14), (15), удовлетворяющее граничным условиям (16), (20), (22).

Как показано в п. 3.1, в качестве функций φ, ψ в граничных условиях (17), (18) выбираются функции (21), (19) соответственно и при этом функция Φ является индикаторной функцией множества $K \subset Y$,

$$K = \{y = \{u, \theta\} : u_n(x) = 0, \theta_1(x) \leq \theta(x) \leq \theta_2(x), x \in \Gamma\}.$$

Таким образом, элемент $y \in K$ называется *обобщенным решением задачи 1*, если

$$(Ay + B[y] + Ty - F, y - z) \leq 0 \quad \forall z \in K. \quad (35)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются следующие условия: $\theta_1, \theta_2 \in L^2(\Gamma)$, $0 < \theta_1(x) \leq \theta_0(x) \leq \theta_2(x)$ почти всюду на Γ , $\theta_0 \in W_2^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $q \in L^2(\Omega)$. Тогда задача 1 разрешима в обобщенном смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 для произвольного $r > 0$ существует решение $y = \{u, \theta\}$ вариационного неравенства

$$\begin{aligned} (Ay + B[y] + Ty - F, y - z) &\leq 0 \quad \forall z \in K_r, \\ K_r &= \{z \in K : \|z\|_Y \leq r\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Получим априорную оценку решения неравенства (36). Рассмотрим семейство срезающих функций [1, с. 116] $\mu_\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon(x) &= 1 && \text{в окрестности } \Gamma = \partial\Omega, \text{ зависящей от } \varepsilon, \\ \mu_\varepsilon(x) &= 0, && \text{если } \rho(x) = \text{dist}(x, \Gamma) \geq \delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon) = \exp(-1/\varepsilon), \\ |\nabla\mu_\varepsilon(x)| &\leq \varepsilon/\rho(x), && \text{если } \rho(x) \leq \delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

В (36) полагаем $z = \{u, \mu_\varepsilon \theta_0\}$, предполагая, что значение $r > 0$ является достаточно большим, т.е.

$$\|\mu_\varepsilon \theta_0\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq r^2 - \|u\|^2. \quad (37)$$

Выбор r , удовлетворяющего (37), будет указан ниже. Тогда

$$\kappa(\nabla \theta, \nabla(\theta - \mu_\varepsilon \theta_0)) + (u \nabla \theta, \theta - \mu_\varepsilon \theta_0) \leq (q, \theta - \mu_\varepsilon \theta_0). \quad (38)$$

Преобразуем второе слагаемое в левой части (38).

$$\begin{aligned} (u \nabla \theta, \theta - \mu_\varepsilon \theta_0) &= (u \nabla(\mu_\varepsilon \theta_0), \theta - \mu_\varepsilon \theta_0) \\ &= (u \nabla \mu_\varepsilon \theta_0, \theta - \mu_\varepsilon \theta_0) + (u \nabla \theta_0 \mu_\varepsilon, \theta - \mu_\varepsilon \theta_0) = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

На основании оценок

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left\| \frac{u}{\rho} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_0\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} \|\theta - \mu_\varepsilon \theta_0\|_{L^4(\Omega)}, \\ |I_2| &\leq \|u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \theta_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|\theta - \mu_\varepsilon \theta_0\|_{L^4(\Omega)}, \end{aligned}$$

где $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega: \rho(x) \leq \delta(\varepsilon)\}$, а также неравенств [1, с. 116]

$$\left\| \frac{u}{\rho} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_V, \quad \|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_V,$$

где $C > 0$ не зависят от u , заключаем

$$|(u \nabla \theta, \theta - \mu_\varepsilon \theta_0)| \leq \alpha \|u\|_V \|\theta - \mu_\varepsilon \theta_0\|_{L^4(\Omega)}. \quad (39)$$

Здесь $\alpha = C(\|\theta_0\|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla \theta_0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Воспользуемся далее неравенством

$$\|\theta\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq C(\|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta\|_{L^2(\Gamma)}^2). \quad (40)$$

Из оценок (38)–(40), с учетом неравенств вложения $W_2^1(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$, $p = 2, 4$, выводим для произвольного $\alpha > 0$ оценку

$$\|\theta\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq \alpha \|u\|^2 + C_\alpha. \quad (41)$$

Здесь постоянная $C_\alpha > 0$ зависит только от α и исходных данных задачи: $\Omega, q, \theta_0, \kappa$. Выбрав в неравенстве (36) $z = \{0, \theta\}$, получим неравенство

$$\nu \|u\|^2 + \beta(\theta g, u) \leq (f, u). \quad (42)$$

Из оценок (41), (42) в силу произвольности $\alpha > 0$ легко вытекают следующие оценки решения неравенства (36):

$$\|u\| \leq C_1, \quad \|\theta\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_2 \quad (43)$$

с постоянными C_1, C_2 , зависящими только от исходных данных $\Omega, q, \theta_0, \kappa, \nu, f, \beta, g$; при этом значение параметра $r > 0$ достаточно взять большим, чем $(\|\mu_\varepsilon \theta_0\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + C_1^2)^{1/2}$.

Применяя теорему 1, на основании априорных оценок (43) приходим к утверждению теоремы 2.

Рассмотрим теперь одностороннюю задачу для уравнений тепловой конвекции, в которой ограничения в виде неравенств накладываются на значение нормальной компоненты скорости и полного напора.

ЗАДАЧА 2. Найти решение системы (14), (15), удовлетворяющее граничным условиям (16), (20), (24).

В данном случае, выбирая φ, ψ в соответствии с (23), (19), мы получаем обобщенную формулировку задачи 2 в виде неравенства (31), где функционал Φ имеет вид

$$\Phi(y) = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} l(x) u_n(x) ds + I_K(y).$$

Здесь I_K – индикаторная функция множества

$$K = \{y \in Y : y = \{u, \theta\}, \quad u_n \leq 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad u_n \geq 0, \quad x \in \Gamma_2; \\ u_n = 0, \quad x \in \Gamma_0; \quad \theta_1(x) \leq \theta(x) \leq \theta_2(x), \quad x \in \Gamma\}.$$

Априорные оценки, аналогичные оценкам, полученным при доказательстве теоремы 2, приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия теоремы 2 и $l(x) \in L^2(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как было указано в п. 3.1, в форме (17), (18) можно записать условия Дирихле (25) для скорости и температуры, при этом обобщенной формулировкой соответствующей краевой задачи будет неравенство (31), где функционал Φ является индикаторной функцией множества

$$K = \{y \in Y, \quad y = \{u, \theta\} : u_n = u_0(x), \quad \theta = \theta_0(x), \quad x \in \Gamma\}.$$

Для получения априорной оценки обобщенного решения задачи Дирихле достаточно повторить вывод неравенства (41) для температуры θ и применить аналогичный прием для вывода оценки скорости, подставляя в неравенство (31) $z = \{\mu_\varepsilon w, \theta\}$, где $w \in V$ соленоидальное продолжение граничной функции u_0 в Ω , μ_ε – срезка, определенная при доказательстве теоремы 2. В результате получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия: $f \in L^2(\Omega)$, $q \in L^2(\Omega)$, $\theta_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\int_\Gamma u_0 ds = 0$. Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение краевой задачи (14)–(16), (25).

Здесь через $H^{1/2}(\Gamma)$ обозначается пространство следов на границе Γ функций из $W_2^1(\Omega)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [2] Кажихов А. В. Разрешимость некоторых односторонних краевых задач для уравнений Навье–Стокса // Динамика сплошной среды. № 16. Новосибирск, 1974. С. 5–34.
- [3] Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
- [4] Чеботарев А. Ю. Об односторонних и экстремальных задачах, связанных с системой Стокса // Динамика сплошной среды. № 102. Новосибирск, 1991. С. 133–147.
- [5] Чеботарев А. Ю. Субдифференциальные краевые задачи для стационарных уравнений Навье–Стокса // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 8. С. 1443–1450.
- [6] Bre'zis H. Inéquations variationnelles relatives a l'opérateur de Navier–Stokes // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 39. № 1. P. 159–165.
- [7] Müller M., Naumann J. On evolution inequalities of a modified Navier–Stokes type. I, II, III // Aplikace Matematiky. 1978. V. 24. № 2. P. 174–184; № 6. P. 397–407; V. 24. № 2. P. 81–91.
- [8] Чеботарев А. Ю. Разрешимость стационарной односторонней задачи протекания для идеальной жидкости // Динамика сплошной среды. № 79. Новосибирск, 1987. С. 129–135.
- [9] Чеботарев А. Ю. Стационарные вариационные неравенства в модели неоднородной несжимаемой жидкости // Сиб. матем. ж. 1997. Т. 38. № 5. С. 1184–1193.
- [10] Уховский М. Ф., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции // ПММ. 1963. Т. 27. № 2. С. 295–300.
- [11] Юдович В. И. О возникновении конвекции // ПММ. 1966. Т. 30. № 6. С. 1000–1005.
- [12] Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление // ПММ. 1967. Т. 31. № 1. С. 101–111.
- [13] Зарубин А. Г. Задача стационарной тепловой конвекции // ЖВМиМФ. 1968. Т. 8. № 6. С. 1378–1383.
- [14] Зарубин А. Г., Тиунчик М. Ф. Некоторые задачи механики с разрывными граничными условиями и негладкой границей // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 9. С. 1632–1637.
- [15] Алексеев Г. В. Теоретический анализ стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции. Препринт ИПМ ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука, 1996.
- [16] Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепловой конвекции. Препринт ИПМ ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука, 1997.
- [17] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
- [18] Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
- [19] Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. М.: Мир, 1989.