Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Интегральные нормы тригонометрических полиномов, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 308–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:36:40

УДК 517.5

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НОРМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В. А. Юдин

Для тригонометрических полиномов с коэффициентами равными по модулю 1 или 0, спектры которых расположены на левом краю двоичных блоков устанавливаются двусторонние оценки нормы в L_1 .

Библиография: 7 названий.

Введение. Пусть $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $L_p(T)$ – пространство функций с нормой

$$\|f\|_p = \|f(x)\|_p = \left\{ \int_T |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

В гармоническом анализе хорошо известны исследования связанные с поведением норм в L тригонометрических полиномов вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \theta_k e^{2\pi i a_k x}, \quad |\theta_k| = 1, \quad a_k \in A, \quad A \subset \mathbb{N}.$$

Решение проблемы Литтлвуда [1], [2] дает оценку снизу

$$\|f\|_1 \gg \ln N. \quad (1)$$

(Здесь и далее, обозначение $A \ll B$ понимается как неравенство $A \leq cB$ с некоторой константой C , не зависящей от A и B .)

Каким образом структура множества A влияет на величину $\|f\|_1$? На пути разрешения этого вопроса было предпринято много шагов. Через N_s обозначим количество элементов множества A , располагающихся в двоичном блоке

$$G_s = \{\nu \in \mathbb{N} : 2^{s-1} < \nu \leq 2^s\}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Пусть H – номер последнего блока, пересекающегося с A , $N_1 + N_2 + \dots + N_H = N$. В работе [3] получено неравенство

$$\|f\|_1 \gg H N_H^{1/2} N^{-1/2} \quad (2)$$

при двух ограничениях на числа N_s :

- 1) последовательность $\{(N_1 + \dots + N_s)/N_s\}$ не убывает;
- 2) при всех s имеет место неравенство $N_s \leq N_{s+1} < cN_s$, $c > 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01210.

Если числа N_s растут "достаточно быстро", то неравенство (2) оказывается сильнее (1). В настоящей работе мы дадим двусторонние оценки для норм тригонометрических полиномов вида

$$F(x) = \sum_{s=1}^H e^{i\theta_s} \sum_{2^{s-1} < \nu \leq 2^s + N_s} e^{2\pi i \nu x},$$

$$N_s \leq 2^{s-1}, \quad N_1 + N_2 + \dots + N_H = N.$$

Рассматриваем ситуацию, когда все коэффициенты при гармониках из одного блока одинаковы и номера этих гармоник расположены у его левого конца без разрывов и повторений. В настоящей работе мы докажем неравенства

$$\left\{ \sum_{1 \leq s \leq H} \ln^2(N_s + 1) \right\}^{1/2} \ll \|F\|_1 \ll H^{1/2} \ln\left(\frac{N}{H} + 1\right), \quad (3)$$

где правое неравенство справедливо при любых значениях чисел $\{N_s\}_1^H$, а левое верно при дополнительном условии

$$2N_{s-1} + N_{s+1} \leq 2^s, \quad s = 2, 3, \dots$$

Нетрудно показать, что, начиная с некоторого номера, числа вида Ks^α и $K2^{s\beta}$, $\beta < 1$, удовлетворяют этому условию. Отметим, что в случае, когда последовательность чисел N_s является лакунарной, неравенства (3) дают точный порядок

$$\ln^{3/2} N \ll \|F\|_1 \ll \ln^{3/2} N$$

и их можно извлечь из более ранних работ [4], [5].

1. Верхние оценки. Для оценки сверху будем использовать соображения, возникшие при исследовании абсолютной сходимости рядов Фурье и констант Лебега. Имеет место

ТЕОРЕМА. Для любых чисел $\{\theta_s\}_{s=1}^H \subset \mathbb{R}$, $\{N_s\}_{s=1}^H$, $N_1 + \dots + N_H = N$, $N_s \leq 2^{s-1}$, выполняется неравенство

$$\|F\|_1 \leq H^{1/2} \log_2 \frac{2N}{H}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$Q_s = \{x \in T : 2^{-(s+1)} \leq |x| < 2^{-s}\}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Так как для всех $r \in \mathbb{N}$

$$\|F\|_1 = \int_{-1/2}^{1/2} |F| dx = \int_{|x| < 2^{-r}} |F| dx + \sum_{s=1}^{r-1} \int_{Q_s} |F| dx = J_0 + \sum_{s=1}^{r-1} J_s,$$

то по неравенству Коши–Буняковского найдем

$$J_0 \leq 2^{-(r-1)/2} \left\{ \int_{|x| < 2^{-r}} |F|^2 dx \right\}^{1/2} \leq 2^{-(r-1)/2} \left\{ \int_T |F|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

По равенству Парсеваля получим

$$J_0 \leq 2^{-(r-1)/2} N^{1/2}. \quad (5)$$

При $x \in Q_s$ имеем

$$|1 - e^{2\pi i 2^{s-1} x}|^2 = (2 \sin \pi 2^{s-1} x)^2 \geq 2.$$

Значит, для всех $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} J_s &\leq 2^{-s/2} \left\{ \int_{Q_s} |F|^2 dx \right\}^{1/2} \leq 2^{-(s+1)/2} \left\{ \int_{Q_s} |F(1 - e^{2\pi i 2^{s-1} x})|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\leq 2^{-(s+1)/2} \left\{ \int_T |F(1 - e^{2\pi i 2^{s-1} x})|^2 dx \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Для любого $q \in \mathbb{N}$ по равенству Парсеваля найдем

$$\|F(1 - e^{2\pi i q x})\|_2^2 \leq 4qH,$$

следовательно,

$$\sum_{s=1}^{r-1} J_s \leq \sum_{s=1}^{r-1} 2^{-s/2} (2^s H)^{1/2}.$$

Выбирая

$$r = 1 + \left\lceil \log_2 \frac{N}{H} \right\rceil,$$

из (4), (5) получим

$$\|F\|_1 \leq 2^{(1-r)/2} N^{1/2} + 2H^{1/2}(r-1) \leq H^{1/2} \left(2 + \left\lceil \log_2 \frac{N}{H} \right\rceil \right) \leq 2H^{1/2} \log_2 \frac{2N}{H}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что подобным способом можно получать верхние оценки и для $\|F\|_p$, $p < 2$. При проведении оценок нужно заменить неравенство Коши–Буняковского на неравенство Гёльдера. При $1 < p < 2$ этот способ приводит к неравенству

$$\|F\|_p \ll N^{1-1/p} H^{1/p-1/2}.$$

2. Приближения в L_∞ . Для получения нижних оценок будем использовать верхние оценки для приближений функций в L_∞ . В значительной степени результаты этого пункта основаны на идеях работы [2] и, особенно, [6].

По последовательности $\{e_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, $e_\nu \in \mathbb{C}$, $|e_\nu| \leq 1$, $\nu \in \mathbb{N}$, образуем новую с помощью рекуррентной формулы:

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1, \quad f_2 = -\frac{\sin \alpha_1}{2} f_1^2 \bar{e}_2 + \cos \alpha_1 f_1 + \frac{\sin \alpha_1}{2} e_2, \quad \dots, \\ f_k &= -\frac{\sin \alpha_{k-1}}{2} f_{k-1}^2 \bar{e}_k + \cos \alpha_{k-1} f_{k-1} + \frac{\sin \alpha_{k-1}}{2} e_k, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – произвольные углы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для всех $k \in \mathbb{N}$ какова бы ни была последовательность углов $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ имеет место оценка

$$|f_k| \leq 1. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом математической индукции. Допустим справедливость (7) для $k-1$ и докажем для k . Поскольку

$$f_k = \frac{f_{k-1}}{2} \{-\sin \alpha_{k-1} \bar{e}_k f_{k-1} + \cos \alpha_{k-1}\} + \frac{1}{2} \{f_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \sin \alpha_{k-1} e_k\},$$

то по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} |f_k| &\leq \frac{1}{2} \sqrt{|f_{k-1}|^2 + 1} \\ &\quad \times \sqrt{|-\sin \alpha_{k-1} f_{k-1} \bar{e}_k + \cos \alpha_{k-1}|^2 + |f_{k-1} \cos \alpha_{k-1} + \sin \alpha_{k-1} e_k|^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|f_{k-1}|^2 + 1} \sqrt{(1 + |f_{k-1}|^2)(|e_k|^2 \sin^2 \alpha_{k-1} + \cos^2 \alpha_{k-1})} \\ &\leq \frac{1}{2} (|f_{k-1}|^2 + 1) \leq 1. \end{aligned}$$

Положим в (6)

$$\cos \alpha_{k-1} = \sqrt{\frac{k-1}{k}}, \quad \sin \alpha_{k-1} = \sqrt{\frac{1}{k}}, \quad e_1(x) = 1, \quad e_k = e^{2\pi i 2^{k-1} x},$$

получим последовательность тригонометрических полиномов $f_k = f_k(x)$. Пусть

$$\text{sp } f = \{\nu \in \mathbb{Z} : f_\nu \neq 0\}, \quad f(x) = \sum f_\nu e^{2\pi i \nu x},$$

обозначает спектр тригонометрического полинома $f(x)$. Определим спектр построенных тригонометрических полиномов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для всех $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, тригонометрический полином f_k представим в виде $f_k = g_k + h_k$, где

$$\text{sp } g_k \subset \{-(k-2)2^{k-1}, \dots, -1, 0\}, \quad h_k = \frac{1}{2\sqrt{k}}(2e_1 + e_2 + \dots + e_k). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k=2$ из (6) находим $f_2 = g_2 + h_2$, где

$$g_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \text{sp } g_2 = \{0\}, \quad h_2 = \frac{e_1}{\sqrt{2}} + \frac{e_2}{2\sqrt{2}}.$$

Доказательство (8) проведем по индукции. Предположим, что (8) выполнено для $k-1$ и докажем его для k . Поскольку спектр произведения двух тригонометрических полиномов равен сумме Минковского их спектров, то

$$\begin{aligned} \text{sp } f_{k-1}^2 \bar{e}_k &= \text{sp } f_{k-1} + \text{sp } f_{k-1} - \text{sp } e_k \\ &\subset \{-(k-3)2^{k-2}, \dots, 2^{k-2}\} + \{-(k-3)2^{k-2}, \dots, 2^{k-2}\} - \{2^{k-1}\} \\ &= \{-(k-2)2^{k-1}, \dots, -1, 0\}. \end{aligned}$$

Оказывается, что спектр первого слагаемого из (8) не пересекается с $\mathbb{N}$. Для тригонометрического полинома $f(x)$ положим

$$f^+(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}: \nu > 0} f_\nu e^{2\pi i \nu x};$$

имеем

$$h_k = f_k^+ = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(-\frac{1}{2} f_{k-1}^2 \bar{e}_k + \sqrt{k-1} f_{k-1} + \frac{1}{2} e_k \right)^+ = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\sqrt{k-1} f_{k-1}^+ + \frac{1}{2} e_k \right).$$

По предположению индукции

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \left\{ \sqrt{k-1} \left[\frac{1}{2\sqrt{k-1}} (2e_1 + e_2 + \dots + e_{k-1}) \right] + \frac{1}{2} e_k \right\} = \frac{1}{2\sqrt{k}} (2e_1 + e_2 + \dots + e_k).$$

Таким образом, из (7), (8) находим, что

$$\left\| g_k + \frac{1}{2\sqrt{k-1}} (2e_1 + e_2 + \dots + e_k) \right\|_\infty \leq 1,$$

откуда

$$\inf_{g, \text{sp } g \subset \{-(k-2)2^{k-1}, \dots, 0\}} \|e^{2\pi i x} + e^{2\pi i 2x} + \dots + e^{2\pi i 2^{k-1}x} - g(x)\|_\infty \leq 1 + 2\sqrt{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3. Нижние оценки. В анализе Фурье хорошо известны [7] тригонометрические полиномы

$$t_n(x) = 2c \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin 2\pi \nu x}{\nu} = c \sum_{1 \leq |\nu| \leq n} \frac{e^{2\pi i \nu x}}{i\nu}, \quad c = \frac{1}{4\pi},$$

с равномерной по n оценкой нормы в L_∞ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|t_n(x)\|_\infty \leq 1. \quad (9)$$

С помощью рекуррентной формулы (6) построим на их основе две новые последовательности тригонометрических полиномов. Пусть

$$g_s(x) = e^{2\pi i \theta_s} e^{2\pi i 2^{s-1}x} \cdot t_{N_s}(x), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{2\pi i x}, \\ \varphi_2 &= -\frac{\sin \alpha_1}{2} \varphi_1^2 \bar{g}_3 + \cos \alpha_1 \varphi_1 + \frac{\sin \alpha_1}{2} g_3, \\ \varphi_3 &= -\frac{\sin \alpha_2}{2} \varphi_2^2 \bar{g}_5 + \cos \alpha_2 \varphi_2 + \frac{\sin \alpha_2}{2} g_5, \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_k &= -\frac{\sin \alpha_{k-1}}{2} \varphi_{k-1}^2 \bar{g}_{2k-1} + \cos \alpha_{k-1} \varphi_{k-1} + \frac{\sin \alpha_{k-1}}{2} g_{2k-1}, \\ \Psi_1 &= e^{2\pi i 2x} g_2, \\ \Psi_2 &= -\frac{\sin \alpha_1}{2} \Psi_1^2 \bar{g}_4 + \cos \alpha_1 \Psi_1 + \frac{\sin \alpha_1}{2} g_4, \\ \Psi_3 &= -\frac{\sin \alpha_2}{2} \Psi_2^2 \bar{g}_6 + \cos \alpha_2 \Psi_2 + \frac{\sin \alpha_2}{2} g_6, \\ &\dots \dots \dots \\ \Psi_k &= -\frac{\sin \alpha_{k-1}}{2} \Psi_{k-1}^2 \bar{g}_{2k} + \cos \alpha_{k-1} \Psi_{k-1} + \frac{\sin \alpha_{k-1}}{2} g_{2k}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть для всех $s \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$2N_s + N_{s+2} \leq 2^{s+1}.$$

Тогда

$$\left\{ \sum_{s=1}^H \ln^2(N_s + 1) \right\}^{1/2} \ll \|F\|_1. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выясним структуру спектров тригонометрических полиномов φ_k , Ψ_k и $\varphi_k^2 \bar{g}_{2k+1}$, $\Psi_k^2 \bar{g}_{2k}$. Сначала рассмотрим тригонометрические полиномы из первой серии. Под обозначением $A \leq q$, $A \subset \mathbb{Z}$, будем понимать следующее: наибольшее целое число, содержащееся в A , не превосходит q . Методом математической индукции докажем два вспомогательных утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\text{sp } \varphi_k \leq 2^{2k-2} + N_{2k-1}, \quad \text{sp } \varphi_k^2 \bar{g}_{2k+1} \leq 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 1$ неравенство (11) очевидно. Допустим, что оно справедливо для k и докажем его для $k + 1$. Имеем

$$\text{sp } \varphi_{k+1} \leq 2^{2k} + N_{2k+1}, \quad \text{sp } \varphi_{k+1}^2 \bar{g}_{2k+3} \leq 2^{2k+1} + 2N_{2k+1} - 2^{2k+2} + N_{2k+3}.$$

Из условия теоремы находим

$$\text{sp } \varphi_{k+1}^2 \bar{g}_{2k+3} \leq 2^{2k+1} + 2^{2k+1} - 2^{2k+2} \leq 0.$$

Аналогичным образом доказывается

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\text{sp } \Psi_k \leq 2^{2k-1} + N_{2k}, \quad \text{sp } \Psi_k^2 \bar{g}_{2k} \leq 0. \quad (12)$$

Вернемся к доказательству неравенства (10). Выберем наибольшее четное число $s = 2k$ так, чтобы $2k \leq H$, и рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} I_k &= i \int_T \varphi_k(x) \bar{F}(x) dx \\ &= -\sin \alpha_{k-1} \frac{i}{2} \int_T \varphi_{k-1}^2 \bar{g}_{2k-1} \bar{F} dx + \cos \alpha_{k-1} i \int_T \varphi_{k-1} \bar{F} dx \\ &\quad + \frac{i}{2} \sin \alpha_{k-1} \int_T g_{2k-1} \bar{F} dx. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (12)

$$\text{sp } \varphi_{k-1}^2 \bar{g}_{2k-1} \cap \text{sp } F = \emptyset,$$

то первое слагаемое обращается в 0. По условию теоремы $\text{sp } F$ пересекается с $\text{sp } g_{2k-1}$ по множеству $\{\nu \in \mathbb{Z} : 2^{2k-2} < \nu \leq 2^{2k-2} + N_{2k-1}\}$. Значит, по равенству Парсеваля

$$\frac{i}{2} \sin \alpha_{k-1} \int_T g_{2k-1} \bar{F} dx = \frac{c}{2} \sin \alpha_{k-1} \sum_{1 \leq \nu \leq N_{2k-1}} \frac{1}{\nu} = \sin \alpha_{k-1} c_{k-1}.$$

Из конструкции тригонометрического полинома φ_k вытекает, что числа I_k являются действительными, поэтому в равенстве

$$I_k = \cos \alpha_{k-1} I_{k-1} + \sin \alpha_{k-1} c_{k-1}$$

угол α_{k-1} выберем так, чтобы правая часть принимала наибольшее значение. С этой целью положим

$$\cos \alpha_{k-1} = \frac{I_{k-1}}{\sqrt{I_{k-1}^2 + c_{k-1}^2}}, \quad \sin \alpha_{k-1} = \frac{c_{k-1}}{\sqrt{I_{k-1}^2 + c_{k-1}^2}},$$

получим

$$I_k^2 = I_{k-1}^2 + c_{k-1}^2.$$

Продолжая равенства, найдем

$$I_k^2 = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_{k-1}^2.$$

Так как

$$c_j^2 \gg \left(\sum_{1 \leq \nu \leq N_{2j+1}} \frac{1}{\nu} \right)^2 \gg \ln^2(N_{2j+1} + 1),$$

то

$$I_k^2 \gg \sum_{j: 2j-1 \leq H} \ln^2(N_{2j-1} + 1).$$

Оценим I_k сверху. Поскольку в силу (7), (9)

$$\|\varphi_k\|_\infty \leq 1,$$

то

$$|I_k| = \left| \int_T \varphi_k(x) \overline{F}(x) dx \right| \leq \|\varphi_k\|_\infty \cdot \|F\|_1 \leq \|F\|_1.$$

Таким образом,

$$\sum_{j: 2j-1 \leq H} \ln^2(N_{2j-1} + 1) \ll \|F\|_1^2. \quad (13)$$

Аналогичным образом, с помощью функций Ψ_k рассматривается случай “четных двоичных блоков”:

$$\sum_{j: 2j \leq H} \ln^2(N_{2j} + 1) \ll \|F\|_1^2. \quad (14)$$

Складывая (13) и (14), найдем

$$\sum_{s=1}^H \ln^2(N_s + 1) \ll \|F\|_1^2.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 2 использовалось разбиение двоичных блоков на две группы: четные и нечетные. Оно гарантирует обращение в 0 первого слагаемого из рекуррентной формулы. Оценка (10) остается справедливой и при разбиении на большее число групп, причем при менее ограничительных условиях на числа N_s , но она становится хуже.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. За исключением (1), все приведенные оценки снизу справедливы при дополнительных условиях на числа N_s либо на спектр f . В этом ряду имеется старая оценка Пэли (элементарное доказательство приведено в [6]), из которой вытекает неравенство

$$\|f\|_1 \gg H^{1/2}$$

справедливое при условии: множество A пересекается с H различными двоичными блоками G_s .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку спектры построенных функций φ_s, ψ_s сосредоточены на множествах

$$(-\infty, 0] \bigcup_{s \geq 1} (2^{s-1}, 2^{s-1} + N_s] \cup [2^s - N_{s+1}, 2^s),$$

то в отличие от верхней оценки (4) нижняя оценка (10) справедлива для тригонометрического полинома более общего вида. Его коэффициенты Фурье постоянны и равны $e^{i\theta_s}$ при $2^{s-1} < \nu \leq 2^{s-1} + N_s$, 0 при $2^s - N_{s+1} < \nu \leq 2^s$ и произвольны при $2^{s-1} + N_s < \nu \leq 2^s - N_{s+1}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Конягин С. В. О проблеме Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 2. С. 243–265.
- [2] McGehee O. C., Pigno L., Smith B. Hardy's inequality and the L^1 norm of exponential sums // Ann. of Math. 1981. V. 113. № 3. P. 613–618.
- [3] Бочкарев С. В. Об одном методе оценки L_1 -нормы экспоненциальной суммы // Тр. МИАН. 1997. Т. 218. С. 74–76.
- [4] Weiss M. A theorem on lacunary trigonometric series // Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues. Proc. Conf. South. Ill. Univ. (Edwardsville, 1967). Carbondale, Illinois: SIU Press, 1968. P. 227–230.
- [5] Балашов Л. А., Теляковский С. А. Некоторые свойства лакунарных рядов и интегрируемость тригонометрических рядов // Тр. МИАН. 1977. Т. 143. С. 32–41.
- [6] Smith B. Two trigonometric designs: one-sided Riesz products and Littlewood products // General Inequalities 3. Intern. Series of Numer. Math. V. 64. Basel: Birkhäuser, 1983. P. 141–148.
- [7] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965.

Московский энергетический институт

Поступило
26.05.1999