Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Романовский, Коэрцитивные оценки для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:31:02

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н. Н. Романовский

1. Введение. Пусть Q – некоторый линейный однородный дифференциальный оператор порядка k с постоянными коэффициентами с конечномерным ядром, определенный на пространстве гладких m -вектор-функций, Ω – область некоторого специального типа. Цель этой работы состоит в построении семейства линейных проекционных операторов P_Q , сопоставляющих гладким m -вектор-функциям, заданным на Ω , функции из $\ker Q$ и удовлетворяющих неравенствам

$$\|P_Q u\| \leq C(\Omega, Q)\|u\|_{L_1(\Omega)}, \quad (1)$$

$$\|u - P_Q u\|_{W_p^k(\Omega)} \leq C(\Omega, Q)\|Qu\|_{L_p(\Omega)}. \quad (2)$$

Первое неравенство означает ограниченность оператора P_Q . При этом в силу эквивалентности всех нормировок в конечномерном векторном пространстве норма в левой части этого неравенства может быть выбрана произвольно.

Нетрудно видеть, что из неравенств (1), (2) вытекают неравенства

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} \leq C(\Omega, Q)(\|Qu\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_1(\Omega)}), \quad (3)$$

которые в литературе называют *коэрцитивными оценками* или *неравенствами типа Корна* (см. [1]–[7]). Корн доказал справедливость такого неравенства для оператора

$$Q_1 = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$$

(тензор напряжения) в 1907 году. Одновременно для финитных функций им было получено неравенство

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} \leq C(\Omega)\|Q_1 u\|_{L_p(\Omega)}. \quad (4)$$

Оценки вида (4) также называют неравенствами типа Корна. Значительно позже в фундаментальных работах Ароншайна и Смита, а также в работах Бесова неравенства вида (3), (4) были доказаны для достаточно широкого класса операторов. Таким образом, неравенства (1) и (2) можно рассматривать как усиление коэрцитивных оценок (3). Впервые для операторов

$$Q_1 = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (\text{тензор напряжения}),$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{1}{n} \operatorname{Sp} \nabla u$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 97-01-01092 и № 96-15-96291, и программы “Университеты России”.

оценки вида (1) и (2) были получены Решетняком [8], [9]. Решетняк получил эти оценки в два шага: сначала были выведены представляющие самостоятельный интерес интегральные представления гладких функций через упомянутые операторы, а затем из них получены желаемые оценки.

В данной работе реализуется другой подход, основанный только на интегральных представлениях Соболева и позволяющий получить сформулированный результат для любых однородных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами с конечномерным ядром.

На область определения рассматриваемых функций налагается два условия: во-первых, она должна быть ограничена, во-вторых, для функций, заданных на этой области, должны быть справедливы следующие интегральные представления:

$$f(x) = P_k f(x) + \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} K_{\alpha}(x; y) \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial x^{\alpha}}(y) dy,$$

где k – произвольное натуральное число, P_k – линейный ограниченный проекционный оператор, переводящий L_1 в пространство полиномов степени не выше $k - 1$, функции $K_{\alpha}(x; y)$ принадлежат классу $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{x = y\})$, финитны по второму аргументу и удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{\partial}{\partial x^{\beta_1} \partial y^{\beta_2}} K_{\alpha}(x; y) \right| \leq C(\beta_1, \beta_2, k, \Omega) |x - y|^{(k-n-|\beta_1|-|\beta_2|)}.$$

В частности, такими областями являются конечные объединения ограниченных областей, звездных относительно шара, в том числе ограниченные области, удовлетворяющие условию конуса (см., например, [10], [11]).

2. Основная часть. Рассмотрим сначала случай дифференциальных операторов первого порядка. Не ограничивая общности, можно считать, что Qf есть $(n \times m)$ -матричная функция.

ТЕОРЕМА. *Фиксируем некоторый линейный дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами с конечномерным ядром Q . Тогда существует проекционный оператор P_Q , переводящий гладкие m -вектор-функции в функции из $\ker(Q)$ и удовлетворяющий неравенствам*

- 1) $\|P_Q u\| \leq C(\Omega, Q) \|u\|_{L^1(\Omega)}$;
- 2) $\|u - P_Q u\|_{W_p^1(\Omega)} \leq C(\Omega, Q) \|Qu\|_{L^p(\Omega)}$.

Докажем предварительно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть дифференциальный оператор Q удовлетворяет названным выше условиям. Тогда найдется натуральное число l такое, что все производные порядка l от компонент произвольной гладкой m -вектор-функции f могут быть представлены в виде линейных комбинаций производных порядка $l - 1$ от компонент матричной функции Qf (соответствующие коэффициенты зависят только от компонент оператора Q).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейные пространства однородных полиномов степени k с нулем. Обозначим их через G_k . Имеем $G_j \cap G_k = \{0\}$, если $j \neq k$.

Из коэрцитивности оператора Q вытекает, что найдется число l , для которого $\ker(Q) \cap G_l = \{0\}$, т.е. для любой ненулевой m -вектор-функции g , компоненты которой суть однородные полиномы степени l , матричная функция Qg не равна тождественно нулю. Оператор Q переводит однородные полиномы степени l в однородные полиномы степени $l - 1$. Однородный полином степени $l - 1$ равен нулю тогда и только тогда, когда все его частные производные порядка $l - 1$ равны нулю. Следовательно, $\ker(Q) \cap G_l = \ker(D^{l-1}Q) \cap G_l$, где оператор D^{l-1} сопоставляет матричной функции Qf вектор-функцию, компоненты которой суть всевозможные частные производные порядка $l - 1$ от компонент матрицы Qf .

Действительно, включение $\ker(Q) \cap G_l \subset \ker(D^{l-1}Q) \cap G_l$ очевидно. Пусть $g \in \ker(D^{l-1}Q) \cap G_l$. Тогда $D^{l-1}Qg = 0$ и Qg – матричная функция, компоненты которой суть однородные полиномы степени $l-1$. Обозначим $Qg = h$. Имеем $D^{l-1}h = 0$, откуда $h \equiv 0$, т.е. $g \in \ker(Q)$; что и доказывает второе требуемое включение.

Далее из равенства множеств $\ker(Q) \cap G_l$ и $\ker(D^{l-1}Q) \cap G_l$ заключаем, что соотношение $\ker(Q) \cap G_l = \{0\}$ влечет соотношение $\ker(D^{l-1}Q) \cap G_l = \{0\}$.

Обозначим через $D^l f$ вектор, состоящий из всевозможных частных производных порядка l от компонент вектор-функции f . Имеем $D^{l-1}Qf = AD^l f$, где A – некоторая матрица с постоянными элементами. Далее, $AD^l g \neq 0$ для любого ненулевого многочлена $g \in G_l$. В силу того, что $D^l g$ может быть любым постоянным вектором соответствующей размерности, линейное отображение $L: x \mapsto Ax$ имеет нулевое ядро, т.е. оно инъективно. Значит, существует (вообще говоря, не единственное) отображение L' такое, что $L' \circ L = \text{Id}$. Отсюда, окончательно, получаем требуемое утверждение; коэффициентами в искомом разложении будут компоненты матрицы, отвечающей линейному отображению L' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим любую m -вектор-функцию f . Воспользуемся для нее интегральным представлением Соболева через производные порядка l . Имеем

$$f(x) = P_l f(x) + \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=l} K_{\alpha}(x; y) \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial x^{\alpha}}(y) dy, \quad (5)$$

где P_l – линейный ограниченный проекционный оператор, переводящий L_1 в пространство полиномов степени не выше $l-1$, функции $K_{\alpha}(x; y)$ принадлежат классу $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{x = y\})$, финитны по второму аргументу и удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{\partial}{\partial x^{\beta_1} \partial y^{\beta_2}} K_{\alpha}(x; y) \right| \leq C(\beta_1, \beta_2, k, \Omega) |x - y|^{(l-n-|\beta_1|-|\beta_2|)}. \quad (6)$$

Заменим частные производные компонент вектор-функции f в правой части (5) на соответствующие линейные комбинации частных производных порядка $l-1$ от компонент матричной функции Qf и воспользуемся $l-1$ раз правилом интегрирования по частям. Принимая во внимание финитность функций $K_{\alpha}(x; y)$ по второму аргументу и оценки (6), получим

$$f(x) = P_l f(x) + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m H_{ij}(x; y) Q_{ij} f(y) dy,$$

где m -вектор-функции $H_{ij}(x; y)$ принадлежат классу $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{x = y\})$ и допускают оценки

$$|H_{ij}(x; y)| \leq C(\Omega, Q) |x - y|^{-(n-1)}, \quad |\nabla_x H_{ij}(x; y)| \leq C(\Omega, Q) |x - y|^{-n}. \quad (7)$$

Обозначим интегральный оператор, сопоставляющий m -вектор-функции f m -вектор-функцию

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m H_{ij}(x; y) Q_{ij} f(y) dy,$$

через $R(f)$. Используя лемму Зигмунда–Кальдерона (см. [12]) и неравенства (7), получим оценки

$$\begin{aligned} \|R(f)\|_{W_p^1(\Omega)} &\leq C(\Omega) \|Qf\|_{L^p(\Omega)}, \\ \|Q(R(f))\|_{L^p(\Omega)} &\leq C'(\Omega) \|Qf\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, имеем

$$\|Q(P_l f)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|Qf\|_{L^p(\Omega)} + \|Q(R(f))\|_{L^p(\Omega)} \leq (C+1) \|Qf\|_{L^p(\Omega)}. \quad (9)$$

Следовательно, в дальнейших рассуждениях можно ограничиться случаем полиномов степени $l-1$. Иначе говоря, требуемый результат вытекает из справедливости следующего утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть Ω – ограниченная область. Тогда для любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами Q и любого натурального числа k существует линейный проекционный оператор $P_{k,Q}$, определенный на пространстве полиномов степени не выше k и удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad & P_{k,Q}g \in \ker Q, \\ 2) \quad & \|P_{k,Q}g\| \leq C_0(k, \Omega)\|g\|_{L^1(\Omega)}, \\ 3) \quad & \|g - P_{k,Q}g\|_{W_p^1(\Omega)} \leq C_1\|Qg\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где g – произвольный полином степени не выше k .

Лемма 1, в свою очередь, является простым следствием следующего предложения.

ЛЕММА 2. Пусть V – линейное конечномерное пространство, $A: V \rightarrow V$ – некоторое линейное отображение, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ – нормы в пространстве V . Тогда существует линейный проекционный оператор P_A такой, что $P_A v \in \ker A$ для любого вектора $v \in V$ и выполняется неравенство $\|v - P_A v\|_1 \leq C\|Av\|_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказать это утверждение не сложно. Достаточно использовать эквивалентность различных нормировок и ограниченность линейных операторов в конечномерном векторном пространстве. Действительно, обозначим через $\|\cdot\|$ евклидову норму в пространстве V . Возьмем в качестве P_A ортогональный проектор на подпространство $\ker A$. Пусть V_1 – ортогональное дополнение подпространства $\ker A$. Тогда вектор $v - P_A v$ принадлежит V_1 . Оператор A взаимно однозначен на V_1 . Следовательно, существует линейный оператор A' такой, что ограничение $A' \circ A$ на V_1 есть тождественный оператор. В силу конечномерности V_1 оператор A' ограничен. Далее, $A(v - P_A v) = Av$. Откуда $v - P_A v = A'(Av)$, $\|v - P_A v\| \leq C\|Av\|$. Учитывая эквивалентность различных нормировок пространства V , получаем требуемое неравенство.

Отметим, что выбор области Ω влияет на соответствующие нормировки.

Окончательно, в качестве проекционного оператора, определенного на множестве всех гладких m -вектор-функций, заданных на Ω , возьмем суперпозицию $P_Q = P_{Q,l} \circ P_l$. Линейность и ограниченность оператора P_Q тривиальным образом вытекают из линейности и ограниченности операторов $P_{Q,l}, P_l$. Далее, с помощью неравенств (8)–(10) получаем

$$\begin{aligned} \|f - P_Q f\|_{W_p^1(\Omega)} &= \|f - P_{Q,l} \circ P_l f\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \|f - P_l f\|_{W_p^1(\Omega)} + \|P_l f - P_{Q,l} \circ P_l f\|_{W_p^1(\Omega)} \\ &\leq \|R(f)\|_{W_p^1(\Omega)} + C_1\|Q(P_l f)\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Qf\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Отметим, что оператор P_Q можно по непрерывности продолжить на пространство $W_p^1(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 2. Фиксируем некоторый линейный однородный дифференциальный оператор Q порядка k с постоянными коэффициентами с конечномерным ядром, определенный на пространстве гладких m -вектор-функций. Предположим, что область Ω удовлетворяет перечисленным во введении условиям; в частности, она может быть ограниченной и удовлетворяющей условию конуса. Тогда существует линейный проекционный оператор P_Q , сопоставляющий гладким m -вектор-функциям, заданным на Ω , функции из $\ker Q$ и удовлетворяющий неравенствам

$$\|P_Q u\| \leq C(\Omega, Q)\|u\|_{L_1(\Omega)}, \quad \|u - P_Q u\|_{W_p^k(\Omega)} \leq C(\Omega, Q)\|Qu\|_{L_p(\Omega)}.$$

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1 и не требует каких-либо заметных изменений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korn A. Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen. Bull. Intern. Cracov: Akad. Umiejet, 1909. 2. Aronszajn N. // Report № 14: Univ. Kansas, 1954. P. 94–106. 3. Smith K. T. // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67. P. 368–370. 4. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ, 1962. 5. Кондратьев В. А., Олейник О. А. // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98. 6. Бесов О. В. // Матем. сб. 1967. Т. 73. С. 585–599. 7. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 8. Решетняк Ю. Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1996. 9. Решетняк Ю. Г. // Сиб. матем. ж. 1971. Т. 12. № 2. С. 420–432. 10. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 11. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1985. 12. Calderon A. P., Zygmund A. // Amer. J. Math. 1956. V. 78. № 2. P. 289–309.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: nnrom@math.nsc.ru

Поступило
07.02.2001