Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, Теорема исправимости для анизотропных пространств, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 323–333

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:29:30

УДК 517.5

ТЕОРЕМА ИСПРАВИМОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Е. И. Бережной

В работе решена следующая старая задача. Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$ и функция $f: [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ с заданными частными модулями непрерывности, вычисленными в симметричном пространстве X . Требуется указать множество $I(\varepsilon)$ с мерой больше $1 - \varepsilon$ такое, что частные равномерные модули непрерывности функции f , вычисленные по точкам этого множества, допускают неухудшаемую (относительно всех сужений на множества с мерой больше $1 - \varepsilon$) оценку частных равномерных модулей непрерывности, и выписать эту оценку равномерных частных модулей непрерывности.

Библиография: 9 названий.

Известную теорему Н. Н. Лузина о C -свойстве измеримой функции $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно переформулировать следующим образом: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется множество $I(\varepsilon)$ с мерой больше $1 - \varepsilon$ такое, что равномерный модуль непрерывности функции f , вычисленный по точкам этого множества, стремится к нулю. В дальнейшем теорема Лузина развивалась по двум руслам: одно из них – это теоремы исправимости, т.е. нахождение функции g с хорошими свойствами, для которой $\mu(\{t : g(t) \neq f(t)\}) < 1 - \varepsilon$, а второе – оценки некоторых характеристик функции f на множествах меры больше $1 - \varepsilon$. К теоремам первого направления можно отнести теоремы типа Д. Меньшова [1], к теоремам второго типа относятся, в основном, многомерные теоремы [2]–[4]. Это связано с тем, что теоремы первого типа связаны с теоремами второго типа через теорему о продолжении, а теоремы о продолжении в $\mathbb{R}^n$ существенно сложнее одномерных.

Настоящая работа посвящена решению следующей старой задачи. Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$ и функция $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}$ с заданными частными модулями непрерывности, вычисленными в симметричном пространстве X . Требуется указать множество $I(\varepsilon)$ с мерой больше $1 - \varepsilon$ такое, что частные равномерные модули непрерывности функции f , вычисленные по точкам этого множества, допускают неухудшаемую (относительно всех сужений на множества с мерой больше $1 - \varepsilon$) оценку частных равномерных модулей непрерывности, и выписать эту оценку частных равномерных модулей непрерывности. Полный ответ для этой задачи для пространства L^p в одномерном случае дал К. Осколков [5], [6]. В многомерном случае для изотропного случая эта задача разобрана автором [2]. Отметим, что ранее для изотропного случая некоторые многомерные результаты для L^p были получены Ю. Брудным и В. Колядой [3], [4].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00355.

Схема решения основной задачи достаточно традиционна для теорем исправимости. Сначала данная функция представляется в виде суммы ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ гладких функций. Далее для каждой функции f_i рассматривается ее сужение на множество большой меры I_i такое, что на этом множестве функция имеет гарантированную гладкость. После этого искомое множество $I(\varepsilon)$ берется как пересечение множеств I_i .

Основной результат работы представлен в теоремах 1 и 2. Отметим, что если частные модули непрерывности по всем направлениям совпадают, т.е. случай изотропный, основные результаты работы просто совпадают с основными результатами работы автора [2]. Уместно заметить, что оценки равномерных модулей непрерывности f на $I(\varepsilon)$ зависят только от фундаментальной функции симметричного пространства, в котором вычисляются исходные модули непрерывности, и одинаковы для всех симметричных пространств с данной фундаментальной функцией. В конце работы показано, что основная теорема не может быть усилена.

Пусть D – измеримое множество, через $\chi(D)$ обозначим его характеристическую функцию, а через $\mu(D)$ – его меру Лебега. Пусть I^n – единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с обычной мерой Лебега, $S(\mu)$ – множество измеримых функций на I^n . Для $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}$, как обычно, через $\lambda(f, \alpha)$ обозначим функцию распределения функции f , т.е. $\lambda(f, \alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\})$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Напомним [7], что банахово пространство функций называется *симметричным*, если из справедливости при всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$ неравенства $\lambda(g, \alpha) \leq \lambda(f, \alpha)$ и $f \in X$ следует, что $g \in X$ и $\|g\|_X \leq \|f\|_X$ (символом $\|f\|_X$ обозначается норма элемента f в пространстве X). Важную информацию о симметричном пространстве X несет его фундаментальная функция, которая определяется равенством $\psi(X, t) = \|\chi(D)\|_X$, где $t = \mu(D)$.

Примерами симметричных пространств являются пространства Лебега L^p ($p \geq 1$), пространства Орлича L_h , построенные по выпуклой функции h , пространства Лоренца $\Lambda(\varphi)$ и Марцинкевича $M(\varphi)$, построенные по вогнутой функции (φ) . Для фундаментальных функций этих пространств справедливы равенства

$$\psi(L^p, t) = t^{1/p}, \quad \psi(L_h, t) = \frac{1}{h^{-1}(t^{-1})}, \quad \psi(\Lambda(\varphi), t) = \psi(M(\varphi), t) = \varphi(t).$$

Ниже нам удобно считать, что каждая функция $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}$ определена не только на I^n , но и доопределена на все $\mathbb{R}^n$ нулем.

Пусть X – симметричное пространство, e^j – единичный координатный вектор в $\mathbb{R}^n$. Для каждой $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}$ определим частный модуль непрерывности по переменному x_j :

$$\omega_j(h, f, X) = \sup_{0 < \delta \leq h} \|f(x + \delta e^j) - f(x)\|_X.$$

Как обычно, через $\omega_j^*(h, f, X)$ обозначим наименьшую вогнутую мажоранту функции $\omega_j(h, f, X)$. Хорошо известно неравенство С. Б. Стечкина (см., например, [8, с. 154])

$$\omega_j(h, f, X) \leq \omega_j^*(h, f, X) \leq 2\omega_j(h, f, X).$$

Поскольку в дальнейших построениях величина абсолютных констант не играет особой роли, можно считать, что $\omega_j(h, f, X)$ – вогнутая функция.

Переходим к решению основной задачи. Для наглядности мы ограничимся случаем $n = 2$. При других n рассуждения проходят аналогично.

Сначала нам потребуются некоторые простые утверждения из теории симметричных пространств [2], [7]. Пусть X – симметричное пространство, $f \in X$ и задано $\alpha > 0$. Положим $D(f, \alpha) = \{x : |f(x)| > \alpha\}$. Тогда справедливо неравенство

$$\psi(X, \mu(D(f, \alpha))) \leq \frac{\|f\|_X}{\alpha}. \quad (1)$$

Пусть функция $f: I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет частные производные по первой и второй координатам. Введем обозначения

$$f_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \quad f_2(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y).$$

Нам потребуется также следующий факт [2, лемма 6].

ЛЕММА А. Пусть X – симметричное пространство. Пусть $f: I^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x, y) \in X$ и $f_1(x, y)$ – непрерывная на I^2 функция. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}_+$ фиксировано. Тогда существует множество $U_1(\gamma)$ такое, что выполнены условия:

а) если $(x_1, y) \in I^2 \setminus U_1(\gamma)$, то для любой точки вида $(x_2, y) \in I^2$ верно неравенство

$$|f_1(x_1, y) - f_1(x_2, y)| \leq 2\gamma|x_1 - x_2|;$$

б) для меры множества $U_1(\gamma)$ верно неравенство

$$\psi(X, \mu(U_1(\gamma))) \leq c_0 \frac{\|f_1\|_X}{\gamma}$$

(константа c_0 зависит только от размерности, для $n = 2$ можно положить $c_0 = 25$).

Аналогичные факты справедливы и в случае, когда известно, что $f_2(x, y) \in X$ и $f_2(x, y)$ непрерывная на I^2 функция.

Для $h \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$ и $f \in L^1$ положим

$$f(h, \delta; x, y) = \frac{1}{h} \frac{1}{\delta} \int_0^h \int_0^\delta f(x+t, y+s) dt ds.$$

Из соотношения $\|f(h, \delta; x, y) - f(x, y)\|_X \leq \omega_1(h, f, X) + \omega_2(\delta, f, X)$ сразу следует неравенство

$$\begin{aligned} & \|f(h_1, \delta_1; x, y) - f(h_2, \delta_2; x, y)\|_X \\ & \leq \omega_1(h_1, f, X) + \omega_1(h_2, f, X) + \omega_2(\delta_1, f, X) + \omega_2(\delta_2, f, X). \end{aligned} \quad (2)$$

Кроме того, верны и неравенства

$$\|f_1(h, \delta; x, y)\|_X \leq \frac{\omega_1(h, f, X)}{h}, \quad \|f_2(h, \delta; x, y)\|_X \leq \frac{\omega_2(\delta, f, X)}{\delta}. \quad (3)$$

Напомним, что

$$f_1(h, \delta; x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(h, \delta; x, y), \quad f_2(h, \delta; x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(h, \delta; x, y).$$

Теперь мы переходим к основной теореме. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, симметричное пространство X , непрерывную функцию $f \in X$ с заданными частными модулями непрерывности $\omega_1(h, f, X)$ и $\omega_2(\delta, f, X)$. Выберем теперь три монотонных последовательности положительных чисел $\{h_i\}$, $\{\delta_i\}$ и $\{\varepsilon_i\}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon, \quad (5)$$

причем выбор $\{h_i\}$, $\{\delta_i\}$ и $\{\varepsilon_i\}$ будем осуществлять так, чтобы наряду с (4) и (5) выполнялось соотношение

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_1(h_i, f, X) + \omega_2(\delta_i, f, X)}{\psi(X; \varepsilon_i)} < \infty. \quad (6)$$

Условие (6) означает, что $\omega_1(h_i, f, X)$ и $\omega_2(\delta_i, f, X)$ достаточно быстро, а $\psi(X; \varepsilon_i)$ достаточно медленно стремятся к нулю (напомним, что $\psi(X; t)$ есть фундаментальная функция пространства X). С последовательностями $\{h_i\}$, $\{\delta_i\}$ и $\{\varepsilon_i\}$ и частными модулями непрерывности $\omega_1(h_i, f, X)$ и $\omega_2(\delta_i, f, X)$ свяжем новые функции

$$\Omega_1(h, f, X) = \inf_k \left\{ h \sum_{i=1}^k \frac{\omega_1(h_i, f, X)}{h_i \psi(X; \varepsilon_i)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\omega_1(h_{i-1}, f, X) + \omega_2(\delta_{i-1}, f, X)}{\psi(X; \varepsilon_i)} \right\}, \quad (7)$$

$$\Omega_2(\delta, f, X) = \inf_k \left\{ \delta \sum_{i=1}^k \frac{\omega_2(\delta_i, f, X)}{\delta_i \psi(X; \varepsilon_i)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\omega_1(h_{i-1}, f, X) + \omega_2(\delta_{i-1}, f, X)}{\psi(X; \varepsilon_i)} \right\}.$$

Эти функции являются вогнутыми, так как являются нижними границами линейных функций и, кроме того, в силу (6) в нуле равны нулю.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – симметричное пространство и его фундаментальная функция $\psi(X, t)$ строго монотонна. Пусть задана непрерывная функция $f(x, y)$ с заданными частными модулями непрерывности $\omega_1(h, f, X)$ и $\omega_2(\delta, f, X)$. Пусть задано $\varepsilon > 0$ и пусть последовательности $\{h_i\}$, $\{\delta_i\}$ и $\{\varepsilon_i\}$ удовлетворяют (4)–(6). Тогда существует множество $W(\varepsilon)$ такое, что выполнены соотношения:

$$\text{а) } \mu(W(\varepsilon)) < \varepsilon; \quad (8)$$

$$\text{б) если } (x_1, y), (x_2, y) \in I^2 \setminus W(\varepsilon), \text{ то}$$

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq |f(h_0, \delta_0; x_1, y) - f(h_0, \delta_0; x_2, y)| + c_1 \Omega_1(|x_1 - x_2|, f, X); \quad (9)$$

$$\text{в) если } (x, y_1), (x, y_2) \in I^2 \setminus W(\varepsilon), \text{ то}$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |f(h_0, \delta_0; x, y_1) - f(h_0, \delta_0; x, y_2)| + c_1 \Omega_2(|y_1 - y_2|, f, X). \quad (10)$$

Здесь c_1 – абсолютная константа. Можно положить $c_1 = \max\{16c_0, 8\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем числа α_i , β_i и γ_i так, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{\psi(X; \varepsilon_i)}{2} = \frac{1}{\gamma_i} \{ \omega_1(h_i, f, X) + \omega_1(h_{i-1}, f, X) + \omega_2(\delta_i, f, X) + \omega_2(\delta_{i-1}, f, X) \}, \quad (11)$$

$$\frac{\psi(X; \varepsilon_i)}{4} = 2 \frac{c_0}{\alpha_i} \left\{ \frac{\omega_1(h_i, f, X)}{h_i} + \frac{\omega_1(h_{i-1}, f, X)}{h_{i-1}} \right\}, \quad (12)$$

$$\frac{\psi(X; \varepsilon_i)}{4} = 2 \frac{c_0}{\beta_i} \left\{ \frac{\omega_2(\delta_i, f, X)}{\delta_i} + \frac{\omega_2(\delta_{i-1}, f, X)}{\delta_{i-1}} \right\}. \quad (13)$$

Положим

$$g_i(x, y) = f(h_i, \delta_i; x, y) - f(h_{i-1}, \delta_{i-1}; x, y), \\ g_{i,1}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} g_i(x, y), \quad g_{i,2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} g_i(x, y).$$

Функции $g_i(x, y)$, $g_{i,1}(x, y)$, $g_{i,2}(x, y)$ непрерывны и для них согласно (2), (3) верны оценки

$$\|g_i(x, y) \mid X\| \leq \omega_1(h_{i-1}, f, X) + \omega_1(h_i, f, X) + \omega_2(\delta_{i-1}, f, X) + \omega_2(\delta_i, f, X), \\ \|g_{i,1}(x, y) \mid X\| \leq \frac{\omega_1(h_i, f, X)}{h_i} + \frac{\omega_1(h_{i-1}, f, X)}{h_{i-1}}, \\ \|g_{i,2}(x, y) \mid X\| \leq \frac{\omega_2(\delta_i, f, X)}{\delta_i} + \frac{\omega_2(\delta_{i-1}, f, X)}{\delta_{i-1}}. \quad (14)$$

Из (6) и последних соотношений следует, что справедливо равенство (ряд сходится в X)

$$f(x, y) = f(h_0, \delta_0; x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} \{ f(h_i, \delta_i; x, y) - f(h_{i-1}, \delta_{i-1}; x, y) \}.$$

Для каждого i для функций $g_i(x, y)$ и $g_{i,1}(x, y)$ применим лемму А, полагая $\gamma = \alpha_i/2$, а для функций $g_i(x, y)$ и $g_{i,2}(x, y)$ применим лемму А, полагая $\gamma = \beta_i/2$. Тогда получим множества $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\psi(X, \mu(U_{i,1})) \leq 2 \frac{c_0}{\alpha_i} \|g_{i,1}(x, y) \mid X\| \leq 2 \frac{c_0}{\alpha_i} \left\{ \frac{\omega_1(h_i, f, X)}{h_i} + \frac{\omega_1(h_{i-1}, f, X)}{h_{i-1}} \right\}, \\ \psi(X, \mu(U_{i,2})) \leq 2 \frac{c_0}{\beta_i} \|g_{i,2}(x, y) \mid X\| \leq 2 \frac{c_0}{\beta_i} \left\{ \frac{\omega_2(\delta_i, f, X)}{\delta_i} + \frac{\omega_2(\delta_{i-1}, f, X)}{\delta_{i-1}} \right\}$$

и, следовательно, согласно (12), (13) неравенству

$$\psi(X, \mu(U_{i,1} \cup U_{i,2})) \leq \psi(X, \mu(U_{i,1})) + \psi(X, \mu(U_{i,2})) \\ \leq \frac{\psi(X, \varepsilon_i)}{4} + \frac{\psi(X, \varepsilon_i)}{4} \leq \frac{\psi(X, \varepsilon_i)}{2}. \quad (15)$$

Если же точки $(x_1, y), (x_2, y) \in I^2 \setminus (U_{i,1} \cup U_{i,2})$, то выполнено неравенство

$$|g_i(x_1, y) - g_i(x_2, y)| \leq \alpha_i |x_1 - x_2|. \quad (16)$$

Если же точки $(x, y_1), (x, y_2) \in I^2 \setminus (U_{i,1} \cup U_{i,2})$, то выполнено неравенство

$$|g_i(x, y_1) - g_i(x, y_2)| \leq \beta_i |y_1 - y_2|.$$

Далее, для функций $g_i(x, y)$ введем множества $O_i = \{(t, s) : |g_i(t, s)| > \gamma_i\}$. Тогда из (1), (14) и (11) имеем

$$\begin{aligned} \psi(X, \mu(O_i)) &\leq \frac{1}{\gamma_i} \|g_i(x, y)\| X \\ &\leq \frac{1}{\gamma_i} \{\omega_1(h_{i-1}, f, X) + \omega_1(h_i, f, X) + \omega_2(\delta_{i-1}, f, X) + \omega_2(\delta_i, f, X)\} \\ &\leq \frac{\psi(X, \varepsilon_i)}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если же точки $(x_1, y), (x_2, y) \in I^2 \setminus O_i$ или $(x, y_1), (x, y_2) \in I^2 \setminus O_i$, то выполнены неравенства

$$|g_i(x_1, y) - g_i(x_2, y)| \leq \gamma_i, \quad |g_i(x, y_1) - g_i(x, y_2)| \leq \gamma_i. \quad (18)$$

Положим $W_i = U_{i,1} \cup U_{i,2} \cup O_i$. Тогда из неравенств (15), (17) получим

$$\psi(X, \mu(W_i)) \leq \psi(X, \mu(O_i)) + \psi(X, \mu(U_{i,1} \cup U_{i,2})) \leq \psi(X, \varepsilon_i).$$

Откуда из строгой монотонности $\psi(X, t)$ следует, что

$$\mu(W_i) \leq \varepsilon_i. \quad (19)$$

Положим $W(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$. Тогда из (5) и (19) следует, что выполнено (8). Если теперь $(x_1, y), (x_2, y) \in I^2 \setminus W(\varepsilon) \subseteq I^2 \setminus (U_{i,1} \cup U_{i,2} \cup O_i)$, то для любого i выполнены неравенства (16), (18). Поэтому для каждого $k \in \mathbb{N}$ можно написать неравенство

$$\begin{aligned} |f(x_1, y) - f(x_2, y)| &\leq |f(h_0, \delta_0; x_1, y) - f(h_0, \delta_0; x_2, y)| \\ &\quad + \sum_{i=1}^k |g_i(x_1, y) - g_i(x_2, y)| + \sum_{i=k+1}^{\infty} |g_i(x_1, y) - g_i(x_2, y)| \\ &\leq |f(h_0, \delta_0; x_1, y) - f(h_0, \delta_0; x_2, y)| + |x_1 - x_2| \sum_{i=1}^k \alpha_i + 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} \gamma_i. \end{aligned}$$

Из соотношений (11), (12) получим

$$\begin{aligned} |f(x_1, y) - f(x_2, y)| &\leq |f(h_0, \delta_0; x_1, y) - f(h_0, \delta_0; x_2, y)| \\ &\quad + 8c_0 |x_1 - x_2| \sum_{i=1}^k \frac{1}{\psi(X, \varepsilon_i)} \left\{ \frac{\omega_1(h_i, f, X)}{h_i} + \frac{\omega_1(h_{i-1}, f, X)}{h_{i-1}} \right\} \\ &\quad + 4 \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{\psi(X, \varepsilon_i)} \{\omega_1(h_i, f, X) + \omega_1(h_{i-1}, f, X) + \omega_2(\delta_i, f, X) + \omega_2(\delta_{i-1}, f, X)\}. \end{aligned}$$

Поскольку $\omega_1(h, f, X)$ и $\omega_2(\delta, f, X)$ – вогнутые функции, то они удовлетворяют неравенствам

$$\omega_1(h_i, f, X) \leq \omega_1(h_{i-1}, f, X), \quad \omega_2(\delta_i, f, X) \leq \omega_2(\delta_{i-1}, f, X),$$

$$\frac{\omega_1(h_{i-1}, f, X)}{h_{i-1}} \leq \frac{\omega_1(h_i, f, X)}{h_i}.$$

Поэтому

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq |f(h_0, \delta_0; x_1, y) - f(h_0, \delta_0; x_2, y)|$$

$$+ 16c_0|x_1 - x_2| \sum_{i=1}^k \frac{1}{\psi(X, \varepsilon_i)} \frac{\omega_1(h_i, f, X)}{h_i}$$

$$+ 8 \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{\psi(X, \varepsilon_i)} \{\omega_1(h_{i-1}, f, X) + \omega_2(\delta_{i-1}, f, X)\},$$

и можно положить $c_1 = \max\{16c_0, 8\}$.

Итак, неравенство (9) доказано. Если теперь $(x, y_1), (x, y_2) \in I^2 \setminus W(\varepsilon)$, то неравенство (10) доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Обсудим теперь возможности описания “наилучших” частных модулей непрерывности $\Omega_1(h, f, X)$, $\Omega_2(\delta, f, X)$ в (7), причем желательно “минимизировать” $\Omega_1(h, f, X)$, $\Omega_2(\delta, f, X)$ по последовательностям $\{h_i\}$, $\{\delta_i\}$, $\{\varepsilon_i\}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\omega(h)$ – некоторый вогнутый модуль непрерывности, $\omega(0) = 0$, и точки $\{h_i\}$ выбраны так, что $\omega(h_i) = 2^{-i}$. Если при некотором $q < 1$ выполнено соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega^{-1}(2^{-i-1})}{\omega^{-1}(2^{-i})} < \frac{q}{2}, \quad (20)$$

то существует $i_0 \in \mathbb{N}$, начиная с которого выполняется неравенство

$$\frac{\omega(h_i)}{h_i} < \frac{1+q}{2} \frac{\omega(h_{i+1})}{h_{i+1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\omega(h_i) = 2^{-i}$, то $h_i = \omega^{-1}(2^{-i})$. Поэтому

$$\frac{\omega(h_i)}{h_i} : \frac{\omega(h_{i+1})}{h_{i+1}} = \frac{\omega(h_i)}{h_i} \frac{h_{i+1}}{\omega(h_{i+1})} = \frac{2^{-i}}{\omega^{-1}(2^{-i})} \frac{\omega^{-1}(2^{-i-1})}{2^{-i-1}} = 2 \frac{\omega^{-1}(2^{-i-1})}{\omega^{-1}(2^{-i})}.$$

Из последнего равенства и из (20) и следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – симметричное пространство, фундаментальная функция которого $\psi(X, t)$ строго монотонна. Пусть задана непрерывная функция $f(x, y)$ с заданными частными модулями непрерывности $\omega_1(h) = \omega_1(h, f, X)$ и $\omega_2(\delta) = \omega_2(\delta, f, X)$. Пусть последовательности $\{h_i\}$, $\{\delta_i\}$ определены из соотношений $\omega_1(h_i) = 2^{-i}$, $\omega_2(\delta_i) = 2^{-i}$ и при некотором $q \in (0, 1)$ выполнены соотношения

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega_1^{-1}(2^{-i-1})}{\omega_1^{-1}(2^{-i})} < \frac{q}{2}, \quad \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega_2^{-1}(2^{-i-1})}{\omega_2^{-1}(2^{-i})} < \frac{q}{2}. \quad (21)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_i\}$ удовлетворяет (5) и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1}} = 1. \quad (22)$$

Тогда существует множество $W(\varepsilon)$ такое, что выполнены соотношения:

а) $\mu(W(\varepsilon)) < \varepsilon$;

б) если $(x_1, y), (x_2, y) \in I^2 \setminus W(\varepsilon)$ и $|x_1 - x_2| \in [h_j, h_{j-1})$, то

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq |f(h_0, \delta_0; x_1, y) - f(h_0, \delta_0; x_2, y)| + c \frac{\omega_1(|x_1 - x_2|)}{\psi(X, \varepsilon_j)}; \quad (23)$$

в) если $(x, y_1), (x, y_2) \in I^2 \setminus W(\varepsilon)$ и $|y_1 - y_2| \in [\delta_j, \delta_{j-1})$, то

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |f(h_0, \delta_0; x, y_1) - f(h_0, \delta_0; x, y_2)| + c \frac{\omega_2(|y_1 - y_2|)}{\psi(X, \varepsilon_j)}. \quad (24)$$

Здесь c не зависит от $i \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения последовательностей $\{h_i\}$, $\{\delta_i\}$ и из (21) следует, что выполнено (6). Поэтому для доказательства теоремы 2 согласно теореме 1 достаточно оценить функции $\Omega_1(h, f, X)$, $\Omega_2(\delta, f, X)$. Оценим функцию $\Omega_1(h) = \Omega_1(h, f, X)$. Из (22) и квазивогнутости фундаментальной функции $\psi(X, t)$ следует равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi(X, \varepsilon_i)}{\psi(X, \varepsilon_{i+1})} = 1. \quad (25)$$

Из (21), леммы 1 и последнего равенства следует, что при некотором $q_1 \in (0, 1)$ при всех достаточно больших i выполняются неравенства

$$\frac{\omega_1(h_{i+1})}{\psi(X, \varepsilon_{i+1})} \leq q_1 \frac{\omega_1(h_i)}{\psi(X, \varepsilon_i)}, \quad \frac{\omega_1(h_i)}{h_i \psi(X, \varepsilon_i)} \leq q_1 \frac{\omega_1(h_{i+1})}{h_{i+1} \psi(X, \varepsilon_{i+1})}.$$

Следовательно, найдется константа c_2 такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^k \frac{\omega_1(h_i)}{h_i \psi(X, \varepsilon_i)} \leq c_2 \frac{\omega_1(h_k)}{h_k \psi(X, \varepsilon_k)}, \quad (26)$$

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\omega_1(h_{i-1}) + \omega_2(\delta_{i-1})}{\psi(X, \varepsilon_i)} \leq c_2 \frac{\omega_1(h_k)}{\psi(X, \varepsilon_{k+1})}.$$

Поэтому если $(x_1, y), (x_2, y) \in I^2 \setminus W(\varepsilon)$ и $|x_1 - x_2| \in [h_j, h_{j-1})$, то из (25), (26) получим

$$\begin{aligned} \Omega_1(|x_1 - x_2|) &\leq |x_1 - x_2| \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\omega_1(h_i)}{h_i \psi(X, \varepsilon_i)} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\omega_1(h_{i-1}) + \omega_2(\delta_{i-1})}{\psi(X, \varepsilon_i)} \\ &\leq c_2 \left\{ |x_1 - x_2| \frac{\omega_1(h_{j-1})}{h_{j-1} \psi(X, \varepsilon_{j-1})} + \frac{2\omega_1(h_j)}{\psi(X, \varepsilon_j)} \right\} \\ &\leq c_2 \left\{ \frac{2\omega_1(h_j)}{\psi(X, \varepsilon_{j-1})} + \frac{2\omega_1(h_j)}{\psi(X, \varepsilon_j)} \right\} \\ &\leq c_2 \left\{ \frac{2\omega_1(|x_1 - x_2|)}{\psi(X, \varepsilon_j)} \frac{\psi(X, \varepsilon_j)}{\psi(X, \varepsilon_{j-1})} + \frac{2\omega_1(|x_1 - x_2|)}{\psi(X, \varepsilon_j)} \right\} \\ &\leq c_2 \left\{ c_3 \frac{2\omega_1(|x_1 - x_2|)}{\psi(X, \varepsilon_j)} + \frac{2\omega_1(|x_1 - x_2|)}{\psi(X, \varepsilon_j)} \right\} \leq c \frac{\omega_1(|x_1 - x_2|)}{\psi(X, \varepsilon_j)}. \end{aligned}$$

Соотношение (23) доказано; аналогично проверяется и (24).

Теорема доказана.

Теперь мы сформулируем теорему, показывающую неусилияемость теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – симметричное пространство, для фундаментальной функции которого выполнено условие

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi(X, t) = 0.$$

Пусть $\omega_1(h)$ и $\omega_2(\delta)$ – два модуля непрерывности, для которых выполнено (21). Пусть для последовательности $\{b_i\}$ выполнены соотношения

$$b_i \geq b_{i+1}, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_i}{b_{i+1}} = 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \infty.$$

Тогда найдется непрерывная функция $f \in X$ такая, что $\omega_1(h, f, X) \leq c\omega_1(h)$, $\omega_2(\delta, f, X) \leq c\omega_2(\delta)$ и для любого множества D с $\mu(D) > 0$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi(X, b_i)}{\omega_1(2^{-i})} \sup\{|f(x_1, y) - f(x_2, y)| : (x_1, y), (x_2, y) \in D, |x_1 - x_2| < 2^{-i}\} &> 0, \\ \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi(X, b_i)}{\omega_2(2^{-i})} \sup\{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| : (x, y_1), (x, y_2) \in D, |y_1 - y_2| < 2^{-i}\} &> 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По симметричному пространству X на единичном квадрате построим симметричное пространство X_0 на единичном отрезке, полагая $\|g|X_0\| = \|\bar{g}|X\|$, где $\bar{g}(x, y) \equiv g(x)$. Очевидно, что фундаментальные функции X и X_0 совпадают. Согласно теореме 4 работы [2] построим две непрерывные одномерные функции $f_1(x), f_2(x)$, для которых выполнены условия

$$\omega(h, f_1, X_0) \leq \omega_1(h), \quad \omega(h, f_2, X_0) \leq \omega_2(h);$$

для любого множества $M \subset (0, 1)$ с $\mu(M) > 0$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi(X, b_i)}{\omega_1(2^{-i})} \sup\{|f_1(x_1) - f_1(x_2)| : x_1, x_2 \in M, |x_1 - x_2| < 2^{-i}\} &> 0, \\ \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi(X, b_i)}{\omega_2(2^{-i})} \sup\{|f_2(y_1) - f_2(y_2)| : y_1, y_2 \in M, |y_1 - y_2| < 2^{-i}\} &> 0. \end{aligned}$$

Для окончания доказательства теоремы достаточно положить $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ и использовать известную связь меры плоского множества с мерами его сечений (см., например, [9, с. 318]).

Теорема доказана.

Проиллюстрируем приведенные теоремы примером.

ПРИМЕР. Пусть задана функция $f: I^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\omega_1(h, f, X) \leq c_1 h^\alpha$ с $\alpha \in (0, 1)$, $\omega_2(\delta, f, X) \leq c_1 \delta^\beta$ с $\beta \in (0, 1)$.

Если положить $\varepsilon_i = c_2 i^{-(1+\sigma)}$ с $\sigma > 0$, то из теорем 1, 2 следует, что найдется множество меры больше $1 - \varepsilon$, на котором равномерные частные модули непрерывности допускают оценки

$$\begin{aligned} \omega_1(h, f, L^\infty) &\leq c_3 \frac{h^\alpha}{\psi(X, (\log \frac{1}{h})^{-(1+\sigma)})}, \\ \omega_2(\delta, f, L^\infty) &\leq c_3 \frac{\delta^\beta}{\psi(X, (\log \frac{1}{\delta})^{-(1+\sigma)})}. \end{aligned}$$

Если же положить $\varepsilon_i = c_2 i^{-1}(\log i)^{-(1+\sigma)}$ с $\sigma > 0$, то из теорем 1, 2 следует, что найдется множество меры больше $1 - \varepsilon$, на котором равномерные частные модули непрерывности допускают оценки

$$\begin{aligned} \omega_1(h, f, L^\infty) &\leq c_3 \frac{h^\alpha}{\psi(X, (\log \frac{1}{h})^{-1}(\log \log \frac{1}{h})^{-(1+\sigma)})}, \\ \omega_2(\delta, f, L^\infty) &\leq c_3 \frac{\delta^\beta}{\psi(X, (\log \frac{1}{\delta})^{-1}(\log \log \frac{1}{\delta})^{-(1+\sigma)})} \end{aligned}$$

и т.д.

С другой стороны, если положить $b_i = i^{-1}$, то из теоремы 3 следует, что найдется непрерывная f с $\omega_1(h, f, X) \leq c_1 h^\alpha$, $\omega_2(\delta, f, X) \leq c_1 \delta^\beta$, для которой частные равномерные модули непрерывности, вычисленные по любому множеству положительной меры, допускают оценки

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\omega_1(h, f, L^\infty)}{h^\alpha} \psi\left(X, \left(\log \frac{1}{h}\right)^{-1}\right) &> 0, \\ \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_2(\delta, f, L^\infty)}{\delta^\alpha} \psi\left(X, \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right) &> 0. \end{aligned}$$

Если же положить $b_i = (i \log i)^{-1}$ и применить теорему 3, то найдется непрерывная f с $\omega_1(h, f, X) \leq c_1 h^\alpha$, $\omega_2(\delta, f, X) \leq c_1 \delta^\beta$, для которой частные равномерные модули

непрерывности, вычисленные по любому множеству положительной меры, допускают оценки

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega_1(h, f, L^\infty)}{h^\alpha} \psi \left(X, \left(\log \frac{1}{h} \right)^{-1} \left(\log \log \frac{1}{h} \right)^{-1} \right) > 0,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_2(\delta, f, L^\infty)}{\delta^\alpha} \psi \left(X, \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{-1} \left(\log \log \frac{1}{\delta} \right)^{-1} \right) > 0.$$

Таким образом, “наилучшей” оценки модуля непрерывности в рассматриваемой ситуации нет.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
- [2] Бережной Е. И. Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств // Изв. РАН. 1996. Т. 60. № 2. С. 3–20.
- [3] Брудный Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 69–132.
- [4] Коляда В. И. Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. С. 534–537.
- [5] Осколков К. И. Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 2. С. 304–306.
- [6] Ульянов П. Л. О работах Н. Н. Лузина по метрической теории функций // УМН. 1985. Т. 40. № 3. С. 15–70.
- [7] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1977.
- [8] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
- [9] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: ber@uniyar.ac.ru

Поступило
06.03.1998