Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точных значениях их n -поперечников, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 334–345

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:10:44

УДК 517.5

О НАИЛУЧШИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ В L_2 НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ 2π -ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИХ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ

С. Б. Вакарчук

Для τ -модулей гладкости m -го порядка вычислены точные константы в неравенствах типа Джексона. Также найдены точные значения n -поперечников классов функций, τ -модули гладкости r -х производных которых мажорируются функциями, удовлетворяющими определенным ограничениям. Приведен пример мажоранты, для которой все сформулированные требования выполнены.

Библиография: 11 названий.

1. Пусть $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ есть пространство 2π -периодических измеримых функций, квадрат которых суммируем на $[0, 2\pi]$ с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Хорошо известно, что если функция $f(x) \in L_2$ и

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$$

– разложение $f(x)$ в ряд Фурье, то величина $E_n(f)_2$ ее наилучшего приближения подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$ в метрике пространства L_2 равна

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\{\|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx$$

– частичная сумма порядка $\leq n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_k^2(f) \stackrel{\text{df}}{=} a_k^2(f) + b_k^2(f)$.

Под L_2^r ($r = 0, 1, 2, \dots$; $L_2^0 = L_2$) понимают множество всех функций $f(x) \in L_2$, у которых $(r-1)$ -я производная $f^{(r-1)}(x)$ ($f^{(0)}(x) = f(x)$) абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}(x) \in L_2$.

Модулем непрерывности m -го порядка функции $f(x) \in L_2$ называют величину

$$\omega_m(f, t)_2 = \sup\{\|\Delta_h^m f(x)\|_2 : |h| \leq t\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(x + ih)$$

есть конечная разность m -го порядка $f(x)$.

При решении задач теории аппроксимации в L_2 точные константы

$$\kappa_{n,r,m}(t) \stackrel{\text{df}}{=} \sup \left\{ \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}, t/n)_2} : f(x) \in L_2^r, f(x) \neq \text{const} \right\} \quad (2)$$

в неравенствах типа Джексона

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\kappa}{n^r} \cdot \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{t}{n}\right)_2$$

изучались Н. И. Черных, А. А. Лигуном, В. А. Юдиным, А. Г. Бабенко, Л. В. Тайковым и другими авторами (см., например, [1]–[8]). В [7] изучалась следующая аппроксимативная характеристика:

$$\sup \left\{ \frac{n^{2r} \cdot E_{n-1}^2(f)_2}{\int_0^h \omega_1^2(f^{(r)}, t)_2 dt} : f(x) \in L_2^r, f(x) \neq \text{const} \right\}, \quad (3)$$

и было показано, что при $0 < nh \leq \pi/2$ она равняется числу $n/[2(nh - \sin nh)]$. Здесь и далее отношение $0/0$ полагается равным нулю.

Для исследования поведения наилучшего приближения функций алгебраическими полиномами в пространствах $L_p[a, b]$ ($p \geq 1$) и $C[a, b]$ Камен Г. Иванов ввел в рассмотрение новые модули гладкости и изучил их свойства и связи с известными дифференциально-разностными характеристиками [9], [10]. В данном сообщении мы воспользуемся указанными величинами для решения ряда экстремальных задач теории аппроксимации в L_2 .

Пусть $\lambda(x)$ есть произвольная положительная 2π -периодическая функция, а $w(x)$ — непрерывная неотрицательная функция периода 2π ; τ -модулем гладкости m -го порядка функции $f(x) \in L_{\max(p,p')}[0, 2\pi]$ ($p, p' \geq 1$) называют величину

$$\tau_m(f, w; \lambda)_{p', p} = \|w(\cdot) \omega_m(f, \cdot; \lambda(\cdot))_{p'}\|_p,$$

где

$$\omega_m(f, x; \lambda(x))_{p'} = \left\{ \frac{1}{2\lambda(x)} \int_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} |\Delta_h^m f(x)|^{p'} dh \right\}^{1/p'}.$$

Если, например, $\lambda(x) \equiv u = \text{const} > 0$, $f(x) \in L_p[0, 2\pi]$, $w(x) \equiv 1$ и $p' \in [1, p]$, то [9]

$$\tau_m(f, 1; u)_{p', p} \asymp \omega_m(f, u)_p, \quad (4)$$

где символ ' $\asymp$ ' означает отношение слабой эквивалентности. Исходя из (4), отметим, что наряду с вычислением величин (2) и (3) определенный интерес представляет и нахождение экстремальных характеристик

$$\Omega_{n, r, m}(t)_{p'} \stackrel{\text{df}}{=} \sup \left\{ \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)_2}{\tau_m(f^{(r)}, 1; t/n)_{p', 2}} : f(x) \in L_2^r, f(x) \neq \text{const} \right\}, \quad (5)$$

$$\tilde{\Omega}_{n, r, m}(H)_{p'} = \sup \left\{ \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left[\int_0^H \tau_m^2(f^{(r)}, 1; t)_{p', 2} dt \right]^{1/2}} : f(x) \in L_2^r, f(x) \neq \text{const} \right\}, \quad (6)$$

где $1 \leq p' \leq 2$, $0 < t, H$.

Обозначим

$$\mathcal{J}_m(v) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^v (1 - \cos \tau)^m d\tau.$$

Одними из основных являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Для любых чисел $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{df}}{=} \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $0 < t \leq \pi$ справедливы равенства

$$\Omega_{n, r, m}(t)_2 = \left\{ \frac{t}{2^m \cdot \mathcal{J}_m(t)} \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 2. Если $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, то для любого $0 < H \leq \pi/n$ выполнены следующие равенства:

$$\tilde{\Omega}_{n, r, m}(H)_2 = \left\{ \frac{n}{2^m \int_0^H u^{-1} \cdot \mathcal{J}_m(nu) du} \right\}^{1/2}. \quad (8)$$

2. В нижеследующей теореме 3, в которой используются величины (5), получены точные значения ряда n -поперечников функциональных классов, определенных при помощи τ -модулей. Прежде чем привести ее формулировку, напомним некоторые необходимые определения.

Пусть $\mathbb{B}$ – единичный шар в L_2 ; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество в L_2 ; $\mathcal{L}_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\Lambda: L_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в $\mathcal{L}_n$; $\Lambda^\perp: L_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования L_2 на подпространство $\mathcal{L}_n$. Величины

$$\begin{aligned} d_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\|_2 : g \in \mathcal{L}_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_n \subset L_2 \}, \\ \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda L_2 \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset L_2 \}, \\ b_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon \mathbb{B} \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset L_2 \}, \\ \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda^\perp f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda^\perp L_2 \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset L_2 \}, \\ d^n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}^n \} : \mathcal{L}^n \subset L_2 \} \end{aligned}$$

называют соответственно *колмогоровским*, *линейным*, *бернштейновским*, *проекционным* и *гельфандовским* n -*поперечниками* множества $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2 . В силу специфики гильбертова пространства между приведенными аппроксимативными характеристиками существуют следующие связи [11]:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = p_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (9)$$

Пусть $\Psi(u)$ – произвольная монотонно возрастающая непрерывная на полусегменте $0 \leq u < \infty$ функция такая, что $\Psi(0) = 0$. Через $W_m^r(\Psi)$ $\{r \in \mathbb{Z}_+; W_m^0(\Psi) = W_m(\Psi); m \in \mathbb{N}\}$ обозначим класс функций $f(x) \in L_2^r$, для которых имеет место условие $\tau_m(f^{(r)}, 1; u)_{2,2} \leq \Psi(u)$ для любого $0 < u \leq \pi$.

Две следующие ниже теоремы также являются основными результатами данной статьи.

ТЕОРЕМА 3. Пусть мажоранта Ψ при некотором $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Psi^2(\pi t/(2n))}{\Psi^2(\pi/(2n))} \geq \frac{1}{\mathcal{J}_m(\pi/2)t} \begin{cases} \mathcal{J}_m\left(\frac{\pi t}{2}\right), & \text{если } 0 < t \leq 2, \\ \mathcal{J}_m(\pi) + \pi 2^{m-1}(t-2), & \text{если } 2 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} p_n(W_m^r(\Psi), L_2) &= E_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1}(W_m^r(\Psi))_2 \\ &= \left\{ \frac{\pi}{2^{m+1} \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \right\}^{1/2} \cdot \left[\frac{n+1}{2} \right]^{-r} \cdot \Psi\left(\frac{\pi}{2 \lfloor (n+1)/2 \rfloor} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $p_n(\cdot)$ – любой из n -поперечников, перечисленных выше, $[a]$ – целая часть числа a , $E_{k-1}(W_m^r(\Psi))_2 \stackrel{\text{df}}{=} \inf\{E_{k-1}(f)_2 : f \in W_m^r(\Psi)\}$ есть наилучшее приближение класса $W_m^r(\Psi)$ подпространством тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_{k-1}$ в метрике пространства L_2 .

Обозначим через $HW_m^r(L_2)$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $H > 0$) класс функций $f(x) \in L_2^r$, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^H \tau_m^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2} du \leq 1. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет неравенству $0 < Hn \leq \pi$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} p_n(HW_m^r(L_2), L_2) &= E_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1}(HW_m^r(L_2))_2 \\ &= \left[\frac{n+1}{2} \right]^{-r+1/2} \left\{ 2^m \int_0^H u^{-1} \cdot \mathcal{J}_m\left(\left[\frac{n+1}{2} \right] u \right) du \right\}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $p_n(\cdot)$ есть любой из ранее приведенных n -поперечников.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть u – произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству $0 < nu \leq \pi$. Тогда для произвольной функции $f(x) \in L_2^r$ ($f(x) \neq \text{const}$) получим

$$\begin{aligned} \tau_m^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2} &= \frac{1}{2\pi u} \int_0^{2\pi} dx \int_{-u}^u |\Delta_h^m f^{(r)}(x)|^2 dh = \frac{1}{2\pi} \int_{-u}^u \|\Delta_h^m f^{(r)}\|_2^2 dh \\ &= \frac{2^{m-1}}{u} \int_{-u}^u \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 k^{2r} (1 - \cos kh)^m dh \\ &\geq \frac{2^m}{u} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 k^{2r} \int_0^u (1 - \cos kh)^m dh. \end{aligned} \quad (14)$$

В работе [6, с. 219] было показано, что функция

$$G(t) \stackrel{\text{df}}{=} t^{2r} \int_0^u (1 - \cos th)^m dh$$

возрастает по $t > 0$. С учетом этого факта продолжим неравенство (14):

$$\geq \frac{2^m}{u} n^{2r} \left\{ \int_0^u (1 - \cos nh)^m dh \right\} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2. \quad (15)$$

Учитывая (1), из (14), (15) имеем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{u \tau_m^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2}}{2^m n^{2r} \int_0^u (1 - \cos nh)^m dh}.$$

Отсюда следует

$$\frac{n^r \cdot E_{n-1}(f)_2}{\tau_m(f^{(r)}, 1; u)_{2,2}} \leq \left\{ \frac{u}{2^m \int_0^u (1 - \cos nh)^m dh} \right\}^{1/2}. \quad (16)$$

Используя определение величины $\Omega_{n,r,m}(t)$ и полагая $t = nu$, из (11) получим оценку сверху

$$\Omega_{n,r,m}(t)_2 \leq \left\{ \frac{t}{2^m \cdot \mathcal{J}_m(t)} \right\}^{1/2}. \quad (17)$$

Переходя к получению оценки снизу, рассмотрим функцию $f_0(x) = \sin nx$, которая принадлежит пространству L_2^r . Поскольку в этом случае $E_{n-1}(f_0)_2 = 1$ и

$$\tau_m\left(f_0^{(r)}, 1; \frac{t}{n}\right)_{2,2} = n^r \left\{ \frac{2^m}{t} \cdot \mathcal{J}_m(t) \right\}^{1/2},$$

то

$$\Omega_{n,r,m}(t)_2 \geq \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f_0)_2}{\tau_m(f_0^{(r)}, 1; t/n)_{2,2}} = \left\{ \frac{t}{2^m \cdot \mathcal{J}_m(t)} \right\}^{1/2}.$$

Сравнив данную формулу и неравенство (17), получим соотношение (7). Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Исходя из неравенств (14), (15), для произвольной функции $f(x) \in L_2^r$ ($f(x) \neq \text{const}$) запишем оценку сверху величины ее наилучшего полиномиального приближения

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{\int_0^H \tau_m^2(f^{(r)}, 1; u)_{2,2} du}{2^m n^{2r} \int_0^H u^{-1} du \int_0^u (1 - \cos nh)^m dh}, \quad (18)$$

где $0 < H \leq \pi/n$. Отсюда с учетом (6) имеем

$$\tilde{\Omega}_{n,r,m}(H)_2 \leq \left\{ \frac{n}{2^m \int_0^H u^{-1} \cdot \mathcal{J}_m(nu) du} \right\}^{1/2}. \quad (19)$$

Для получения оценки снизу воспользуемся функцией $f_1(x) = \cos nx$, для которой, как следует из (14), (15), справедливо равенство

$$\int_0^H \tau_m^2(f_1^{(r)}, 1; u)_{2,2} du = 2^m n^{2r-1} \int_0^H u^{-1} \cdot \mathcal{J}_m(nu) du.$$

Используя определение величины $\tilde{\Omega}_{n,r,m}(H)_2$ и формулу $E_{n-1}(f_1)_2 = 1$, откуда получим

$$\tilde{\Omega}_{n,r,m}(H)_2 \geq \frac{n^r \cdot E_{n-1}(f_1)_2}{\left[\int_0^H \tau_m^2(f_1^{(r)}, 1; u)_{2,2} du \right]^{1/2}} = \left\{ \frac{n}{2^m \int_0^H u^{-1} \cdot \mathcal{J}_m(nu) du} \right\}^{1/2}.$$

Оценка (8) следует из сопоставления двух последних неравенств, чем и завершается доказательство теоремы 2.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Используя неравенство (16), в котором полагаем $u = \pi/(2n)$, определение класса $W_m^r(\Psi)$ и соотношения (9), получим оценки сверху

$$\begin{aligned} p_{2n}(W_m^r(\Psi), L_2) &\leq p_{2n-1}(W_m^r(\Psi), L_2) \leq d_{2n-1}(W_m^r(\Psi), L_2) \leq E_{n-1}(W_m^r(\Psi))_2 \\ &\leq \left\{ \frac{\pi}{2^{m+1} \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \right\}^{1/2} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Для получения оценок снизу рассмотрим бернштейновский $2n$ -поперечник класса $W_m^r(\Psi)$ в L_2 .

Покажем принадлежность к $W_m^r(\Psi)$ следующего шара:

$$\mathbb{B}_* \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_n : \|T_n\|_2 \leq \left[\frac{\pi}{2^{m+1} \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \right]^{1/2} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}.$$

Для этого понадобится одно неравенство, полученное в [6] для любого тригонометрического полинома $T_n(x) \in \mathcal{T}_n$:

$$\|\Delta_h^m T_n^{(r)}\|_2^2 \leq 2^m \mu_{n,m}(h) n^{2r} \|T_n\|_2^2, \quad (21)$$

где

$$\mu_{n,m}(h) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{cases} (1 - \cos nh)^m, & \text{если } |h| \leq \frac{\pi}{n}, \\ 2^m, & \text{если } |h| \geq \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Пусть сначала $0 < u \leq \pi/n$. Тогда $\forall T_n(x) \in \mathbb{B}_*$ в силу (21) имеем

$$\begin{aligned} \tau_m^2(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} &= \frac{1}{2u} \int_{-u}^u \|\Delta_h^m T_n^{(r)}\|_2^2 dh \leq 2^m n^{2r} \|T_n\|_2^2 \frac{1}{u} \int_0^u \mu_{n,m}(h) dh \\ &\leq \frac{\pi}{2u \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \Psi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \int_0^u (1 - \cos nh)^m dh. \end{aligned} \quad (22)$$

Полагая $t = 2nu/\pi$ и учитывая, что в рассматриваемом случае $0 < t \leq 2$, из первого ограничения в условии (10) и неравенства (22) получим

$$\tau_m(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} \leq \Psi(u) \quad \forall u \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right].$$

Пусть теперь $\pi/n \leq u \leq \pi$. Используя приведенные выше рассуждения, $\forall T_n(x) \in \mathbb{B}_*$ имеем

$$\tau_m^2(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} \leq \frac{\pi}{2u \cdot n \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \Psi^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \{\mathcal{J}_m(\pi) + 2^m(un - \pi)\}. \quad (23)$$

Снова полагая $t = 2nu/\pi$ и учитывая, что в данном случае $2 \leq t < \infty$, из второго ограничения в (10) и соотношения (23) запишем

$$\tau_m(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} \leq \Psi(u) \quad \forall u \in \left[\frac{\pi}{n}, \pi\right].$$

Таким образом, из доказанного неравенства

$$\tau_m(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} \leq \Psi(u) \quad \forall T_n(x) \in \mathbb{B}_*, \quad \forall u \in (0, \pi]$$

следует включение $\mathbb{B}_* \subset W_m^r(\Psi)$.

Используя определение бернштейновского n -поперечника и неравенства (9), получим

$$\begin{aligned} p_{2n}(W_m^r(\Psi), L_2) &\geq b_{2n}(W_m^r(\Psi), L_2) \geq b_{2n}(\mathbb{B}_*, L_2) \\ &\geq \left\{ \frac{\pi}{2^{m+1} \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \right\}^{1/2} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Требуемые равенства (11) следуют из сопоставления соотношений (20) и (24), чем и завершается доказательство теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнены условия теоремы 3, то имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n(f)| : f(x) \in W_m^r(\Psi)\} &= \sup\{|b_n(f)| : f(x) \in W_m^r(\Psi)\} \\ &= \left\{ \frac{\pi}{2^{m+1} \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \right\}^{1/2} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, приведем доказательство для коэффициентов Фурье $a_n(f)$. Поскольку

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - S_{n-1}(f, x)] \cos nx \, dx,$$

то на основании неравенства Гёльдера, (1) и (20) имеем

$$\sup\{|a_n(f)| : f(x) \in W_m^r(\Psi)\} \leq E_{n-1}(W_m^r(\Psi))_2 \leq \left\{ \frac{\pi}{2^{m+1} \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \right\}^{1/2} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \quad (25)$$

Для получения оценки снизу воспользуемся функцией

$$f_2(x) = \left\{ \frac{\pi}{2^{m+1} \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \right\}^{1/2} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos nx.$$

Из теоремы 3 следует, что $f_2(x) \in W_m^r(\Psi)$. Поэтому

$$\sup\{|a_n(f)| : f(x) \in W_m^r(\Psi)\} \geq |a_n(f_2)| = \left\{ \frac{\pi}{2^{m+1} \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \right\}^{1/2} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Из (25) и последнего неравенства получаем

$$\sup\{|a_n(f)| : f(x) \in W_m^r(\Psi)\} = \left\{ \frac{\pi}{2^{m+1} \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)} \right\}^{1/2} n^{-r} \Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Следствие 1 доказано.

6. Приведем пример мажоранты, для которой имеют место ограничения (10). Покажем, что такой функцией будет $\Psi(u) = u^{\alpha/2}$, где $\alpha = \pi/(2 \cdot \mathcal{J}_m(\pi/2)) - 1$, т.е. докажем справедливость неравенств

$$t^{\alpha+1} \geq \frac{1}{\mathcal{J}_m(\pi/2)} \begin{cases} \mathcal{J}_m\left(\frac{\pi t}{2}\right), & \text{если } 0 < t \leq 2, \\ \mathcal{J}_m(\pi) + 2^{m-1}\pi(t-2), & \text{если } 2 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (26)$$

Однако, определим вначале границы измерения числа α . Поскольку

$$\mathcal{J}_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \left(2 \sin^2 \frac{\tau}{2}\right)^m d\tau$$

и на сегменте $0 \leq \tau \leq \pi/2$ справедливо неравенство

$$\sqrt{2} \sin \frac{\tau}{2} \geq \frac{2}{\pi} \tau,$$

очевидно, что

$$\mathcal{J}_m\left(\frac{\pi}{2}\right) > \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m} \int_0^{\pi/2} \tau^{2m} d\tau = \frac{\pi}{2(2m+1)}.$$

Отсюда следует оценка сверху $\alpha < 2m$.

Покажем справедливость оценки снизу $\alpha > \pi m/2$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(\tau) \stackrel{\text{df}}{=} \left(\frac{2}{\pi}\tau\right)^{\pi/4} - \sqrt{2} \sin \frac{\tau}{2},$$

где $0 \leq \tau \leq \pi/2$, и докажем, что $F(\tau) > 0$ при $0 < \tau < \pi/2$. Поскольку при $\tau \rightarrow 0$ функция $F(\tau) = O(\tau^{\pi/4})$, то в достаточно малой окрестности нуля $F(\tau) > 0$. Предположим, что существует некоторая точка $\xi \in (0, \pi/2)$, в которой функция $F(\tau)$ меняет знак. Учитывая, что $F(0) = F(\pi/2) = 0$, откуда в силу теоремы Ролля получим, что первая производная

$$F^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\tau\right)^{\pi/4-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\tau}{2}$$

имеет на интервале $(0, \pi/2)$ не менее двух нулей. Так как $F^{(1)}(\pi/2) = 0$, то и вторая производная

$$F^{(2)}(\tau) = 2^{-3/2} \sin \frac{\tau}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\pi/4} \frac{1-\pi/4}{2\tau^{2-\pi/4}}$$

на основании выше указанной теоремы должна иметь на $(0, \pi/2)$ по крайней мере два нуля. Однако это невозможно, поскольку $F^{(2)}(\tau)$ есть разность выпуклой вверх и выпуклой вниз функций. Из полученного противоречия следует, что при $0 < \tau < \pi/2$ имеет место неравенство

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\tau}{2}\right) < \left(\frac{2}{\pi}\tau\right)^{\pi/4}.$$

Тогда

$$\mathcal{J}_m\left(\frac{\pi}{2}\right) < \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\pi m/2} \int_0^{\pi/2} \tau^{\pi m/2} d\tau = \frac{\pi}{2(1+\pi m/2)}$$

и $\alpha > \pi m/2$. Таким образом, нами получено двойное неравенство

$$\frac{\pi}{2}m < \alpha < 2m. \quad (27)$$

Докажем справедливость первого условия в ограничении (26). Очевидно, что это эквивалентно неотрицательности на отрезке $[0, 2]$ следующей вспомогательной функции:

$$Q(t) \stackrel{\text{df}}{=} t^{\alpha+1} - \frac{\mathcal{J}_m(\pi t/2)}{\mathcal{J}_m(\pi/2)}.$$

Рассуждения проведем вначале для отрезка $[0, 1]$. Исходя из противного, предположим, что существует некоторая точка $\eta \in (0, 1)$, в которой функция $Q(t)$ меняет знак. Так как $Q(0) = Q(1) = 0$, то первая производная

$$Q^{(1)}(t) = (\alpha + 1) \left\{ t^\alpha - \left(1 - \cos \frac{\pi t}{2} \right)^m \right\} \quad (28)$$

$$(Q^{(1)}(t) = O(t^\alpha) \quad \text{при } t \rightarrow 0)$$

имеет на интервале $(0, 1)$ по крайней мере два нуля. Учитывая, что $Q^{(1)}(0) = Q^{(1)}(1) = 0$, вторая производная

$$Q^{(2)}(t) = (\alpha + 1) \left\{ \alpha t^{\alpha-1} - \frac{\pi m}{2} \sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi t}{2} \right)^{m-1} \right\}$$

должна иметь на $(0, 1)$ не менее трех нулей. Введя вспомогательное обозначение

$$G(t) \stackrel{\text{df}}{=} t^{1-\alpha} \sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) \left(\sin \frac{\pi t}{4} \right)^{2(m-1)},$$

запишем

$$Q^{(2)}(t) = 2^{m-2} \pi m (\alpha + 1) t^{\alpha-1} \left\{ \frac{\alpha}{\pi m 2^{m-2}} - G(t) \right\}. \quad (29)$$

Количество перемен знака у $Q^{(2)}(t)$ будет определяться соответствующей характеристической функции, записанной в фигурных скобках правой части формулы (29). Поэтому исследуем поведение $G(t)$, вычислив ее первую производную

$$G^{(1)}(t) = \frac{\pi}{2} t^{1-\alpha} \cos \left(\frac{\pi t}{2} \right) \sin^{2(m-1)} \left(\frac{\pi t}{4} \right) R(t),$$

где

$$R(t) \stackrel{\text{df}}{=} 1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi t}{2} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi t}{4} \right) \left[m - 1 - 2(\alpha - 1) \frac{\operatorname{tg}(\pi t/4)}{\pi t} \right].$$

Рассмотрим, как меняется функция $R(t)$ при увеличении t от 0 до 1. Если $\pi m/2 < \alpha \leq 2m - 1$, то в силу монотонного возрастания $\operatorname{tg}(\pi t/2) \operatorname{ctg}(\pi t/4)$ и $\operatorname{tg}(\pi t/4)/(\pi t)$ и предельного равенства $\lim\{(\pi t)^{-1} \operatorname{tg}(\pi t/4) : t \rightarrow 0\} = 1/4$ нетрудно видеть, что $R(t)$ меняет знак с плюса на минус. Если же $2m - 1 < \alpha < 2m$, то $R(0) = 2m - \alpha > 0$ и при возрастании t функция $R(t)$ также будет менять знак с плюса на минус.

Отсюда следует, что неотрицательная на $0 \leq t \leq 1$ функция $G(t)$ принимает максимальное значение в некоторой точке $\eta \in (0, 1)$, являясь монотонно возрастающей при $0 \leq t \leq \eta$ и монотонно убывающей при $\eta \leq t \leq 1$. Но тогда функция, записанная в фигурных скобках формулы (29), а значит и $Q^{(2)}(t)$, будет иметь на интервале $(0, 1)$ не более двух нулей. Полученное противоречие доказывает, что $Q(t) > 0 \quad \forall t \in (0, 1)$, т.е.

$$t^{\alpha+1} \geq \frac{\mathcal{I}_m(\pi t/2)}{\mathcal{I}_m(\pi/2)} \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (30)$$

Пусть теперь $1 \leq t \leq 2$. При $t = 2$ из (28) и (27) имеем

$$Q^{(1)}(2) = (\alpha + 1)(2^\alpha - 2^m) > (\alpha + 1)(2^{\pi m/2} - 2^m) > 0. \quad (31)$$

Представим на полусегменте $1 \leq t < 2$ функцию $Q^{(1)}(t)$ в следующем виде:

$$Q^{(1)}(t) = (\alpha + 1)2^m t^\alpha V(t),$$

где $V(t) \stackrel{\text{df}}{=} 2^{-m} - t^{-\alpha} \sin^{2m}(\pi t/4)$, и исследуем поведение $V(t)$. В связи с этим запишем

$$V^{(1)}(t) = -\frac{\pi}{2t^\alpha} \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \sin^{2m-1}\left(\frac{\pi t}{4}\right) \tilde{V}(t), \quad (32)$$

где $\tilde{V}(t) \stackrel{\text{df}}{=} m - 2\alpha(\pi t)^{-1} \operatorname{tg}(\pi t/4)$ есть монотонно убывающая функция.

Из (27) имеем

$$\tilde{V}(1) = m - \frac{2\alpha}{\pi} < 0,$$

т.е. функция $\tilde{V}(t) < 0$ при $1 \leq t < 2$, что в силу (32) означает выполнение неравенства $V^{(1)}(t) > 0$. Из соотношения $V(1) = 0$ следует, что $V(t) \geq 0$, если $1 \leq t < 2$, а это с учетом (31) равносильно неравенству $Q^{(1)}(t) \geq 0$ ($1 \leq t \leq 2$).

Отсюда следует, что $Q(t)$ есть неубывающая на сегменте $[1, 2]$ функция. Поскольку $Q(1) = 0$, то $Q(t) \geq 0$ и имеет место требуемое неравенство (30).

Пусть $t \geq 2$. Покажем справедливость второго условия в ограничении (26), что равносильно неотрицательности функции

$$\gamma(t) \stackrel{\text{df}}{=} t^{\alpha+1} - \frac{\mathcal{J}_m(\pi) + 2^{m-1}\pi(t-2)}{\mathcal{J}_m(\pi/2)}.$$

Для этого запишем

$$\gamma^{(1)}(t) = (\alpha + 1)t^\alpha - \frac{\pi 2^{m-1}}{\mathcal{J}_m(\pi/2)} = (\alpha + 1)(t^\alpha - 2^m).$$

Из (27) имеем $\gamma^{(1)}(t) > 0$ ($t \geq 2$), т.е. $\gamma(t)$ — монотонно возрастающая функция. Учитывая, что $\gamma(2) > 0$, имеем $\gamma(t) > 0$ ($t \geq 2$).

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Используя определение класса $HW_m^r(L_2)$, соотношения (18) и неравенства (9), получим следующие оценки сверху:

$$\begin{aligned} p_{2n}(HW_m^r(L_2), L_2) &\leq p_{2n-1}(HW_m^r(L_2), L_2) \leq d_{2n-1}(HW_m^r(L_2), L_2) \\ &\leq E_{n-1}(HW_m^r(L_2))_2 \leq n^{-r+1/2} \left\{ 2^m \int_0^H u^{-1} \cdot \mathcal{J}_m(nu) du \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Переходя к вычислению оценок снизу рассмотренных n -поперечников, введем шар

$$\tilde{\mathbb{B}} \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_n : \|T_n\|_2 \leq n^{-r+1/2} \left[2^m \int_0^H u^{-1} \cdot \mathcal{J}_m(nu) du \right]^{1/2} \right\}.$$

Из (21), (22) имеем

$$\tau_m^2(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} \leq 2^m n^{2r-1} \|T_n\|_2^2 u^{-1} \cdot \mathcal{J}_m(nu).$$

Тогда для любого полинома $T_n(x) \in \widetilde{\mathbb{B}}$ отсюда получим

$$\int_0^H \tau_m^2(T_n^{(r)}, 1; u)_{2,2} du \leq 1,$$

т.е. шар $\widetilde{\mathbb{B}}$ принадлежит классу $HW_m^r(L_2)$.

Используя определение бернштейновского n -поперечника и формулу (9), запишем

$$\begin{aligned} p_{2n}(HW_m^r(L_2), L_2) &\geq b_{2n}(HW_m^r(L_2), L_2) \geq b_{2n}(\widetilde{\mathbb{B}}, L_2) \\ &\geq n^{-r+1/2} \left\{ 2^m \int_0^H u^{-1} \cdot \mathcal{J}_m(nu) du \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Требуемые равенства (13) получаем из соотношений (33), (34). Теорема 4 доказана.

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 4 имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n(f)| : f(x) \in HW_m^r(L_2)\} &= \sup\{|b_n(f)| : f(x) \in HW_m^r(L_2)\} \\ &= n^{-r+1/2} \left\{ 2^m \int_0^H u^{-1} \cdot \mathcal{J}_m(nu) du \right\}^{-1/2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Доказательство данного факта не приводится, поскольку оно аналогично доказательству следствия 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.
- [2] Черных Н. И. О неравенствах Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
- [3] Лигун А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1978. Т. 24. № 6. С. 785–792.
- [4] Юдин В. А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 1. С. 54–57.
- [5] Бабенко А. Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 651–664.
- [6] Тайков Л. В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. 1979. Т. 25. № 2. С. 217–223.
- [7] Тайков Л. В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 433–438.
- [8] Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 // Применение функц. анализа в теории приближений. Сб. научн. трудов. Калинин: Калининский госуниверситет, 1988. С. 100–114.
- [9] Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. I // Сердика Бълг. Мат. Списание. 1982. Т. 8. № 3. С. 262–279.
- [10] Ivanov Kamen G. On a new characteristic of functions. II. Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in $C[-1, 1]$ and $L_p[-1, 1]$ // Плиска Бълг. Мат. Студ. 1983. Т. 5. С. 151–163.
- [11] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.