Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Р. Габдрахманов, Б. С. Клебанов, В. В. Филиппов, Об асимптотическом интегрировании квазилинейных дифференциальных уравнений, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 346–355

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm747>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:57:43

УДК 517.925.51

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. Р. Габдрахманов, Б. С. Клебанов, В. В. Филиппов

С помощью понятия сходимости пространств решений доказаны теоремы об асимптотическом поведении решений систем уравнений, близких к линейным. Приведен пример использования одной из теорем.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Цель статьи – выявить содержание теоремы о существовании решений квазилинейных уравнений с заданной асимптотикой (см. [1, гл. X]) с точки зрения топологических структур, описанных в [2] и [3, гл. IX]. Мы заменяем обычные метрические оценки возмущения типа неравенств и “*о-малых*” на условия сходимости в соответствующем пространстве $R_c(U)$.

Обозначениями и понятиями теории пространств решений дифференциальных уравнений, предложенной В. В. Филипповым, будем пользоваться без дополнительных пояснений (см. [2]). При этом распространим обозначения, относящиеся к открытому подмножеству $M \subseteq \mathbb{R} \times L$, на произвольное $M \subseteq \mathbb{R} \times L$, где L – конечномерное евклидово пространство. Заметим, что если $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R} \times L$, $Z \in R(U)$, то множество $Z_M = \{z \in Z : \text{Gr } z \subseteq M\}$ принадлежит $R(M)$.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R} \times L$ и $X \in R_c(M)$. Через X^+ обозначается пространство максимально продолженных вправо функций из X : функция z принадлежит X^+ , если область определения z , обозначаемая $\pi(z)$, либо

- 1) отрезок $[a, b]$,
- 2) полуинтервал $[a, b)$,
- 3) полуинтервал $[a, \infty)$,

причем не существует такой функции $x \in X$, что $\pi(x) = [a, c]$, $x|_{\pi(z)} = z$ и $c > b$ в случае 1), $c \geq b$ в случае 2).

Пусть $S \subseteq M$. Множество $\cup\{\text{Gr } z : z \in X, (\inf \pi(z), z(\inf \pi(z))) \in S\}$ обозначим через X^+S (другими словами, X^+S – множество всех точек M , лежащих на графиках функций из X^+ , исходящих из множества S).

ЛЕММА 1. Пусть $M \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $X \in R_c(M)$ и X принадлежат все функции, графики которых одноточечные подмножества M .

Тогда X – компакт в том и только том случае, когда M – компакт.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-01695, и Международного научного фонда, грант № J55100.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* очевидна. *Достаточность* следует из условия $X \in R_c(M)$ и определения $R_c(M)$.

2. Обобщение теоремы Важевского. Здесь рассматривается вариант обобщения топологического принципа Важевского (см. [1]), необходимый для доказательства основного результата.

Пусть множество U открыто в $\mathbb{R} \times L$. Всюду в этом разделе оно считается основным объемлющим пространством, так что для $M \subseteq U$ под $[M]$ мы будем понимать замыкание M в U .

ЛЕММА 2. Пусть $S \subseteq M \subseteq U$, S – компакт, M замкнуто в U . Допустим, что $Z \in R_{ce}(U)$.

Тогда существование функции $z \in Z^+$, график которой начинается в S (т.е. $(\inf \pi(z), z(\inf \pi(z))) \in S$) и лежит в M , эквивалентно некомпактности в $C_s(U)$ множества $\{z \in Z_M : (\inf \pi(z), z(\inf \pi(z))) \in S\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. *Необходимость.* Пусть $z \in Z^+$, $\pi(z) = [t_0, \omega)$, $\omega \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $(t_0, z(t_0)) \in S$, $\text{Gr } z \subseteq M$. Пусть точки t_k , $k \in \mathbb{N}$, лежат в области определения z и стремятся к ω . Тогда из последовательности функций $z|_{[t_0, t_k]}$, $k \in \mathbb{N}$, нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность (иначе в Z существует функция, являющаяся продолжением z вправо).

II. *Достаточность.* Пусть функции $z_i \in Z_M$ таковы, что $t_i = \inf \pi(z_i)$, $y_i = z_i(t_i)$, $(t_i, y_i) \in S$, и из последовательности z_i нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности. Так как S – компакт, можно считать, переходя, если нужно, к подпоследовательности, что $(t_i, y_i) \rightarrow (t_0, y_0) \in S$ при $i \rightarrow \infty$.

Пусть $\zeta_i \in Z^{-+}$ – какое-нибудь продолжение z_i . Тогда по теореме IX.3.12 из [3] существуют подпоследовательность $\{\zeta_{i_k} : k \in \mathbb{N}\}$ последовательности $\{\zeta_i : i \in \mathbb{N}\}$ и функция $\zeta \in Z^{-+}$ такие, что $y_0 = \zeta(t_0)$ и на любом отрезке из области определения ζ функции ζ_{i_k} равномерно сходятся к ζ .

Пусть $\zeta_0 = \zeta|_{[t_0, +\infty) \cap \pi(\zeta)}$. Очевидно, $\zeta_0 \in Z^+$. Покажем, что $\text{Gr } \zeta_0$ лежит в M . Предположим противное. Тогда существует такое $\tau \in \pi(\zeta_0)$, что $(\tau, \zeta_0(\tau)) \notin M$. Так как $U \setminus M$ открыто, то, начиная с некоторого k , точки $(\tau, \zeta_{i_k}(\tau))$ также не принадлежат M . Так как $\text{Gr } z_{i_k}$ лежит в M , отсюда следует, что $\sup \pi(z_{i_k}) < \tau$. Иначе говоря, функции z_{i_k} являются ограничениями функций $\zeta_{i_k}|_{[t_{i_k}, \tau]}$, сходящихся к $\zeta_0|_{[t_0, \tau]}$. Но отсюда следует, что и из последовательности z_{i_k} можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, что противоречит сделанному предположению о функциях z_i .

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В предположениях леммы 2 существование функции $z \in Z^+$, график которой начинается в S и лежит в M , эквивалентно некомпактности множества $(Z_M)^+ S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(Z_M)^+ S = A$. Компактность A в силу леммы 1 эквивалентна компактности Z_A . Заметим теперь, что Z_A является множеством таких функций z из Z_M , что существует продолжающая z функция из Z_M , график которой начинается в S . Таким образом, компактность Z_A эквивалентна компактности множества $\{z \in Z_M : (\inf \pi(z), z(\pi(z))) \in S\}$. Отсюда по лемме 2 получаем требуемое.

ЛЕММА 3. Пусть $S \subseteq M \subseteq U$, S – компакт, M замкнуто в U . Допустим, что пространства $Z_i \in R_{ceu}(U)$, $i \in \mathbb{N}$, и $Z \in R_{ce}(U)$ таковы, что последовательность $\{Z_i: i \in \mathbb{N}\}$ сходится к Z в U . Пусть, кроме того, множество $(Z_M)^+S$ – компакт, а G – его окрестность в U .

Тогда, начиная с некоторого i , множества $((Z_i)_M)^+S$ также компактны и лежат в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Докажем вначале компактность. Предположим противное. Тогда согласно следствию 1 существует такая последовательность функций $z_k \in Z_{i_k}^+$ ($i_1 < i_2 < \dots$), что $(\inf \pi(z_k), z_k(\inf \pi(z_k))) \in S$ и $\text{Gr } z_k \subseteq M$. Тогда по теореме IX.3.12 из [3] существует функция $z \in Z^+$, обладающая теми же свойствами. Применяя следствие 1, получаем противоречие с компактностью $(Z_M)^+S$.

Тем самым, компактность доказана.

II. Докажем оставшуюся часть утверждения леммы. Допустим, что она не верна. Тогда существует такая последовательность функций $z_k \in Z_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \dots$), что $t_k = \inf \pi(z_k)$, $s_k = \sup \pi(z_k)$, $(t_k, z_k(t_k)) \in S$, $(s_k, z_k(s_k)) \in \partial G$ и $\text{Gr } z_k \subseteq M \cap [G]$. Отметим, что без потери общности можно считать, что $[G]$ – компакт. Так как $\text{Gr } z_k$ лежит в компакте $[G]$, в силу сходимости $\{Z_k: k \in \mathbb{N}\}$ к Z в U существует подпоследовательность z_{k_j} , последовательности $\{z_k: k \in \mathbb{N}\}$, которая сходится к $z \in Z$, причем $(\inf \pi(z), z(\inf \pi(z))) \in S$, $(\sup \pi(z), z(\sup \pi(z))) \in \partial G$ и $\text{Gr } z \subseteq M$. Таким образом, $\text{Gr } z$ лежит в $(Z_M)^+S$, но не лежит в G . Это противоречит определению G .

Лемма доказана.

Перейдем теперь к основной теореме этого пункта. Рассмотрим следующую ситуацию: M – замкнутое подмножество U , $S \subseteq M$, $H \subseteq M$, $\partial M = F_0 \cup F_1$; Z – пространство, принадлежащее $R_{ce}(U)$. Наша задача состоит в поиске функций из Z^+ , графики которых начинаются в S и не выходят за пределы множества M .

В следующей теореме под F_0 понимается та часть границы M , через которую графики функций из $(Z_M)^+$, начинающиеся в S , выйти не могут: $(Z_M)^+S \cap F_0 = \emptyset$ (в частности, $S \cap F_0 = \emptyset$, т.е. $S \cap \partial M = S \cap F_1$). Через точки множества F_1 эти графики выйти могут, но при этом выполнено следующее условие:

(*) если график функции $z \in Z_M$ начинается в S , то в $\pi(z)$ не существует таких чисел $a \leq b \leq c$, что $(a, z(a)) \in F_1$, $(c, z(c)) \in F_1$, $(b, z(b)) \in H$.

В условии (*) множество H характеризует “глубину”, на которую графики функций из Z_M , выходящие на границу M , могут возвращаться внутрь M .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $S \subseteq M \subseteq U$, $H \subseteq M$, $\partial M = F_0 \cup F_1$, S – компакт, множества H , M , F_0 замкнуты в U . Пусть $Z \in [R_{ceu}(U)]$. Допустим также, что $(Z_M)^+S \cap F_0 = \emptyset$ и выполнено условие (*).

Если при этом $S \cap F_1 (= S \cap \partial M)$ является ретрактом множества $M \setminus (\text{Int } H \cup F_0)$, но не является ретрактом S , то существует такая функция $z \in Z^+$, что $(\inf \pi(z), z(\inf \pi(z))) \in S$ и $\text{Gr } z \subseteq M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Докажем вначале теорему в предположении $Z \in R_{ceu}(U)$.

Предположим противное. Тогда в силу следствия 1 $(Z_M)^+S$ – компакт. Пусть s – произвольная точка S . Обозначим через ζ^s ту единственную функцию из Z^+ , для которой $s = (\inf \pi(\zeta^s), \zeta^s(\inf \pi(\zeta^s)))$. Для каждого $s \in S$ существует число

$$\beta(s) = \inf\{t: t \in \pi(\zeta^s), (t, \zeta^s(t)) \in \partial M\}.$$

Очевидно, $\text{Gr } \zeta^s|_{(-\infty, \beta(s)] \cap \pi(\zeta^s)} \subseteq M$. Также существует число

$$\alpha(s) = \inf\{t: t \in (-\infty, \beta(s)] \cap \pi(\zeta^s), \text{Gr } \zeta^s|_{[t, \beta(s)]} \subseteq M \setminus \text{Int } H\}.$$

Покажем, что заданное на S многозначное отображение $F: s \mapsto [\inf \pi(\zeta^s), \beta(s)]$ полунепрерывно снизу. Если s_k стремится к s_0 в S , то в силу того, что $Z \in R_{ceu}(U)$, функции $\zeta^{s_k}|_{F(s_k)}$ сходятся к $\zeta^{s_0}|_{[\inf \pi(\zeta^{s_0}), T]}$ для некоторого $T \in \mathbb{R}$ (их графики лежат в компакте $(Z_M)^+ S$). Но точка $(T, \zeta^{s_0}(T))$ лежит на границе M (как предел последовательности $(\beta(s_k), \zeta^{s_k}(\beta(s_k))) \in \partial M$), значит, $\beta(s_0) \leq T$ и $\beta(s_k) \rightarrow T \geq \beta(s_0)$ и потому отображение F полунепрерывно снизу.

Покажем теперь, что заданное на S многозначное отображение $G: s \mapsto [\alpha(s), \beta(s)]$ также полунепрерывно снизу. Убедимся вначале, что не существует последовательности $s_i \in S$ такой, что $s_i \rightarrow s_0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(s_i) > \beta(s_0)$. В противном случае функции $\zeta^{s_i}|_{[\inf \pi(\zeta^{s_i}), \beta(s_i)]}$ сходятся к $\zeta^{s_0}|_{[\inf \pi(\zeta^{s_0}), T_1]}$, где $\beta(s_i) \rightarrow T_1$, $\alpha(s_i) \rightarrow T_0$, $T_1 \geq T_0 > \beta(s_0)$, причем точки $(T_1, \zeta^{s_0}(T_1))$ и $(\beta(s_0), \zeta^{s_0}(\beta(s_0)))$ лежат на границе M (т.е. в F_1 в силу условий теоремы), а $(T_0, \zeta^{s_0}(T_0)) \in H$ (так как H замкнуто). Это противоречит условию (*). Полунепрерывность снизу отображения $G: s \mapsto [\alpha(s), \beta(s)]$ теперь легко проверить. Действительно, пусть $s_i \rightarrow s_0$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(s_i) = \alpha$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \beta(s_i) = \beta$. Если $s_0 \in H$, то $\alpha \leq \beta(s_0) \leq \beta$ и $\zeta^{s_0}(\alpha) \in \partial H$, но так как $\alpha(s_0)$ – ближайший из предшествующих $\beta(s_0)$ моментов времени t , когда $\zeta^{s_0}(t) \in \partial H$, то $\alpha \leq \alpha(s_0)$. Если же $s_0 \in S \setminus H$, то, как легко видеть, $\alpha = \alpha(s_0) = \inf \pi(\zeta^{s_0})$. Таким образом, в обоих случаях $\alpha \leq \alpha(s_0)$. Так как F полунепрерывно снизу, то $\beta \geq \beta(s_0)$ и поэтому $[\alpha(s_0), \beta(s_0)] \subseteq [\alpha, \beta]$. Полунепрерывность снизу отображения G доказана.

По первой теореме Майкла о селекции (см. [4]) существует такая непрерывная функция $\gamma: S \rightarrow \mathbb{R}$, что $\gamma(s) \in G(s)$ для всех s из S . Нетрудно видеть, что функция $\delta: S \rightarrow M \setminus (\text{Int } H \cup F_0)$, задаваемая равенством $\delta(s) = \zeta^s(\gamma(s))$, непрерывна. Имеем ретракцию S на $S \cap F_1$ как композицию δ с ретракцией $M \setminus (\text{Int } H \cup F_0)$ на $S \cap F_1$ (замечая, что для $s \in S \cap F_1$ имеем $\beta(s) = \alpha(s) = \inf \pi(\zeta^s)$, т.е. $\delta(s) = s$).

Противоречие с условием теоремы получено, и, тем самым, теорема в предположении $Z \in R_{ceu}(U)$ доказана.

II. Докажем теперь нашу теорему без этого дополнительного предположения.

Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда в силу следствия 1 $(Z_M)^+ S$ – компакт. Пусть последовательность пространств $Z_i \in R_{ceu}(U)$ сходится к Z в U . Пусть, кроме того, G такая окрестность $(Z_M)^+ S$, что множество $[G]$ компакт и лежит в U . В силу леммы 3, начиная с некоторого i_0 , множества $((Z_i)_M)^+ S$ компакты и лежат в G . По следствию 1 утверждение теоремы не выполнено для пространств Z_i при $i \geq i_0$.

Для получения противоречия достаточно показать, что все условия теоремы можно перенести на пространство Z_{i_1} для некоторого i_1 .

Докажем вначале, что существует $j \geq i_0$ такое, что для всех $i \geq j$ выполнено $((Z_i)_M)^+ S \cap F_0 = \emptyset$. Допустим противное. В этом случае существуют такие функции $z_k \in Z_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \dots$), что $\pi(z_k) = [t_k, T_k]$, $(t_k, z_k(t_k)) \in S$, $(T_k, z_k(T_k)) \in F_0$ и $\text{Gr } z_k$ лежит в M . Тогда $\text{Gr } z_k$ лежит в компакте $[G]$. Используя сходимости последовательности пространств Z_{i_k} к Z в U , получаем, что существует такая функция $z \in Z$, что $\pi(z) = [t_0, T_0]$, $(t_0, z(t_0)) \in S$, $(T_0, z(T_0)) \in F_0$ (здесь важна замкнутость F_0 в U) и $\text{Gr } z \subseteq M$. Это противоречит условию $(Z_M)^+ S \cap F_0 = \emptyset$.

Докажем теперь, что существует $l \geq j$ такое, что для пространства Z_l выполнено условие (*). Допустим противное. Тогда для каждого $i \geq j$ существуют такие

функции $z_i \in Z_i$ и числа $t_i \leq a_i \leq b_i \leq c_i$, что $\pi(z_i) = [t_i, c_i]$, $\text{Gr } z_i$ лежит в M , $(t_i, z_i(t_i)) \in S$, $(a_i, z_i(a_i)) \in F_1$, $(c_i, z_i(c_i)) \in F_1$, $(b_i, z_i(b_i)) \in H$. Множества $\text{Gr } z_i$ лежат в компакте $[G]$, значит, используя сходимость последовательности пространств Z_i к Z в U , получаем, что существуют такие функция $z \in Z$ и числа $t_0 \leq a_0 \leq b_0 \leq c_0$, что $\pi(z) = [t_0, c_0]$, $\text{Gr } z \subseteq M$, $(t_0, z(t_0)) \in S$, $(a_0, z(a_0)) \in \partial M$, $(c_0, z(c_0)) \in \partial M$ и $(b_0, z(b_0)) \in H$. Но так как $(Z_M)^+ S \cap F_0 = \emptyset$, $\partial M = F_0 \cup F_1$, то $(a_0, z(a_0)) \in F_1$, $(c_0, z(c_0)) \in F_1$, т.е. не выполнено условие $(*)$ для пространства Z . Противоречие с условием теоремы.

Итак, существует пространство $Z_l \in R_{ceu}(U)$, для которого выполнены условия, но не выполнено утверждение теоремы. Это противоречит доказанному в п. I. Тем самым, теорема доказана.

3. Существование решений. Пусть U – открытое подмножество $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, пространство $Z_0 \in R_{ceu}(U)$ является пространством решений линейного дифференциального уравнения $y' = Ay$, $y \in \mathbb{C}^n$, с постоянной блочно-диагональной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_3 \end{pmatrix},$$

причем $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1} \oplus \mathbb{C}^{n_2} \oplus \mathbb{C}^{n_3}$, $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, A_i — матрица оператора в $\mathbb{C}^{n_i}$; вещественные части собственных значений матрицы A_2 равны μ_2 , матрицы A_1 не меньше μ_1 , матрицы A_3 не больше μ_3 и $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$.

Заметим, что это общая ситуация для линейных уравнений с постоянными коэффициентами (после замены базиса в $\mathbb{C}^n$).

В дальнейшем предполагаем, что для всех $p \in \mathbb{C}^{n_1}$, $q \in \mathbb{C}^{n_2}$, $r \in \mathbb{C}^{n_3}$ выполняются неравенства

$$(\mu_1 - \varepsilon)\|p\|^2 \leq \text{Re}(p, A_1 p), \quad (\mu_2 - \varepsilon)\|q\|^2 \leq \text{Re}(q, A_2 q) \leq (\mu_2 + \varepsilon)\|q\|^2, \quad (1)$$

$$\text{Re}(r, A_3 r) \leq (\mu_3 + \varepsilon)\|r\|^2$$

для некоторого ε такого, что $\mu_3 + \varepsilon < \mu_2 - \varepsilon < \mu_2 < \mu_2 + \varepsilon < \mu_1 - \varepsilon$. (Через $(\cdot, \cdot)$ обозначается стандартное скалярное произведение в соответствующих пространствах.)

Выполнения неравенств (1) всегда можно добиться заменой базиса (переходом к псевдожордановой форме, отличающейся от жордановой только тем, что на побочной диагонали стоят не единицы, а ε).

Пусть $\theta_r > 0$, $\theta_q > 0$.

ЛЕММА 4. В предположениях начала п. 3 и (1) имеем:

1. $(\|r\|^2 - \theta_r^2 \|q\|^2)' < 0$ в точках, где $\|r\| = \theta_r \|q\|$, $\|q\| \neq 0$;
2. $(\|p\|^2 - \theta_p^2 \|q\|^2)' > 0$ в точках, где $\|p\| = \theta_p \|q\|$, $\|q\| \neq 0$

(производная берется в силу системы $y' = Ay$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит из простых выкладок:

$$(\|r\|^2 - \theta_r^2 \|q\|^2)' = 2(\text{Re}(r, r') - \theta_r^2 \text{Re}(q, q')) = 2(\text{Re}(r, A_3 r) - \theta_r^2 \text{Re}(q, A_2 q))$$

$$\leq 2((\mu_3 + \varepsilon)\|r\|^2 - \theta_r^2 (\mu_2 - \varepsilon)\|q\|^2) = 2(\mu_3 - (\mu_2 - 2\varepsilon))\theta_r^2 \|q\|^2 < 0.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} (\|p\|^2 - \theta_p^2 \|q\|^2)' &= 2(\operatorname{Re}(p, p') - \theta_p^2 \operatorname{Re}(q, q')) = 2(\operatorname{Re}(p, A_1 p) - \theta_p^2 \operatorname{Re}(q, A_2 q)) \\ &\geq 2((\mu_1 - \varepsilon)\|p\|^2 - \theta_p^2(\mu_2 + \varepsilon)\|q\|^2) = 2(\mu_1 - (\mu_2 + 2\varepsilon))\theta_p^2 \|q\|^2 > 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. За исключением точек $y = (p, q, r)$ с $q = \bar{0}$ граница области в $\mathbb{C}^n$, задаваемой неравенством $\|p\| < \theta_p \|q\|$, состоит из точек строгого выхода по отношению к системе $y' = Ay$ (определение см. в [1, § X.2]), а граница области в $\mathbb{C}^n$, задаваемой неравенством $\|r\| < \theta_r \|q\|$, — из точек строгого входа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_1} \oplus \mathbb{C}^{n_2} \oplus \mathbb{C}^{n_3}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_3 \end{pmatrix},$$

вещественные части собственных значений матрицы A_2 ($n_2 \times n_2$) равны μ_2 , матрицы A_1 ($n_1 \times n_1$) не меньше μ_1 , матрицы A_3 ($n_3 \times n_3$) не больше μ_3 ($\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$). Положим $U = (a, \infty) \times \mathbb{C}^n$, $t^* > a$, $V = U \setminus (\mathbb{R} \times \{\bar{0}\})$, $\theta_p, \theta_r, \varepsilon_r > 0$.

Предположим, что пространство $Z \in [R_{\text{ceu}}(U)]$ таково, что для всяких последовательностей чисел $\lambda_i > 0$, $h_i \rightarrow \infty$ ($i \rightarrow \infty$) пространства $(\tilde{\Phi}_{h_i \lambda_i}(Z))_V$ сходятся к $(Z_0)_V$ в V , где $\tilde{\Phi}_{h\lambda}$ — замена переменных, переводящая каждую функцию $z(t) \in Z$ в функцию $y(t) \equiv \lambda^{-1} z(t + h)$.

Тогда существует такое $\tau_1 \geq t^*$, что для любых $t_0 \geq \tau_1$, $q_0 \in \mathbb{C}^{n_2} \setminus \{\bar{0}\}$, $r_0 \in \mathbb{C}^{n_3}$, $\|r_0\| \leq \theta_r \|q_0\|$, найдутся $p_0 \in \mathbb{C}^{n_1}$ и функция $z(t) = (p(t), q(t), r(t)) \in Z^+$ такие, что $\pi(z) = [t_0, \infty)$, $p(t_0) = p_0$, $q(t_0) = q_0$, $r(t_0) = r_0$ и $\|p(t)\| \leq \theta_p \|q(t)\|$, $\|r(t)\| \leq (\theta_r + \varepsilon_r) \|q(t)\|$ для всех $t \geq t_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем в координаты, в которых выполнено (1). Пусть $0 < \varepsilon_p < \theta_p$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} G_p &= \{(t, y) = (t, p, q, r) : (t, y) \in V, \|p\| < \theta_p \|q\|\}, \\ H_p &= \{(t, y) = (t, p, q, r) : (t, y) \in V, \|p\| < (\theta_p - \varepsilon_p) \|q\|\}, \\ G_r &= \{(t, y) = (t, p, q, r) : (t, y) \in V, \|r\| < (\theta_r + \varepsilon_r) \|q\|\}, \\ H_r &= \{(t, y) = (t, p, q, r) : (t, y) \in V, \|r\| < \theta_r \|q\|\}. \end{aligned}$$

I. Покажем, что существует такое $\tau_2 \geq t^*$, что для всех $z \in Z_V^+$, удовлетворяющих условиям $\tau_2 \leq t = \inf \pi(z)$, $(t, z(t)) \in \partial_V G_p$, выполнено $\operatorname{Gr} z \cap H_p = \emptyset$.

Предположим противное. Тогда существует такая последовательность функций $z_k \in Z_V$ с областями определения $[t_k, s_k]$, что $(t_k, z_k(t_k)) \in \partial_V G_p$, $(s_k, z_k(s_k)) \in H_p$, $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Ограничивая области определения функций z_k , можно считать, что $\operatorname{Gr} z_k \subseteq [G_p]_V$.

Рассмотрим замены переменных $\Phi_{h_k \lambda_k}$ с $h_k = t_k - t^*$ и $\lambda_k = \|z_k(t_k)\|$. Введем обозначения $T = \{s_k - t_k : k \in \mathbb{N}\}$, $y_k = \tilde{\Phi}_{h_k \lambda_k}(z_k)$ ($k \in \mathbb{N}$). Возможны два случая.

а) Последовательность T ограничена. Тогда в силу сходимости пространств $\tilde{\Phi}_{h_k \lambda_k}(Z)_V$ к $(Z_0)_V$ в V существует такая функция $y_0 \in (Z_0)_V$, что некоторая подпоследовательность последовательности y_k сходится к y_0 . Пусть $\pi(y_0) = [t^*, s_0]$. Тогда $(t^*, y_0(t^*)) \in \partial_V G_p$, $(s_0, y_0(s_0)) \in [H_p]$. Получили противоречие со следствием 2.

б) Последовательность T не ограничена. Пусть $\{y_{k_l}: l \in \mathbb{N}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{y_k: k \in \mathbb{N}\}$, для которой выполнено $s_{k_l} - t_{k_l} \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$. Обозначим через z_l^* продолжение функции y_{k_l} до функции из $\tilde{\Phi}_{h_{k_l} \lambda_{k_l}}(Z)_V^+$. По теореме IX.3.12 из [3] в силу сходимости пространств $\tilde{\Phi}_{h_k \lambda_k}(Z)_V$ к $(Z_0)_V$ в V существует такая функция $z_0 \in (Z_0)_V^+$, что некоторая подпоследовательность последовательности функций z_l^* сходится к ней на любом отрезке в ее области определения. Отсюда $t^* = \inf \pi(z_0)$, $(t^*, z_0(t^*)) \in \partial_V G_p$ и $\text{Gr } z_0 \subseteq [G_p]_V$. Это противоречит следствию 2.

II. Покажем теперь, что существует такое $\tau_3 \geq t^*$, что для всех $z \in Z_V^+$, удовлетворяющих условиям $\tau_3 \leq t = \inf \pi(z)$, $(t, z(t)) \in H_r$, выполнено $\text{Gr } z \subseteq G_r$.

Предположим противное. Аналогично п. I получаем последовательность таких функций z_k из Z_V , что $\pi(z_k) = [t_k, s_k]$, $(t_k, z_k(t_k)) \in H_r$, $(s_k, z_k(s_k)) \in \partial_V G_r$, $t_k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). Без ограничения общности можем считать, что $\text{Gr } z_k \subseteq [G_r]_V \setminus \text{Int } H_r$.

Рассмотрим замены переменных $\Phi_{h_k \lambda_k}$ с $h_k = t_k - t^*$ и $\lambda_k = \|z_k(t_k)\|$. Тогда последовательность $\tilde{\Phi}_{h_k \lambda_k}(Z)_V$ сходится к $(Z_0)_V$ в V .

Рассуждая как в п. I, можно доказать, что либо

а) существует такая функция $y_0 \in (Z_0)_V$, что $\pi(y_0) = [t^*, s]$, $(t^*, y_0(t^*)) \in H_r$, $(s, y_0(s)) \in \partial_V G$, либо

б) существует такая функция $z_0 \in ((Z_0)_V)^+$, что $\inf \pi(z_0) = t^*$, $(t^*, z_0(t^*)) \in H_r$ и $\text{Gr } z_0 \subseteq [G_r]_V \setminus \text{Int } H_r$.

Но и то, и другое противоречит следствию 2.

III. Положим $M = [G_p]_V \cap [G_r]_V$, $F_0 = \partial_V M \cap \partial_V G_r$, $F_1 = \partial_V M \cap \partial_V G_p$. Пусть, кроме того, $H = M \cap [H_p]_V$, $S = \{(t_0, p, q_0, r_0) \in V: p \in \mathbb{C}^{n_1}, \|p\| \leq \theta_p \|q_0\|\}$ для произвольных $t_0 \geq \max\{\tau_3, \tau_2\}$, $q_0 \in \mathbb{C}^{n_2} \setminus \{0\}$, $r_0 \in \mathbb{C}^{n_3}$ таких, что $\|r_0\| \leq \theta_r \|q_0\|$. Нетрудно видеть, что $S \subseteq H_r$. Отсюда и из п. II следует, что $(Z_M)^+ S \cap F_0 = \emptyset$. Из п. I следует, что выполнено условие (*).

Для введенных объектов выполнены все предположения теоремы 1. Согласно этой теореме существует такая функция $z \in Z^+$, $z(t) = (p(t), q(t), r(t))$, что $\inf \pi(z) = t_0$, $q(t_0) = q_0$, $r(t_0) = r_0$ и $\|p(t)\| \leq \theta_p \|q(t)\|$, $\|r(t)\| \leq (\theta_r + \varepsilon_r) \|q(t)\|$, $t \in \pi(z)$. Пусть $u_0 = (t_0, q_0, r_0)$. Обозначим полученную функцию через z_{u_0} .

IV. Доказательство леммы будет завершено, если мы покажем, что существует такое $\tau_1 \geq \max\{\tau_3, \tau_2\}$, что все функции $z_{u_0} \in Z^+$, построенные в п. III при $u_0 = (t_0, q_0, r_0)$, $t_0 \geq \tau_1$, имеют областью определения $[t_0, \infty)$. Предположим противное. Тогда существуют такие $u_k = (t_k, q_k, r_k)$, что $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, $\pi(z_{u_k}) = [t_k, T_k)$, $T_k < \infty$. Зафиксируем произвольное $b > 0$. Пусть $s_k = t_k$, $z_k = z_{u_k}$, если $T_k - t_k \leq b$, и $s_k = T_k - b$, $z_k = z_{u_k}|_{[s_k, T_k]}$ в противном случае.

Согласно теореме IX.3.12 из [3], примененной к последовательности функций $\tilde{\Phi}_{h_k \lambda_k}(z_k)$, где $h_k = s_k - t^*$, $\lambda_k = \|z_k(s_k)\|$, существует такая функция $z_0 \in (Z_0^+)_V$, $z_0(t) = (p_0(t), q_0(t), r_0(t))$, что $\|p_0(t)\| \leq \theta_p \|q_0(t)\|$, $\|r_0(t)\| \leq (\theta_r + \varepsilon_r) \|q_0(t)\|$. Кроме того, для всех $t \in \pi(z_0)$ и для всякого отрезка $I \subseteq \pi(z_0)$, начиная с некоторого k , функции $\tilde{\Phi}_{h_k \lambda_k}(z_k)|_I$ определены и сходятся к $z_0|_I$. Отсюда следует, что $\pi(z_0) = [t^*, T_0]$, где $T_0 - t^* \leq b$, т.е. $\sup \pi(z) < \infty$.

Но, как известно, для пространства решений Z_0 системы уравнений $y' = Ay$ такое невозможно. Доказательство завершено.

Вещественный случай мало чем отличается от уже рассмотренного комплексного.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2} \oplus \mathbb{R}^{n_3}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & A_3 \end{pmatrix},$$

вещественные части собственных значений матрицы A_2 ($n_2 \times n_2$) равны μ_2 , матрицы A_1 ($n_1 \times n_1$) не меньше μ_1 , матрицы A_3 ($n_3 \times n_3$) не больше μ_3 ($\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$).

Положим $U = (a, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $t^* > a$, $V = U \setminus (\mathbb{R} \times \{\bar{0}\})$, $\theta_p, \theta_r, \varepsilon_r > 0$.

Предположим, что $Z \in [R_{ceu}(U)]$ таково, что для всяких последовательностей $\lambda_i > 0$, $h_i \rightarrow \infty$ ($i \rightarrow \infty$) пространства $(\Phi_{h_i \lambda_i}(Z))_V$ сходятся к $(Z_0)_V$ в V , где Z_0 – пространство решений дифференциального уравнения $y' = Ay$.

Тогда существует такое $\tau_1 \geq t^*$, что для любых $t_0 \geq \tau_1$, $q_0 \in \mathbb{R}^{n_2} \setminus \{\bar{0}\}$, $r_0 \in \mathbb{R}^{n_3}$, $\|r_0\| \leq \theta_r \|q_0\|$, найдутся $p_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ и функция $z(t) = (p(t), q(t), r(t))$ из Z^+ такие, что $\pi(z) = [t_0, +\infty)$, $p(t_0) = p_0$, $q(t_0) = q_0$, $r(t_0) = r_0$ и $\|p(t)\| \leq \theta_p \|q(t)\|$, $\|r(t)\| \leq (\theta_r + \varepsilon_r) \|q(t)\|$ для всех $t \geq t_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в качестве скалярного произведения вещественную часть стандартного эрмитового произведения в псевдожордановом базисе матрицы A . Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^{n_1}$, $q \in \mathbb{R}^{n_2}$, $r \in \mathbb{R}^{n_3}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} (\mu_1 - \varepsilon) \|p\|^2 &\leq (p, A_1 p), & (\mu_2 - \varepsilon) \|q\|^2 &\leq (q, A_2 q) \leq (\mu_2 + \varepsilon) \|q\|^2, \\ (r, A_3 r) &\leq (\mu_3 + \varepsilon) \|r\|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

для некоторого ε такого, что $\mu_3 + \varepsilon < \mu_2 - \varepsilon < \mu_2 < \mu_2 + \varepsilon < \mu_1 - \varepsilon$.

Последующая часть доказательства вполне аналогична доказательству теоремы 2.

4. Пример. Пусть $U = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\})$. В качестве примера применения теоремы 3 рассмотрим систему

$$\begin{cases} p' = 2p, \\ q' = q + q^2 / (t(|r - p| + |r - q|)), \\ r' = -r, \end{cases}$$

где $p, q, r \in \mathbb{R}$, а производная берется по переменной $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что под решениями мы понимаем абсолютно непрерывные функции, производные которых почти всюду удовлетворяют уравнениям рассматриваемой системы. Соответствующее пространство решений в области U обозначим Z . Для любого $N \in \mathbb{N}$ пусть Z_N – пространство решений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} p' = 2p, \\ q' = f_N(t, p, q, r), \\ r' = -r, \end{cases}$$

где $f_N(t, p, q, r) = q + q^2 / (t(|r - p| + |r - q|))$ на множестве

$$\left\{ (t, p, q, r) \in U : q + \frac{q^2}{t(|r - p| + |r - q|)} < N \right\}$$

и $f_N(t, p, q, r) = N$ в остальных точках множества U . Нетрудно видеть, что $Z_N \in R_{ceu}(U)$ и последовательность пространств $\{Z_N : N \in \mathbb{N}\}$ сходится к пространству Z в U , т.е. $Z \in [R_{ceu}(U)]$.

Введем следующие обозначения: $S = \{(t, p, q, r) \in U : p = q = r\}$, $V = U \setminus S$. Пусть, кроме того, $Z_i = \tilde{\Phi}_{h_i \lambda_i}(Z)$, $i \in \mathbb{N}$, где $\lambda_i > 0$, $h_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Пусть $Z_0 \in R_{ceu}(U)$ – пространство решений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} p' = 2p, \\ q' = q, \\ r' = -r. \end{cases}$$

Из [3, теорема IX.4.9] следует, что последовательность пространств $(Z_i)_V$ сходится в V к пространству $(Z_0)_V$.

Покажем, что последовательность пространств Z_i равномерно непрерывна, т.е. $\{Z_i : i \in \mathbb{N}\} \in s(U)$. Предположим противное. Пусть K компактное подмножество U и последовательность функций $z_n \in (Z_{i_n})_K$ ($i_1 < i_2 < \dots$) не является равномерно непрерывной. Пусть тогда число $\varepsilon > 0$ и точки $a_k < b_k$ из области определения z_{n_k} таковы, что $|a_k - b_k| < 1/k$, $\|z_{n_k}(a_k) - z_{n_k}(b_k)\| \geq \varepsilon$. Пусть $z_k^* = z_{n_k}|_{[a_k, b_k]}$. В силу компактности метризуемого пространства $\text{exr } K$ (см. теоремы IV.5.1 и IV.7.3 в [3]) можно предположить, что последовательность $\text{Gr } z_k^*$ сходится в топологии Виеториса к некоторому множеству $F \in \text{exr } K$ (в противном случае перейдем к подпоследовательности, удовлетворяющей этому свойству). Из теоремы IV.8.8 в [3] следует, что множество F связно. Из условия $|a_k - b_k| < 1/k$ и теоремы IV.8.6 в [3] следует, что $[a_k, b_k]$ сходятся к некоторому одноточечному множеству $\{t\}$, в которое отображается множество F при проектировании на первый сомножитель произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Из выбора числа ε следует, что диаметр множества F не меньше ε .

Докажем, что $F \cap V \neq \emptyset$. Пусть, напротив, $F \subseteq S$. Пусть отображение Π – проектирование в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ на все переменные, кроме q . Имеем: графики всех функций из Z_i (для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) проектируются посредством Π на графики решений системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} p' = 2p, \\ r' = -r. \end{cases}$$

Так как пространство решений этой системы лежит в $R_{ce}(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}))$ (см. [2, теорема 2.1]), найдется такое решение ζ этой системы, что для некоторой подпоследовательности $z_{k_l}^*$ последовательности функций z_k^* последовательность множеств $\Pi(\text{Gr } z_{k_l}^*)$ сходится к $\text{Gr } \zeta$. С другой стороны, $\Pi(\text{Gr } z_k^*) \rightarrow \Pi(F)$. Так как $\pi(\zeta) = \{t\}$, множество $\text{Gr } \zeta = \Pi(F)$ одноточечное. Но $\Pi|_S$ – инъективное отображение и если $F \subseteq S$, то F одноточечное множество. Мы получили противоречие с тем, что диаметр F не меньше ε .

Итак, существует такая точка $A \in \mathbb{R}^3$, что $(t, A) \in F \cap V$. Тогда можно выбрать такое компактное подмножество K_0 области V , что $(t, A) \in \text{Int } K_0$, $F \cap \partial K_0 \neq \emptyset$ (иначе, беря убывающую последовательность таких компактных множеств и используя связность F , получим опять, что F одноточечное множество). Из теоремы IV.3.10 в [3] следует, что, начиная с некоторого k , мы можем так выбрать отрезки $I_k \subseteq \pi(z_k^*)$ с концами s_k и t_k , что $(s_k, z_{n_k}(s_k)) \rightarrow (t, A)$, $(t_k, z_{n_k}(t_k)) \in \partial K_0$, $\text{Gr } z_{n_k}|_{I_k} \subseteq K_0$. Графики

элементов последовательности $\alpha = \{z_{n_k}|_{I_k} : k \in \mathbb{N}\}$ лежат в компакте $K_0 \subseteq V$, и так как $\{(Z_i)_V : i \in \mathbb{N}\} \in s(V)$ (это следует из отмеченной ранее сходимости последовательности $(Z_i)_V$ в V), из последовательности α можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Но предел этой подпоследовательности должен быть функцией, определенной на одноточечном множестве $\{t\}$, график которой пересекается с ∂K и $\text{Int } K$. Это невозможно. Полученное противоречие доказывает, что $\{Z_i : i \in \mathbb{N}\} \in s(U)$.

Покажем теперь, что последовательность пространств Z_i сходится к Z_0 в U . Определим функцию f на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ равенством $f(t, z) = p - r$, где $t \in \mathbb{R}$, $z = (p, q, r) \in \mathbb{R}^3$. По предложению IX.4.15 в [3] для всякого $c > 0$ множество

$$M(f, c) = \{z \in C_s(U) : f(t, z(t)) - f(s, z(s)) \geq c(t - s) \\ \text{для всех } s, t \in \pi(z), s < t\},$$

а также аналогично определяемое множество $M(-f, c)$ замкнуты в $C_s(U)$. По предложению IX.4.16 в [3] множество S не более чем счетно относительно пространств $M(f, c)$ и $M(-f, c)$. Для $c \geq 0$ введем обозначения

$$W_c^+ = \{(t, p, q, r) \in U : r + 2p > c\}, \\ W_c^- = \{(t, p, q, r) \in U : r + 2p < -c\}, \\ W_c = W_c^+ \cup W_c^-.$$

Так как для функции $z(t) = (p(t), q(t), r(t))$ из пространства Z_i выполнено $p' - r' = r + 2p$, то при $c > 0$ имеем $(Z_i)_{W_c^+} \subseteq M(f, c)$ и $(Z_i)_{W_c^-} \subseteq M(-f, c)$. Таким образом, по теореме IX.4.9 из [3], для всякого $c > 0$ последовательности пространств $(Z_i)_{W_c^+}$ и $(Z_i)_{W_c^-}$ сходятся к пространствам $(Z_0)_{W_c^+}$ и $(Z_0)_{W_c^-}$ в W_c^+ и W_c^- соответственно. Так как $W_0 = \cup\{W_c : c > 0\}$ и множества W_c открыты и упорядочены по включению, то любой компакт $K \subseteq W_0$ лежит в W_c для некоторого $c > 0$. Поэтому последовательность пространств $(Z_i)_{W_0}$ сходится к пространству $(Z_0)_{W_0}$ в W_0 . Если $p = r \neq 0$, то $r + 2p = 3r \neq 0$. Следовательно, $S \subseteq W_0$, а значит, $W_0 \cup V = U$. В силу теоремы IX.4.9 в [3] отсюда следует, что последовательность пространств Z_i сходится к пространству Z_0 в U .

Таким образом, для нашего примера выполнена теорема 3.

Приведенный пример не покрывается классическими результатами об асимптотическом интегрировании квазилинейных дифференциальных уравнений (см. [1, глава X]). Действительно, правая часть нашей системы не допускает локальной мажоранты класса L_1 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [2] Филиппов В. В. Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1993. № 1. С. 103–154.
- [3] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [4] Michael E. Continuous selections I // Ann. Math. 1956. V. 63. P. 361–382.

(С. Р. Габдрахманов, В. В. Филиппов) Московский государственный университет
(Б. С. Клебанов) Московский институт
повышения квалификации работников образования
E-mail: gabdr@nw.math.msu.su

Поступило
04.02.1998
Исправленный вариант
11.10.2000