Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, U -сходимость рядов Фурье с монотонными и с положительными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 356–365

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm748>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:39:01

УДК 517.52

***U*-СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ С МОНОТОННЫМИ И С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

М. И. Дьяченко

В статье рассматриваются вопросы *u*-сходимости кратных рядов Фурье с монотонными и с положительными коэффициентами в метриках L_p .

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Пусть натуральное $m \geq 2$, $T = [-\pi, \pi]$, $\mathbb{Z}^m$ – множество всех целочисленных точек в $\mathbb{R}^m$, 2π -периодическая по каждому переменному функция $f(x) \in L(T^m)$ и

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} a_n(f) e^{i n x} \quad (1)$$

– ее ряд Фурье, где

$$a_n(f) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} f(t) e^{-i n t} dt$$

и $n x = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m$. Хорошо известно, что в многомерном случае существует много различных определений сходимости ряда (1). Например, прямоугольные частичные суммы определяются формулой

$$S_N(f; x) = \sum_{|k_1| \leq N_1} \dots \sum_{|k_m| \leq N_m} a_k(f) e^{i k x},$$

где $N \in \mathbb{Z}^m \cap [0, +\infty)^m$ (если $N = (r, \dots, r)$, мы будем называть такие суммы кубическими) и сферические

$$S_R(f; x) = \sum_{|k| \leq R} a_k(f) e^{i k x},$$

где $R \geq 1$. Соответственно, если существуют

$$\lim_{\min_{1 \leq j \leq m} N_j \rightarrow \infty} S_N(f; x) = \alpha, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} S_{(r, \dots, r)}(f; x) = \alpha, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} S_R(f; x) = \alpha,$$

то скажем, что ряд (1) *сходится в точке x к числу α по прямоугольникам (по Прингсхейму), по кубам и по сферам*. Аналогичные определения можно дать и для сходимости в пространствах $L_p(T^m)$.

Результаты данной статьи получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-01-00042 и № 99-01-00062.

Заметим, что в вопросах сходимости прямоугольные и сферические частичные суммы ведут себя совершенно различным образом. Существуют и другие способы определения сходимости кратных рядов, такие как сходимость по полиэдрам, по гиперболическим крестам и т.д. Поэтому представляется интересным дать определение сходимости, включающее все описанные выше. Отметим, что во всех определениях сходимости множества, по которым берутся суммы, симметричны относительно всех координатных гиперплоскостей и содержат, вместе с каждой точкой, целочисленный параллелепипед с вершинами в данной точке и в начале координат. Представляется уместным дать следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть ограниченное множество $U \subset \mathbb{Z}^m$. Тогда скажем, что $U \in A$, если из того, что $\mathbf{k} \in U$, следует, что

$$\prod_{j=1}^m [-|k_j|, |k_j|] \cap \mathbb{Z}^m \subseteq U.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что числовой ряд

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} c_{\mathbf{n}}$$

u-сходится к числу α , если для любого $\varepsilon > 0$ существует число M такое, что для любого $U \in A$, для которого $\{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m: |\mathbf{n}| \leq M\} \subseteq U$, имеем

$$|S_U - \alpha| \equiv \left| \sum_{\mathbf{n} \in U} c_{\mathbf{n}} - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Очевидно, что если ряд *u-сходится*, то он сходится по Прингсхейму, по сферам, по гиперболическим крестам и т.д. Определение такой сходимости было впервые использовано Ф.Г. Арутюняном [1], [2] в статьях о представлении функций многих переменных кратными тригонометрическими рядами.

Некоторые задачи *u-сходимости* рядов Фурье в метриках пространств L_p [3], почти всюду [4] и всюду [5] были ранее рассмотрены автором.

Упомянем здесь основной результат работы [3]. Вначале приведем определение классов С.М. Никольского.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если k – натуральное число, то k -я *разность* функции f в точке $\mathbf{x}$ с шагом $\mathbf{t}$ это

$$\Delta_k(f, \mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_{r=0}^k (-1)^r C_k^r f(\mathbf{x} + r\mathbf{t}),$$

а если $1 \leq p \leq \infty$ и $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$, то *модуль гладкости порядка k* в пространстве $L_p(T^m)$ это

$$\omega_k(f, \delta)_p = \sup_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m: |\mathbf{t}| \leq \delta} \|\Delta_k(f, \mathbf{x}, \mathbf{t})\|_p, \quad \text{где } |\mathbf{t}| = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_m^2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $\alpha > 0$. Тогда обозначим через $H_p^\alpha(T^m) = \{f(x) \in L_p(T^m) : \text{для всех } k > \alpha \text{ имеем } \omega_k(f, \delta)_p = O(\delta^\alpha) \text{ при } \delta \rightarrow +0\}$. Если здесь заменить O на o , то получившийся класс обозначим $h_p^\alpha(T^m)$.

ТЕОРЕМА А. Если $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ и функция $f(x) \in h_p^{(m-1)|1/2-1/p|}(T^m)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ *и-сходится* в метрике $L_p(T^m)$.

ТЕОРЕМА Б. Если $m \geq 2$ и $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$, то существует такая функция $f(x) \in H_p^{(m-1)|1/2-1/p|}(T^m)$, что ее ряд Фурье *и-расходится* в метрике $L_p(T^m)$. Кроме того, при $p = \infty$ ряд Фурье в соответствующем примере *и-расходится всюду*.

Из этих результатов следует, что нужна достаточно большая (степенная) гладкость функции $f(x) \in L_p$, $p \neq 2$, для *и-сходимости* ее ряда Фурье в соответствующей метрике. Здесь естественно возникает вопрос: можем ли мы заменить количественные требования в теореме А на качественные? Например, мы можем рассматривать эту задачу для кусочно-монотонных функций, для функций с монотонными или с неотрицательными коэффициентами Фурье. В данной статье мы изучим два последних случая.

Разумеется, вначале мы должны дать определение тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами. В многомерном случае имеется несколько различных определений. Наиболее естественным является следующее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathbf{n}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m$. Тогда скажем, что $\mathbf{k} \geq \mathbf{n}$, если $k_j \geq n_j$ при $j = 1, 2, \dots, m$. Далее, пусть задана числовая последовательность $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m, \mathbf{n} \geq \mathbf{1}}$ (здесь через $\mathbf{1}$ обозначен вектор, все координаты которого равны 1). Мы назовем ее *монотонной*, если из того, что $\mathbf{k} \geq \mathbf{n}$, вытекает, что $0 \leq a_{\mathbf{k}} \leq a_{\mathbf{n}}$.

Заметим, что по теореме М. Рисса если $1 < p < \infty$ и функция $f(x) \in L_p(T^m)$, то для любого вектора $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)$ с $|g_j| = 1$ при $j = 1, 2, \dots, m$ ряд

$$\sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m : \\ \text{sign } n_j = g_j, \\ j=1,2,\dots,m}} a_{\mathbf{n}}(f) e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$$

также является рядом Фурье некоторой функции из пространства $L_p(T^m)$. Поэтому мы будем изучать ряды Фурье вида

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{n} \geq \mathbf{1}} a_{\mathbf{n}}(f) e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}} \quad (2)$$

с монотонными коэффициентами.

Ниже через C будем обозначать абсолютные положительные постоянные, не обязательно равные в различных случаях, через $C(p)$ положительные постоянные, зависящие только от p , и т.д.

В статье [6] автор установил следующий результат.

ТЕОРЕМА В. Пусть $2 < p < \infty$, функция $f(x) \in L_p(T^m)$ и имеет ряд Фурье (2) с монотонными коэффициентами. Тогда

$$J_p(f) \equiv \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{n} \geq \mathbf{1}} |a_{\mathbf{n}}(f)|^p \left(\prod_{j=1}^m n_j \right)^{p-2} \right)^{1/p} \leq C(p, m) \|f\|_{L_p}.$$

Отметим, что при $1 < p \leq 2$ аналогичная теорема содержится в хорошо известной теореме Харди–Литлвуда.

С другой стороны, в [7] автор установил такой результат.

ТЕОРЕМА Г. Пусть $p \in (2m/(m+1), 2)$ и мы имеем кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{n} \geq 1} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$$

с монотонными коэффициентами такой, что

$$J_p \equiv \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{n} \geq 1} |a_{\mathbf{n}}|^p \left(\prod_{j=1}^m n_j \right)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Тогда этот ряд является рядом Фурье некоторой функции $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ и $\|f\|_{L_p} \leq C(p, m) J_p$.

Следующее утверждение будет выведено из теорем В и Г в п. 2.

ТЕОРЕМА 1. Если $m \geq 2$, $2m/(m+1) < p < \infty$, $p \neq 2$, функция $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ и имеет ряд Фурье вида (2) с монотонными коэффициентами, то этот ряд *u*-сходится к $f(\mathbf{x})$ в метрике L_p .

В том же пункте мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Если $m \geq 2$ и $1 < p \leq 2m/(m+1)$, то существует функция $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$, ряд Фурье которой имеет вид (2) с монотонными коэффициентами, но *u*-расходится в метрике L_p .

В п. 3 будут доказаны следующие результаты для функций с неотрицательными коэффициентами Фурье.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $m \geq 2$, $p = 2k$, где $k = 2, 3, \dots$, а функция $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ и имеет неотрицательные коэффициенты Фурье. Тогда ряд Фурье функции $f(\mathbf{x})$ *u*-сходится к ней в метрике L_p .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m \geq 2$ и $p \in (1, \infty)$ не является четным целым числом. Тогда существует функция $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ с неотрицательными коэффициентами Фурье такая, что ее ряд Фурье *u*-расходится в метрике L_p .

2. У-сходимость рядов Фурье с монотонными коэффициентами. Вначале докажем теорему 1. По теореме А имеем

$$\left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{n} \geq 1} (a_{\mathbf{n}}(f))^p \left(\prod_{j=1}^m n_j \right)^{p-2} \right)^{1/p} < \infty.$$

Поэтому существует последовательность положительных чисел $\{\alpha_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \geq 1}$ такая, что последовательности $\{\alpha_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \geq 1}$ и $\Lambda \equiv \{1/\alpha_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \geq 1}$ монотонны и

$$C_0 = \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{n} \geq 1} (\alpha_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}(f))^p \left(\prod_{j=1}^m n_j \right)^{p-2} \right)^{1/p} < \infty. \quad (3)$$

Пусть $\{d_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, где $\nu = \nu(\mathbf{n})$, это последовательность Λ , занумерованная в порядке невозрастания, и

$$U_r = \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \cap [1, \infty)^m : \nu(\mathbf{n}) \leq r\}$$

при $r = 1, 2, \dots$. Поскольку последовательность Λ монотонна, очевидно, что $U_r \in A$ для любого r . Теперь определим функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{\mathbf{n} \in U_r} \alpha_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}} \right) \cdot (d_r - d_{r+1}). \quad (4)$$

Из (3) и из теоремы Б следует, что ряд (4) сходится в метрике L_p . Легко проверить, что $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, поскольку они имеют одинаковые коэффициенты Фурье. Аналогично, для заданного $U \in A$ мы можем представить соответствующую частичную сумму как

$$S_U(f; \mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{|U|} \left(\sum_{\mathbf{n} \in U'_r} \alpha_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}} \right) \cdot (d'_r - d'_{r+1}), \quad (5)$$

где $d'_{|U|+1} = 0$, $d'_r = d_r$ и $U'_r = U_r$ при $1 \leq r \leq r_0$, r_0 зависит от $N(U) = \max\{N : [1, N]^m \subseteq U\}$ и $r_0 \rightarrow \infty$ при $N(U) \rightarrow \infty$. Итак, имеем (см. (3)–(5))

$$\begin{aligned} \|S_U(f; \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})\|_{L_p} &\leq \sum_{r=r_0+1}^{\infty} C(p, m) C_0(d_r - d_{r+1}) + \sum_{r=r_0+1}^{|U|} C(p, m) C_0(d'_r - d'_{r+1}) \\ &\leq 2C(p, m) C_0 d_{r_0} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N(U) \rightarrow \infty$. Утверждение теоремы 1 следует из этой оценки.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть задано $m \geq 2$. Фиксируем некоторое $\alpha \in (0, (m-1)/(2m)]$ и определим функцию одного переменного

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2n_k^\alpha (\ln n_k)^{1/(2m)}} \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} e^{ilt}, \quad (6)$$

где $n_k = 2^{2^k}$ при $k = 0, 1, 2, \dots$ и $n_{-1} = 0$. Ряд (6) имеет монотонные коэффициенты, поэтому он сходится на $(0, 2\pi)$. Заметим, что при любом $p \in (1, 1/(1-\alpha)]$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_T |g_\alpha(t)|^p dt \right)^{1/p} &\leq C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2n_k^\alpha (\ln n_k)^{1/(2m)}} \left(\int_T \left| \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} e^{ilt} \right|^p dt \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k^{1-1/p}}{2n_k^\alpha (\ln n_k)^{1/(2m)}} \right) \\ &\leq C \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k/(2m)}} \right) < \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть теперь у нас некоторое $p \in (1, 2m/(m+1)]$. Возьмем $\alpha = 1 - 1/p$ и определим функцию

$$f(\mathbf{x}) = g_\alpha(x_1) g_\alpha(x_2) \cdots g_\alpha(x_m).$$

Согласно (7) функция $f(x) \in L_p(T^m)$. Далее, поскольку коэффициенты Фурье любой функции $g_\alpha(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, монотонно убывают, коэффициенты Фурье функции $f(x)$ монотонны. Теперь докажем, что ряд Фурье функции $f(x)$ u -расходится в метрике L_p .

Вначале определим две последовательности целочисленных множеств $\{U_k\}_{k=2}^\infty$ и $\{V_k\}_{k=2}^\infty$ из класса A . Пусть

$$U_k = \left(\bigcup_{j=1}^m \left(\prod_{r=1}^{j-1} [1, n_k] \right) \times [1, n_{k-1}] \times \left(\prod_{r=j+1}^m [1, n_k] \right) \right) \cap \mathbb{Z}^m$$

и

$$V_k = U_k \cup \{n \in \mathbb{Z}^m: n_j > n_{k-1} \text{ при } j = 1, 2, \dots, m \\ \text{и } |n - (n_{k-1}, \dots, n_{k-1})| \leq n_k - n_{k-1}\}$$

при $k = 2, 3, \dots$. Ясно, что все эти множества принадлежат классу A . Далее, имеем

$$\|S_{V_k}(f; x) - S_{U_k}(f; x)\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2n_k^\alpha (\ln n_k)^{1/(2m)}} \right)^m \left\| \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^m: l \geq 1 \\ 1 \leq |l| \leq n_k - n_{k-1}}} e^{ilx} \right\|_{L_p}. \quad (8)$$

Заметим, что справедливы следующие оценки снизу для норм ядер Дирихле:

$$\left\| \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z}^m: l \geq 1 \\ 1 \leq |l| \leq n_k - n_{k-1}}} e^{ilx} \right\|_{L_p} \geq C(p) \cdot \begin{cases} (n_k - n_{k-1})^{(m-1)/2} & \text{при } p < \frac{2m}{m+1}, \\ (n_k - n_{k-1})^{(m-1)/2} (\ln(n_k - n_{k-1}))^{1/p} & \text{при } p = \frac{2m}{m+1}. \end{cases}$$

Первая из этих оценок легко выводится из хорошо известного результата В. А. Ильина [8], а вторая – из соответствующей оценки В. А. Юдина [9].

Поскольку $n_k - n_{k-1} \geq n_k/2$ при $k \geq 2$, из (8) следует, что для $p = 2m/(m+1)$ имеем

$$\|S_{V_k}(f; x) - S_{U_k}(f; x)\|_{L_p} \geq C \cdot \frac{n_k^{(m-1)/2} \cdot (\ln n_k)^{1/p}}{n_k^{m\alpha} \cdot (\ln n_k)^{1/2}} = C(p) \cdot (\ln n_k)^{1/p-1/2} \rightarrow \infty$$

при $k \rightarrow \infty$. Если $1 < p < 2m/(m+1)$, то

$$\begin{aligned} \|S_{V_k}(f; x) - S_{U_k}(f; x)\|_{L_p} &\geq C(p) \cdot \frac{n_k^{(m-1)/2}}{n_k^{m\alpha} \cdot (\ln n_k)^{1/2}} \\ &\geq C(p) \cdot (n_k)^{((m-1)/2 + m/p - m)/2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$.

Итак, теорема 2 полностью доказана.

3. U -сходимость рядов Фурье с неотрицательными коэффициентами. Вначале мы докажем теорему 3. Пусть $p = 2q$, где натуральное $q \geq 2$, и пусть мы имеем полином с неотрицательными коэффициентами

$$P_\nu(x) = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m : -\nu \leq n_j \leq \nu \\ 1 \leq j \leq m}} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|P_\nu(x)\|_{L_p}^p &= \|P_\nu^q(x)\|_{L_2}^2 = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} |a_{\mathbf{n}}(P_\nu^q)|^2 \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \left(\sum_{\substack{\mathbf{k}(1) + \dots + \mathbf{k}(q) = \mathbf{n} \\ -\nu \leq k(l)_j \leq \nu \\ 1 \leq l \leq q, 1 \leq j \leq m}} a_{\mathbf{k}(1)} \dots a_{\mathbf{k}(q)} \right)^2 \equiv \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \sigma_{\mathbf{n}, \nu}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть функция $f(x) \in L_p(T^m)$ и имеет неотрицательные коэффициенты Фурье. Положим $P_\nu(x) = S_{(\nu, \dots, \nu)}(f; x)$ при $\nu = 1, 2, \dots$. Тогда по теореме М. Рисса имеем $P_\nu(x) \rightarrow f(x)$ при $\nu \rightarrow \infty$ в метрике L_p . Поскольку для любого $\nu \in \mathbb{Z}^m$ неотрицательные величины

$$\sigma_{\mathbf{n}, \nu} \uparrow \sum_{\mathbf{k}(1) + \dots + \mathbf{k}(q) = \mathbf{n}} a_{\mathbf{k}(1)} \dots a_{\mathbf{k}(q)} \equiv \sigma_{\mathbf{n}}$$

при $\nu \rightarrow \infty$, по теореме Фату последовательность $\{\sigma_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m} \in l_2$. В частности, $\sigma_{\mathbf{n}} < \infty$ для любого $\mathbf{n}$.

Теперь, если задано некоторое $\varepsilon > 0$, то выберем N так, что

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m : \mathbf{n} \notin [-N, N]^m} \sigma_{\mathbf{n}}^2 < \frac{\varepsilon^p}{3^p}. \quad (10)$$

Далее, фиксируем N и выберем ν так, что

$$|\sigma_{\mathbf{n}, \nu} - \sigma_{\mathbf{n}}|^2 < \frac{\varepsilon^p}{3^p \cdot 2^m \cdot N^m} \quad (11)$$

для каждого $\mathbf{n} \in [-N, N]^m$.

Наконец, если задано множество $U \in \mathcal{A}$ такое, что $U \supset [-\nu, \nu]^m$, то найдем натуральное $N_1 \geq N$ такое, что $U \subset [-N_1, N_1]^m$ и

$$\|f(x) - S_{(N_1, \dots, N_1)}(f; x)\|_{L_p} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (12)$$

Таким образом (см. (9)–(12)), имеем

$$\begin{aligned} &\|f(x) - S_U(f; x)\|_{L_p} \\ &\leq \|f(x) - S_{(N_1, \dots, N_1)}(f; x)\|_{L_p} + \|S_{(N_1, \dots, N_1)}(f; x) - S_U(f; x)\|_{L_p} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \left(\sum_{\mathbf{n} \in [-N, N]^m} |\sigma_{\mathbf{n}} - \sigma_{\mathbf{n}, \nu}|^2 \right)^{1/p} + \left(\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^m \setminus [-N, N]^m} \sigma_{\mathbf{n}}^2 \right)^{1/p} < \varepsilon, \end{aligned}$$

а это и требовалось доказать.

Заметим, что достаточно доказать теорему 4 в двумерном случае. Нам понадобится следующий вспомогательный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $p \in (1, \infty)$ и для любого натурального N существуют одномерный полином

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{r(N)} c_k(N) e^{ikx},$$

где $c_k(N) \geq 0$ при $k = 0, 1, \dots, r(N)$, и числа $\{\delta_k(N)\}_{k=0}^{r(N)}$, где $\delta_k(N) = 0$ или $\delta_k(N) = 1$ при всех k , такие, что если полином

$$Q_N(x) = \sum_{k=0}^{r(N)} \delta_k(N) c_k(N) e^{ikx},$$

то $\|Q_N(x)\|_{L_p(T)} > N \|P_N(x)\|_{L_p(T)}$. Тогда существует такая функция $f(x_1, x_2) \in L_p(T^2)$ с неотрицательными коэффициентами Фурье, что ее ряд Фурье u -расходится в метрике L_p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что последовательность $\{r(2^l)\}_{l=1}^\infty$ строго монотонна. Пусть $\alpha_l = \|P_{2^l}(x)\|_{L_p(T)}$ и функция

$$f(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^2 \alpha_l} \sum_{k=0}^{r(2^l)} c_k(2^l) e^{ikx_1} e^{i(r(2^l)-k)x_2} = \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^2 \alpha_l} R_l(x_1, x_2). \quad (13)$$

Поскольку

$$\|R_l(x_1, x_2)\|_{L_p(T^2)} \leq C \|P_{2^l}(t)\|_{L_p(T)} = C \alpha_l,$$

ряд (13) сходится в метрике L_p .

Теперь определим две последовательности множеств $\{U_l\}_{l=1}^\infty$ и $\{V_l\}_{l=1}^\infty$ из класса A . Пусть

$$U_l = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2: |n_1| + |n_2| \leq r(2^l)\}$$

и

$$V_l = U_l \setminus \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2: |n_1| + |n_2| = r(2^l) \text{ и } \delta_{|n_1|}(2^l) = 1\}$$

при $l = 1, 2, \dots$.

Тогда при $l = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} \|S_{U_l}(f; (x_1, x_2)) - S_{V_l}(f; (x_1, x_2))\|_{L_p(T^2)} &= \frac{1}{l^2 \alpha_l} \left\| \sum_{k=0}^{r(2^l)} \delta_k(2^l) c_k(2^l) e^{ik(x_1 - x_2)} \right\|_{L_p(T^2)} \\ &> \frac{1}{l^2 \alpha_l} \|Q_{2^l}(t)\|_{L_p(T)} > \frac{2^l}{l^2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

при $l \rightarrow \infty$. Итак, предложение 1 полностью доказано.

В статье [10] Г. Шапиро (см., также [11]) доказал, что для любого $p \in (1, \infty)$, которое не является четным целым числом, существуют одномерные полиномы

$$P^*(x) = \sum_{k=0}^{k_0} c_k^* e^{ikx}$$

$c_k^* \geq 0$ при $k = 0, 1, \dots, k_0$ и

$$Q^*(x) = \sum_{k=0}^{k_0} \delta_k^* c_k^* e^{ikx},$$

где $\delta_k^* = \pm 1$ для всех k , такие, что $\|Q^*(x)\|_{L_p(T)} > \|P^*(x)\|_{L_p(T)}$.

Теперь докажем, что при указанном выше p для любого N существуют полиномы

$$P_N^*(x) = \sum_{k=0}^{r(N)} c_k^*(N) e^{ikx}$$

с $c_k^*(N) \geq 0$ при $k = 0, 1, \dots, k_0$ и

$$Q_N^*(x) = \sum_{k=0}^{r(N)} \delta_k^*(N) c_k^*(N) e^{ikx},$$

где $\delta_k^*(N) = \pm 1$ для всех k , такие, что

$$\|Q_N^*(x)\|_{L_p(T)} > (2N + 1) \|P_N^*(x)\|_{L_p(T)}.$$

Следующее доказательство этого факта было дано С. В. Конягиным. Мы публикуем его здесь с любезного согласия Конягина.

Нам понадобится следующее утверждение, являющееся частным случаем известной леммы Фейера (см. [12, с. 77]).

ЛЕММА. Пусть $p \in (1, \infty)$ и $P(x)$ — одномерный тригонометрический полином. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число M_0 такое, что для любого натурального $M > M_0$ имеем

$$\left| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_T |P(x)|^p dx \right)^2 - \int_T |P(x)P(Mx)|^p dx \right| < \varepsilon.$$

Пусть $\|Q^*(x)\|_{L_p(T)} > q \|P^*(x)\|_{L_p(T)}$, где $q > 1$. Возьмем $\alpha > 0$ таким, что

$$\|Q^*(x)\|_{L_p(T)} > (q + \alpha) \|P^*(x)\|_{L_p(T)}.$$

Затем, используя лемму, выберем натуральное $M > \deg P^*(x)$ таким, что

$$\begin{aligned} \|Q^*(x)Q^*(Mx)\|_{L_p(T)} &> \left(1 - \frac{\alpha}{q + \alpha}\right) \frac{1}{(2\pi)^{1/(2p)}} \|Q^*(x)\|_{L_p(T)}^2 \\ &> \frac{1}{(2\pi)^{1/(2p)}} q(q + \alpha) \|P^*(x)\|_{L_p(T)}^2 > q^2 \|P^*(x)P^*(Mx)\|_{L_p(T)}. \end{aligned}$$

Заметим, что поскольку $M > \deg P^*(x)$, любой коэффициент полинома $Q^*(x) \times Q^*(Mx)$ равен соответствующему коэффициенту полинома $P^*(x)P^*(Mx)$, умноженному либо на 1, либо на -1 . При этом все коэффициенты полинома $P^*(x)P^*(Mx)$ неотрицательны. Таким образом, построены полиномы

$$P^{**}(x) = P^*(x)P^*(Mx) = \sum_{k=0}^{k_1} c_k^{**} e^{ikx}$$

с $c_k^{**} \geq 0$ при $k = 0, 1, \dots, k_1$ и

$$Q^{**}(x) = Q^*(x)Q^*(Mx) = \sum_{k=0}^{k_1} \delta_k^{**} c_k^{**} e^{ikx},$$

где $\delta_k^{**} = \pm 1$ для всех k , такие, что

$$\|Q^{**}(x)\|_{L_p(T)} > q^2 \|P^{**}(x)\|_{L_p(T)}.$$

Повторяя этот процесс, выводим требуемое утверждение.

Пусть $P_N(x) = 2P_N^*(x)$ и $Q_N(x) = Q_N^*(x) + P_N^*(x)$. Поскольку

$$\begin{aligned} \|Q_N(x)\|_{L_p(T)} &\geq \|Q_N^*(x)\|_{L_p(T)} - \|P_N^*(x)\|_{L_p(T)} \\ &> 2N \|P_N^*(x)\|_{L_p(T)} = N \|P_N(x)\|_{L_p(T)}, \end{aligned}$$

эта пара полиномов удовлетворяет условию предложения 1. Итак, доказательство теоремы 4 завершено.

Автор выражает глубокую признательность члену-корреспонденту РАН Б. С. Капину, профессору С. В. Конягину и профессору В. А. Юдину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арутюнян Ф. Г. Представление функций кратными рядами // Докл. АН АрмССР. 1977. Т. 64. № 2. С. 72–76.
- [2] Арутюнян Ф. Г. Представление измеримых функций многих переменных кратными тригонометрическими рядами // Матем. сб. 1985. Т. 126. № 2. С. 267–285.
- [3] Дьяченко М. И. U-сходимость кратных рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 2. С. 128–142.
- [4] Дьяченко М. И. U-сходимость почти всюду двойных рядов Фурье // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 1. С. 47–64.
- [5] Дьяченко М. И. Двумерные классы Ватермана и u-сходимость рядов Фурье // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 7. С. 23–40.
- [6] Dyachenko M. I. Multiple trigonometric series with lexicographically monotone coefficients // Anal. Math. 1990. V. 16. № 3. P. 173–190.
- [7] Дьяченко М. И. Нормы ядер Дирихле и некоторых других тригонометрических полиномов в пространствах L_p // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 3–20.
- [8] Ильин В. А. Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа // УМН. 1968. Т. 23. № 2. С. 60–120.
- [9] Юдин В. А. Докторская диссертация. М.: МИАН им. В. А. Стеклова, 1991.
- [10] Shapiro H. S. Majorant problems for Fourier coefficients // Quart. J. Math. 1975. V. 26. № 101. P. 9–18.
- [11] Boas R. P. Majorant problems for trigonometric series // J. d'Analyse Math. 1962/63. V. 10. P. 253–271.
- [12] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

10.05.2000

Исправленный вариант

24.11.2000