Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Ильин, Критерий регулярности полных матричных
полуколец, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 366–
374

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm749>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:06:24

УДК 512.552.35

КРИТЕРИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ПОЛНЫХ МАТРИЧНЫХ ПОЛУКОЛЕЦ

С. Н. Ильин

Получены необходимые и достаточные условия регулярности полных матричных полуколец над произвольным полукольцом.

Библиография: 5 названий.

В настоящей статье под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle \mathcal{H}, +, \cdot, 0 \rangle$ такая, что $\langle \mathcal{H}, +, 0 \rangle$ – коммутативный моноид, $\langle \mathcal{H}, \cdot \rangle$ – полугруппа; для всех $x, y, z \in \mathcal{H}$ выполняются законы дистрибутивности $(x + y)z = xz + yz$, $x(y + z) = xy + xz$ и для любого $x \in \mathcal{H}$ верно $x0 = 0x = 0$. Полукольцо $\mathcal{H}$ называется *регулярным*, если уравнение $axa = a$ разрешимо в $\mathcal{H}$ для любого $a \in \mathcal{H}$. Цель работы – дать необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять полукольцо $\mathcal{H}$, для того чтобы полукольцо $M_n(\mathcal{H})$ матриц порядка n над $\mathcal{H}$ было регулярным. Прежде чем решать задачу в общем виде, рассмотрим несколько важных частных случаев.

Справедлива следующая теорема [1, с. 24].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{R}$ – ассоциативное кольцо с единицей. Кольцо $M_n(\mathcal{R})$ регулярно в том и только том случае, когда регулярно кольцо $\mathcal{R}$.

Докажем аналогичное утверждение для произвольного ассоциативного кольца, предварительно установив справедливость нескольких вспомогательных лемм.

ЛЕММА 1. Если полукольцо $M_n(\mathcal{H})$ регулярно, то для всех $k \leq n$ $M_k(\mathcal{H})$ тоже регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разрешимость матричного уравнения $AXA = A$ для произвольной матрицы $A \in M_k(\mathcal{H})$ немедленно следует из разрешимости уравнения $\tilde{A}Y\tilde{A} = \tilde{A}$ для блочно-диагональной матрицы

$$\tilde{A}_{n \times n} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array} \right),$$

где 0_{n-k} – нулевая матрица порядка $n - k$.

ЛЕММА 2. Каждый элемент регулярного полукольца лежит в порождаемом им главным левом (правом) идеале.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{H}$ – регулярное полукольцо, то для любого $a \in \mathcal{H}$ найдется $x \in \mathcal{H}$ такой, что $axa = a$; тем самым, $a \in a\mathcal{H} \cap \mathcal{H}a$.

Доказательства следующих трех лемм повторяют доказательства аналогичных свойств регулярного кольца с единицей [1, с. 18–19].

ЛЕММА 3. *Всякий главный левый (правый) идеал регулярного полукольца совпадает с главным левым (правым) идеалом, порождаемым идемпотентом.*

ЛЕММА 4. *Всякий идемпотент в полукольце является правой (левой) единицей для элементов порождаемого им главного левого (правого) идеала.*

ЛЕММА 5. *Сумма конечного числа главных левых (правых) идеалов регулярного кольца является главным левым (правым) идеалом.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathcal{R}$ – ассоциативное кольцо. Кольцо $M_n(\mathcal{R})$ регулярно в том и только том случае, когда регулярно кольцо $\mathcal{R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 из регулярности кольца $M_n(\mathcal{R})$ вытекает регулярность кольца $\mathcal{R}$. Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathcal{R}$ – регулярное кольцо. Согласно леммам 2–5 для всякого конечного набора элементов $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{R}$ найдутся идемпотенты e и f такие, что $ea_i = a_if = a_i$ ($i = 1, \dots, m$). Полагая $b = e + f - fe$, получаем $ba_i = ea_i + fa_i - fea_i = a_i + fa_i - fa_i = a_i$ и $a_ib = a_ie + a_if - aife = a_ie + a_i - a_ie = a_i$ ($i = 1, \dots, m$). Поскольку кольцо $\mathcal{R}$ регулярно, найдется $y \in \mathcal{R}$ такой, что $bub = b$. Очевидно, элементы $e_1 = by$ и $e_2 = yb$ являются идемпотентами, причем $e_1b = be_2 = b$. В силу лемм 3–5 существует идемпотент g , удовлетворяющий равенствам $ge_1 = e_1, ge_2 = e_2$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что элемент $h = e_2 + g - e_2g$ является идемпотентом, причем $he_1 = e_1, e_2h = e_2$. Тогда $ha_i = hba_i = he_1ba_i = e_1ba_i = a_i$ и $a_ih = a_ibh = a_ibe_2h = a_ibe_2 = a_i$; тем самым, $ha_i = a_ih = a_i$ ($i = 1, \dots, m$). Так как в каждой матрице $A = \|a_{ij}\|$ порядка n над $\mathcal{R}$ имеется лишь конечное число элементов, то с учетом приведенных выше рассуждений найдется идемпотент $\tilde{h}$ такой, что $\tilde{h}a_{ij} = a_{ij}\tilde{h} = a_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$). Можно считать, что $\tilde{h} \neq 0$ (в противном случае A – нулевая матрица и разрешимость уравнения $AXA = A$ очевидна). Легко видеть, что множество $\tilde{h}\mathcal{R}\tilde{h}$ является в кольце $\mathcal{R}$ регулярным подкольцом с единицей $\tilde{h}$, причем $A \in M_n(\tilde{h}\mathcal{R}\tilde{h})$. Следовательно, по теореме 1 уравнение $AXA = A$ разрешимо в $M_n(\tilde{h}\mathcal{R}\tilde{h})$, а значит, разрешимо и в $M_n(\mathcal{R})$.

Рассмотрим еще один важный класс полуколец. Согласно принятой в [2] терминологии полукольцо $\mathcal{A}$ назовем *антикольцом*, если для всех $x, y \in \mathcal{A}$ $x + y = 0 \implies x = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – антикольцо и для некоторого $n \geq 3$ полукольцо $M_n(\mathcal{A})$ регулярно. Тогда $\mathcal{A} = \{0\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 1 достаточно доказать утверждение в случае, когда $n = 3$. Фиксируем произвольный элемент $a \in \mathcal{A}$ и рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно условию найдется матрица $X = \|x_{ij}\|$ такая, что $AXA = A$. Считая, что $A = \|a_{ij}\|$, выпишем равенства, получающиеся для элементов a_{11}, a_{13}, a_{22} и a_{31} :

$$\begin{aligned} ax_{11}a + ax_{12}a + ax_{21}a + ax_{22}a &= a, & ax_{12}a + ax_{22}a &= 0, \\ ax_{11}a + ax_{13}a + ax_{31}a + ax_{33}a &= 0, & ax_{21}a + ax_{22}a &= 0. \end{aligned}$$

Из последних трех равенств, в частности, получаем $ax_{12}a = ax_{22}a = ax_{11}a = ax_{21}a = 0$, так что в силу первого равенства $a = 0$. С учетом произвольности выбора элемента $a \in \mathcal{A}$ заключаем, что $\mathcal{A} = \{0\}$.

Говорят, что полукольцо $\mathcal{H}$ является *расширением полукольца $\mathcal{B}$ при помощи полукольца $\mathcal{C}$* , если существует такая конгруэнция $\sim$ на $\mathcal{H}$, что $\bar{0} \cong \mathcal{B}$ и $\mathcal{H}/\sim \cong \mathcal{C}$.

Следующая теорема анонсирована Е. М. Вечтомовым [2].

ТЕОРЕМА 3. *Всякое полукольцо является расширением кольца при помощи антикольца.*

Из теорем 2, 3 и предложения 1 немедленно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\mathcal{H}$ – полукольцо, $n \geq 3$. Полукольцо $M_n(\mathcal{H})$ регулярно тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ – регулярное кольцо.*

Таким образом, найдены необходимые и достаточные условия регулярности полукольца $M_n(\mathcal{H})$ при $n \geq 3$. Рассмотрим оставшийся случай, когда $n = 2$.

Пусть $L(\mathcal{S})$ – множество идемпотентов полукольца $\mathcal{S}$ с единицей. Согласно терминологии из [3] назовем $\mathcal{S}$ *булевым идемпотентным агр-полукольцом*, если

- 1) $\mathcal{S}$ регулярно;
- 2) все идемпотенты в $\mathcal{S}$ центральны ($\forall a \in \mathcal{S} \forall e \in L(\mathcal{S}) ae = ea$);
- 3) $\forall x \in \mathcal{S}$ элемент $1 + x$ обратим;
- 4) $\forall e \in L(\mathcal{S}) \exists e' \in L(\mathcal{S}): e + e' = 1, ee' = 0$;
- 5) $\forall x \in \mathcal{S}$ верно $x + x = x$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\mathcal{S}$ – антикольцо с единицей. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) $M_2(\mathcal{S})$ регулярно;
- 2) уравнение $AXA = A$ разрешимо для любой верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы $A \in M_2(\mathcal{S})$;
- 3) $\mathcal{S}$ регулярно и $\langle L(\mathcal{S}), +, \cdot, 0, 1 \rangle$ – булева алгебра;
- 4) $\mathcal{S}$ – булево идемпотентное агр-полукольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 2) очевидна.

2) $\implies$ 3). Пусть уравнение $AXA = A$ разрешимо для любой верхнетреугольной матрицы $A \in M_2(\mathcal{S})$ (в случае с нижнетреугольными матрицами все используемые в приводимом ниже доказательстве матрицы следует заменить на транспонированные). Выбирая в качестве A матрицу $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, немедленно приходим к регулярности самого антикольца $\mathcal{S}$. Далее, полагаем $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. По предположению найдется матрица $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$, удовлетворяющая равенству $AXA = A$. Записывая его поэлементно, получаем совместную для любого $a \in \mathcal{S}$ систему уравнений:

$$\begin{cases} axa + za = a, \\ ax + z + aya + ua = 1, \\ aza = 0, \\ az + aua = a. \end{cases} \quad (*)$$

Положим в $(*)$ $a = 1$. Тогда

$$\begin{cases} x + z = 1, \\ x + z + y + u = 1, \\ z = 0, \\ z + u = 1, \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1, \\ 1 + y + 1 = 1, \\ z = 0, \\ u = 1, \end{cases}$$

и следовательно, найдется $y_0 \in \mathcal{S}$ такой, что $1 + y_0 + 1 = 1$. Заметим, что элемент $\tilde{a} = 1 + y_0$ лежит в $L(\mathcal{S})$ и не является ни левым, ни правым делителем 0. В самом деле, $(1 + y_0)^2 = 1 + y_0 + y_0 + y_0^2 = 1 + y_0(1 + 1 + y_0) = 1 + y_0$ и если для некоторого $b \in \mathcal{S}$ $(1 + y_0)b = 0$, то $b + y_0b = 0$, откуда $b = 0$ (аналогично, $0 = b(1 + y_0) = b + by_0$ влечет $b = 0$). Полагая теперь в $(*)$ $a = \tilde{a}$, в частности, получаем $\tilde{a}x + z + \tilde{a}y\tilde{a} + u\tilde{a} = 1$ и $\tilde{a}z\tilde{a} = 0$. Поскольку $\tilde{a}$ – не делитель 0, то $\tilde{a}z\tilde{a} = 0$ влечет $z = 0$; следовательно, с учетом идемпотентности $\tilde{a}$ и равенства $1 + \tilde{a} = 1 + 1 + y_0 = 1$ выводим $1 = \tilde{a}x + \tilde{a}y\tilde{a} + u\tilde{a} = \tilde{a}x(1 + \tilde{a}) + \tilde{a}y\tilde{a} + u\tilde{a} = \tilde{a}x + (\tilde{a}x + \tilde{a}y\tilde{a} + u\tilde{a})\tilde{a} = \tilde{a}x + \tilde{a} = \tilde{a}(x + 1)$; тем самым, элемент $\tilde{a} \in L(\mathcal{S})$ обратим справа. Очевидно, единственный обратимый справа идемпотент – это 1, так что $1 = \tilde{a} = 1 + y_0$, а значит, $1 + 1 = 1 + 1 + y_0 = 1$. Умножая последнее равенство на произвольный элемент $x \in \mathcal{S}$, получаем $x + x = x$; следовательно, сложение в $\mathcal{S}$ идемпотентно. Зададим на $\mathcal{S}$ отношение порядка, полагая $a \leq b \iff a + b = b$. Легко убедиться в том, что относительно введенного порядка $\mathcal{S}$ образует верхнюю полурешетку с наименьшим элементом 0, в которой точная верхняя грань элементов совпадает с их суммой, причем порядок согласован с операциями сложения и умножения: $\forall x, y, z \in \mathcal{S} \ x \leq y \implies x + z \leq y + z, xz \leq yz, zx \leq zy$.

Вернемся вновь к системе $(*)$, считая теперь, что $a \in L(\mathcal{S})$ и $a \leq 1$ (такими элементами являются, например, 0 и 1). Докажем, что элемент a m -дополним (т.е. найдется $a' \in L(\mathcal{S})$: $a + a' = 1, aa' = a'a = 0$). Из равенства $ax + z + aya + ua = 1$ выводим $ax \leq 1$, откуда $ax = aax \leq a \cdot 1 = a$, так что $ax + a = a$ (аналогично, $aya + a = ua + a = a$); следовательно, $1 = a + 1 = a + ax + z + aya + ua = a + z$. Таким образом, с учетом равенства $aza = 0$ и разрешимости системы $(*)$ заключаем, что для любого $a \in L(\mathcal{S})$ такого, что $a \leq 1$, найдется $a' \leq 1$, удовлетворяющий равенствам $a + a' = 1$ и $aa'a = 0$. Умножая равенство $a + a' = 1$ слева на aa' , получаем $aa' = aa'(a + a') = a(a')^2$. Тогда $a' = (a + a')a' = aa' + (a')^2 = a(a')^2 + (a')^2 = (a + 1)(a')^2 = (a')^2$, т.е. $a' \in L(\mathcal{S})$, а поскольку $a' \leq 1$, найдется $a'' \in L(\mathcal{S})$ такой, что $a' + a'' = 1$ и $a'a''a' = 0$. Следовательно, $a = a(a' + a'')a = aa''a \leq a''$, откуда $a'aa' \leq a'a''a' = 0$, так что $a'aa' = 0$. По предположению для верхнетреугольной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} a & a'a \\ 0 & a' \end{pmatrix}$$

найдется матрица

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{z} & \tilde{u} \end{pmatrix}$$

такая, что $B\tilde{X}B = B$. В частности, справедливы равенства $a'\tilde{z}a = 0$ и $a\tilde{x}a'a + a'a\tilde{z}a'a + a\tilde{y}a' + a'a\tilde{u}a' = a'a$. Покажем, что все слагаемые в левой части последнего равенства равны 0. Действительно, $a\tilde{x}a'a \leq a'a$ влечет $a\tilde{x}a'a = aa\tilde{x}a'a \leq aa'a = 0$ (аналогично, $a\tilde{y}a' = aa\tilde{y}a' \leq aa'a = 0$ и $a'a\tilde{u}a' = a'a\tilde{u}a'a' \leq a'aa' = 0$); кроме того,

$a'a\tilde{z}a'a \leq a'\tilde{z}a = 0$. Таким образом, $a'a = 0$. Подобными рассуждениями доказывается равенство $aa' = 0$.

Фиксируем произвольный элемент $e \in L(\mathcal{S})$. В силу идемпотентности сложения элемент $b = 1 + e$ тоже лежит в $L(\mathcal{S})$. Очевидно, b не является ни левым, ни правым делителем 0. Положим в системе (*) $a = b$. Тогда $bzb = 0$ влечет $z = 0$; следовательно, $bxb = b$, а значит, $(bx)^2 = bx$, причем $bx \leq bx + byb + ub = 1$. Таким образом, $b = bxb = cb$, где $c = bx \in L(\mathcal{S})$ и $c \leq 1$. Согласно доказанному выше найдется $c' \in L(\mathcal{S})$ такой, что $c + c' = 1$ и $cc' = c'c = 0$, откуда $c'b = c'cb = 0$. Так как b не является правым делителем 0, равенство $c'b = 0$ влечет $c' = 0$, а значит, $bx = c = 1$, т.е. идемпотент b обратим справа и, следовательно, равен 1. Но тогда $e \leq 1 + e = b = 1$; тем самым (с учетом произвольности e), любой идемпотент не превосходит 1 и в силу доказанного выше является m -дополнимым. Обратно, любой m -дополнимый элемент $a \in \mathcal{S}$ лежит в $L(\mathcal{S})$, поскольку $a = a(a + a') = aa + aa' = aa$. Рассмотрим множество $G = \{x \in \mathcal{S} \mid x \leq 1\}$, являющееся подполукольцом полукольца $\mathcal{S}$ и образующее m -полурешетку с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1. Нетрудно видеть, что множества m -дополнимых элементов полукольца $\mathcal{S}$ и m -полурешетки G совпадают. Последнее же образует булеву алгебру, в которой объединение элементов совпадает с их суммой в G , а пересечение – с произведением [4, с. 554, теорема 1].

3) $\implies$ 4). Так как антикольцо $\mathcal{S}$ регулярно и каждый идемпотент $e \in L(\mathcal{S})$ m -дополняем, для доказательства данной импликации достаточно проверить выполнение условий 2), 3) и 5) в определении булева идемпотентного агр-полукольца. Поскольку $1 \in L(\mathcal{S})$, а объединение элементов в булевой алгебре $L(\mathcal{S})$ совпадает с их суммой в $\mathcal{S}$, справедливо равенство $1 + 1 = 1$; следовательно, $x = x + x$ для всех $x \in \mathcal{S}$. Как и при доказательстве предыдущей импликации, зададим на $\mathcal{S}$ отношение порядка, положив $a \leq b \iff a + b = b$. Докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 6. Пусть антикольцо $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию 3) предложения 3, $c \in \mathcal{S}$ и $c^2 = 0$. Тогда $c = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу регулярности антикольца $\mathcal{S}$ найдется элемент $x \in \mathcal{S}$ такой, что $c = cxc$. Тогда $c = cxc + cc = c(x + 1)c = cuc$, где $u = x + 1 \geq 1$ и, следовательно, $u^2 \geq u$. Так как cu, uc лежат в $L(\mathcal{S})$, а значит, коммутируют, то $c = cuc \leq cuuc = ucsu = 0$; тем самым, $c = 0$.

В силу леммы 6 для любых $a \in \mathcal{S}$ и $e \in L(\mathcal{S})$ верны равенства $ea e' = e'ae = 0$, поэтому $ea = ea(e + e') = eae + e'ae = eae + e'ae = (e + e')ae = ae$, так что все идемпотенты в $\mathcal{S}$ центральны. Наконец, в силу регулярности $\mathcal{S}$ для любого $x \in \mathcal{S}$ найдется $z \in \mathcal{S}$ такой, что $1 + x = (1 + x)z(1 + x) = (1 + x)e$, где $e = z(1 + x) \in L(\mathcal{S})$. Тогда $(1 + x)e' = (1 + x)ee' = 0$, а так как $1 + x$ – не делитель 0, то $e' = 0$ и, следовательно, $1 = e = z(1 + x)$, так что $1 + x$ обратим слева. Аналогично доказывается, что элемент $1 + x$ обратим справа.

4) $\implies$ 1). Пусть $\mathcal{S}$ – булево идемпотентное агр-полукольцо. Фиксируем произвольную матрицу $A = \|a_{ij}\|$ порядка 2 над $\mathcal{S}$ и докажем разрешимость уравнения $AxA = A$. Согласно доказанному в [3, с. 287, предложение 2.1] свойству агр-полуколец каждый элемент $x \in \mathcal{S}$ представим в виде произведения идемпотента e_x и обратимого элемента u_x , поэтому $a_{ij} = e_{ij}u_{ij}$ для некоторого $e_{ij} \in L(\mathcal{S})$ и некоторого обратимого u_{ij} ($i, j = 1, 2$). Нетрудно видеть, что подполукольцо, порожденное идемпотентами e_{ij} и их m -дополнениями e'_{ij} ($i, j = 1, 2$), является конечной булевой алгеброй. Пусть

$\{e_1, \dots, e_k\}$ – множество всех ее атомов. Легко проверяется, что $\mathcal{S} = \mathcal{S}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{S}e_k$ и соответственно $A = \sum_{i=1}^k A_i$, где каждый идеал $\mathcal{S}e_i$ – булево идемпотентное агр-полукольцо с единицей e_i , а A_i – матрица порядка 2 над $\mathcal{S}e_i$, причем любой ее элемент либо обратим в $\mathcal{S}e_i$, либо равен 0. Очевидно, для доказательства разрешимости уравнения $AXA = A$ достаточно установить разрешимость каждого уравнения $A_i X A_i = A_i$ в полукольце $M_2(\mathcal{S}e_i)$ ($i = 1, \dots, k$). Итак, без ограничения общности можно считать, что каждый элемент матрицы A либо обратим, либо равен 0. Рассмотрим все возможные случаи, предварительно заметив, что разрешимость уравнения $AXA = A$ не зависит от домножений матрицы A слева или справа на обратимые матрицы (в самом деле, если U – обратимая матрица, то X_0 – решение уравнения $AXA = A \iff X_0 U^{-1}$ – решение уравнения $(UA)X(UA) = UA \iff U^{-1}X_0$ – решение уравнения $(AU)X(AU) = AU$).

Для нулевой матрицы A уравнение $AXA = A$, разумеется, разрешимо. Если в матрице A имеется ровно один обратимый элемент u , а все остальные элементы равны 0, то, домножая при необходимости матрицу A на перестановочные матрицы, можно привести ее к матрице $B = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Разрешимость уравнения $BXB = B$ очевидна. Если в матрице A ровно два обратимых элемента, то домножениями на перестановочные и обратимые диагональные матрицы можно привести ее либо к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Каждая из этих матриц идемпотентна, так что решением соответствующих уравнений может служить, например, единичная матрица. Наконец, если в матрице A имеется не более одного нуля, то аналогичными домножениями ее можно привести к матрице $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, где x либо обратим, либо равен 0. Непосредственными вычислениями проверяется, что матрица

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x(1+x)^{-1} & (1+x)^{-1} \\ (1+x)^{-1} & (1+x)^{-1} \end{pmatrix}$$

является решением уравнения $\tilde{A}X\tilde{A} = \tilde{A}$.

Докажем аналог предложения 3 для произвольных антиколец. Следуя Стоуну (см. [5, с. 71]), под *обобщенной булевой алгеброй* будем понимать дистрибутивную решетку с 0, обладающую относительными дополнениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mathcal{A}$ – ненулевое антикольцо. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $M_2(\mathcal{A})$ регулярно;
- 2) уравнение $AXA = A$ разрешимо для любой верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы $A \in M_2(\mathcal{A})$;
- 3) $\mathcal{A}$ регулярно, $\langle L(\mathcal{A}), +, \cdot, 0 \rangle$ – обобщенная булева алгебра;
- 4) $\mathcal{A}$ регулярно, все идемпотенты в $\mathcal{A}$ центральны и для любого ненулевого идемпотента e идеал $e\mathcal{A}$ является булевым идемпотентным агр-полукольцом;
- 5) $\mathcal{A}$ регулярно, для любого ненулевого идемпотента e полукольцо $e\mathcal{A}e$ является булевым идемпотентным агр-полукольцом и

$$\forall e_1, e_2 \in L(\mathcal{A}) \quad \exists e, f \in L(\mathcal{A}) : \quad ee_i = e_i f = e_i \quad (i = 1, 2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\implies$ 2) очевидна.

2) $\implies$ 5). Докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 7. Пусть $\mathcal{H}$ – полукольцо и уравнение $AXA = A$ разрешимо для любой верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы $A \in M_2(\mathcal{H})$. Тогда $\mathcal{H}$ регулярен и для любых $e_1, e_2 \in \mathcal{H}$ найдутся $e, f \in L(\mathcal{H})$ такие, что $ee_i = e_i f = e_i$ ($i = 1, 2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, разрешимость уравнения $AXA = A$ для любой верхнетреугольной матрицы $A \in M_2(\mathcal{H})$ влечет регулярность самого полукольца $\mathcal{H}$. Далее, по предположению для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $e_1, e_2 \in \mathcal{H}$, найдется матрица

$$X_0 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

такая, что $AX_0A = A$, откуда, в частности, получаем $(e_1x + e_2z)e_1 = e_1$ и $(e_1x + e_2z)e_2 = e_2$. В силу лемм 3 и 4 для элемента $a = e_1x + e_2z$ найдется $e \in L(\mathcal{H})$ такой, что $a = ea$. Тогда $ee_i = eae_i = ae_i = e_i$ ($i = 1, 2$). Подобными рассуждениями, используя разрешимость уравнения $BXB = B$ для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix},$$

доказывается существование элемента $f \in L(\mathcal{H})$ со свойством $e_i f = e_i$ ($i = 1, 2$).

Легко видеть, что если e — отличный от 0 идемпотент антикольца $\mathcal{A}$, то $e\mathcal{A}e$ — антикольцо с единицей e , причем для любой верхнетреугольной матрицы A порядка 2 над $e\mathcal{A}e$ уравнение $AXA = A$ разрешимо в $M_2(e\mathcal{A}e)$ (достаточно найти решение X_0 в $M_2(\mathcal{A})$ и положить $X = eX_0e$). Следовательно, в силу предложения 3 $e\mathcal{A}e$ — булево идемпотентное агр-полукольцо. Регулярность антикольца $\mathcal{A}$ и существование элементов $e, f \in L(\mathcal{A})$ с требуемыми свойствами доказаны в лемме 7.

5) $\implies$ 4). Для доказательства данной импликации достаточно установить центральность всех идемпотентов. Покажем сначала, что сложение в $\mathcal{A}$ идемпотентно. Действительно, если e лежит в $L(\mathcal{A})$, то либо $e = 0$, откуда $e + e = e$, либо $e \neq 0$ и тогда $e = eee \in e\mathcal{A}e$, но сложение в $e\mathcal{A}e$ идемпотентно, так что $e + e = e$. В силу лемм 3 и 4 для любого $a \in \mathcal{A}$ найдется $e \in L(\mathcal{A})$ такой, что $a = ea$, поэтому $a + a = ea + ea = (e + e)a = ea = a$. Как и при доказательстве предложения 3 (импликация 2) $\implies$ 3)), зададим на $\mathcal{A}$ отношение порядка, положив $a \leq b \iff a + b = b$.

ЛЕММА 8. Если антикольцо $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию 5) предложения 2) и $e_1, e_2 \in L(\mathcal{A})$, то $e_1e_2 \leq e_1$, $e_1e_2 \leq e_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение тривиально, если хотя бы один из идемпотентов e_1, e_2 равен 0. Пусть $e_1 \neq 0$ и $e_2 \neq 0$. Согласно условию 5) предложения 4 найдется $e \in L(\mathcal{A})$ такой, что $ee_1 = e_1$ и $ee_2 = e_2$. Заметим, что элемент e_1e является идемпотентом, кроме того, $e_1e = ee_1e \in e\mathcal{A}e$. Поскольку $e\mathcal{A}e$ — булево идемпотентное агр-полукольцо с единицей e , то согласно предложению 3 каждый идемпотент в $e\mathcal{A}e$ не

превосходит e , так что $e_1e \leq e$. Тогда $e_1e_2 = e_1ee_2 \leq ee_2 = e_2$. Аналогично, используя существование элемента $f \in L(\mathcal{A})$ такого, что $e_1f = e_1$ и $e_2f = e_2$, доказывается неравенство $e_1e_2 \leq e_2$.

Пусть теперь $e_1 \in L(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$. В силу лемм 3 и 4 найдутся $e_2, e_3 \in L(\mathcal{A})$ такие, что $e_2a = ae_3 = a$. Полагая $e = e_1 + e_2 + e_3$, с учетом леммы 8 легко убедиться в справедливости равенств $e^2 = e$ и $ee_i = e_ie = e_i$ ($i = 1, \dots, 3$), а значит, $e_1 = ee_1e \in e\mathcal{A}e$ и $a = e_2ae_3 = ee_2ae_3e \in e\mathcal{A}e$. Осталось заметить, что $e\mathcal{A}e$ – булево идемпотентное агр-полукольцо; следовательно, все идемпотенты в нем центральны, так что $ae_1 = e_1a$.

4) $\Rightarrow$ 1). С помощью рассуждений, подобных тем, что применялись при доказательстве предыдущей импликации, несложно показать, что сложение в $\mathcal{A}$ идемпотентно и для любых $e_1, \dots, e_k \in L(\mathcal{A})$ элемент $e = e_1 + \dots + e_k$ лежит в $L(\mathcal{A})$ и удовлетворяет равенствам $ee_i = e_i$ ($i = 1, \dots, k$). Рассмотрим произвольную ненулевую матрицу $A \in M_2(\mathcal{A})$, $A = \|a_{ij}\|$. В силу лемм 3 и 4 найдутся идемпотенты e_{ij} такие, что $a_{ij} = e_{ij}a_{ij}$ ($i, j = 1, 2$). Полагая $e = \sum_{i,j} e_{ij}$, получаем $a_{ij} = ea_{ij}$ ($i, j = 1, 2$), так что $A \in M_2(e\mathcal{A})$; следовательно, в силу предложения 3 уравнение $AXA = A$ разрешимо.

4) $\Rightarrow$ 3). В силу предложения 3 для любого ненулевого идемпотента e система $\langle L(e\mathcal{A}), +, \cdot, 0, e \rangle$ является булевой алгеброй. Согласно доказательству предыдущей импликации сложение в $\mathcal{A}$ идемпотентно; следовательно (см. доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 3) предложения 3), $\mathcal{A}$ является верхней полурешеткой относительно порядка, определяемого по правилу $a \leq b \iff a + b = b$, причем порядок согласован с операциями сложения и умножения, а точная верхняя грань элементов совпадает с их суммой в $\mathcal{A}$. Докажем, что $L(\mathcal{A})$ образует в $\mathcal{A}$ подполурешетку. В самом деле, для всех $e, f \in L(\mathcal{A})$ имеем: если $e = 0$, то $e + f = f \in L(\mathcal{A})$, если же $e \neq 0$, то заметив, что идемпотент ef лежит в булевой алгебре $L(e\mathcal{A})$ и, значит, удовлетворяет неравенству $ef \leq e$, получаем $(e + f)^2 = e + ef + fe + f = e + f$, так что и в этом случае $e + f \in L(\mathcal{A})$. Рассмотрим в $L(\mathcal{A})$ произвольный замкнутый интервал $[0, e] = \{f \in L(\mathcal{A}) \mid f \leq e\}$, где $e \neq 0$. Если $f \in [0, e]$, то $f \leq e$, откуда $f = ff \leq ef \leq f$, так что $f = ef \in L(e\mathcal{A})$. Обратно, если $f \in L(e\mathcal{A})$, то $f = ef \leq e$, а значит, $f \in [0, e]$. Таким образом, интервал $[0, e]$ верхней полурешетки $L(\mathcal{A})$ совпадает с булевой алгеброй $L(e\mathcal{A})$. Нетрудно видеть, что верхняя полурешетка, в которой каждый интервал $[0, e]$ при $e \neq 0$ является булевой алгеброй, есть обобщенная булева алгебра.

3) $\Rightarrow$ 5). Пусть антикольцо $\mathcal{A}$ регулярно и $\langle L(\mathcal{A}), +, \cdot, 0 \rangle$ – обобщенная булева алгебра. Тогда для любого ненулевого идемпотента e множество $e\mathcal{A}e$ является регулярным антикольцом с единицей e , а $L(e\mathcal{A}e)$ совпадает с интервалом $[0, e]$ обобщенной булевой алгебры $L(\mathcal{A})$ (так как для каждого $f \in L(\mathcal{A})$ имеем: $f \in L(e\mathcal{A}e) \iff f = efe \iff f \leq e$) и, значит, является булевой алгеброй. Следовательно, в силу предложения 3 $e\mathcal{A}e$ – булево идемпотентное агр-полукольцо. Выполнение остальных требований вполне очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{H}$ – полукольцо. Полукольцо $M_2(\mathcal{H})$ регулярно тогда и только тогда, когда $\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{A}$, где $\mathcal{R}$ – регулярное кольцо, а $\mathcal{A}$ – антикольцо, удовлетворяющее любому из условий 1)–5) предложения 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность вытекает из предложения 4 и теоремы 2.

Необходимость. Рассмотрим множества $\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{H} \mid \exists y \in \mathcal{H}: x + y = 0\}$ и $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{H} \mid x + x = x\}$. Нетрудно видеть, что оба они являются двусторонними идеалами в $\mathcal{H}$, причем $\mathcal{R}$ – кольцо, $\mathcal{A}$ – антикольцо и $\mathcal{R} \cap \mathcal{A} = \{0\}$, а следовательно, $\mathcal{R}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{R} = \{0\}$. Зададим на $\mathcal{H}$ бинарное отношение “ $\sim$ ”, полагая

$x \sim y \iff \exists r \in \mathcal{R}: x + r = y$. Непосредственно проверяется, что отношение “ $\sim$ ” является конгруэнцией, а фактор-полукольцо $\mathcal{H}/\sim$ – антикольцом. По предположению полукольцо $M_2(\mathcal{H})$ регулярно; следовательно, $M_2(\mathcal{H}/\sim)$ тоже регулярно; поэтому в силу предложения 4 (см., например, доказательство импликации 5) $\implies$ 4)) сложение в $\mathcal{H}/\sim$ идемпотентно. Тогда для класса эквивалентности произвольного элемента $x \in \mathcal{H}$ справедливо равенство $\bar{x} = \bar{x} + \bar{x} = \overline{x + x}$, а значит, существует $r_x \in \mathcal{R}$ такой, что $x + r_x = x + x$. Получаем $x = x - r_x + r_x = a_x + r_x$, где $r_x \in \mathcal{R}$, а $a_x = x - r_x \in \mathcal{A}$, так как $a_x + a_x = x - r_x + x - r_x = x + x - r_x - r_x = x - r_x = a_x$. В силу произвольности элемента $x \in \mathcal{H}$ заключаем, что $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{R}$.

Покажем, что разложение $x = a_x + r_x$ определено однозначно. Пусть имеется еще одно разложение $x = \tilde{a}_x + \tilde{r}_x$, где $\tilde{a}_x \in \mathcal{A}$ и $\tilde{r}_x \in \mathcal{R}$. Согласно лемме 7 найдется $e \in L(\mathcal{H})$ такой, что $er_x = r_x$ и $e\tilde{r}_x = \tilde{r}_x$. Поскольку $e = a_e + r_e$ для подходящих $a_e \in \mathcal{A}$ и $r_e \in \mathcal{R}$, то с учетом доказанных выше равенств $\mathcal{A}R = \mathcal{R}A = \{0\}$ выводим $r_x = er_x = (a_e + r_e)r_x = r_e r_x$; аналогично, $\tilde{r}_x = e\tilde{r}_x = (a_e + r_e)\tilde{r}_x = r_e \tilde{r}_x$, откуда $r_x = r_e(a_x + r_x) = r_e x = r_e(\tilde{a}_x + \tilde{r}_x) = \tilde{r}_x$ и, следовательно, $a_x = \tilde{a}_x$.

Итак, $\mathcal{H} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{R}$. Очевидно, отображения $x \mapsto a_x$ и $x \mapsto r_x$ являются эпиморфизмами полукольца $\mathcal{H}$ на антикольцо $\mathcal{A}$ и соответственно кольцо $\mathcal{R}$, так что из регулярности полукольца $M_2(\mathcal{H})$ вытекает регулярность полуколец $M_2(\mathcal{R})$ и $M_2(\mathcal{A})$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 1 и предложением 4.

Объединяя утверждения предложений 2 и 5, получаем необходимые и достаточные условия регулярности полукольца $M_n(\mathcal{H})$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{H}$ – полукольцо.

1. Полукольцо $M_2(\mathcal{H})$ регулярно тогда и только тогда, когда $\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{A}$, где $\mathcal{R}$ – регулярное кольцо, а $\mathcal{A}$ – антикольцо, удовлетворяющее любому из условий 1)–5) предложения 4.

2. При $n \geq 3$ полукольцо $M_n(\mathcal{H})$ регулярно тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ – регулярное кольцо.

В заключение автор выражает благодарность проф. Е.М. Вечтомову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Скорняков Л. А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. М.: Физматгиз, 1961.
- [2] Вечтомов Е. М. Две общие структурные теоремы о полумодулях // Абелевы группы и модули. Вып. 15. Томск: Томский гос. ун-т, 2000. С. 17–23.
- [3] Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Чермных В. В. Абелево-регулярные положительные полукольца // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1997. № 20. С. 282–309.
- [4] Ильин С. Н. Обратимость матриц над упорядоченными алгебраическими системами // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 3. С. 551–559.
- [5] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.