Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Лиманский, Об условиях подчиненности для систем минимальных дифференциальных операторов в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 6, 841–848

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm75>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:13:39

УДК 517.946

ОБ УСЛОВИЯХ ПОДЧИНЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_\infty(\mathbb{R}^n)$

Д. В. Лиманский

Рассматривается линейное пространство минимальных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, подчиненных системе других минимальных операторов в пространствах с равномерной нормой. В терминах условий подчиненности получен критерий квазиэллиптичности данного оператора, обобщающий аналогичный результат де Леу и Миркила для эллиптических операторов.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. В настоящей работе изучаются условия подчиненности одного минимального дифференциального оператора $Q(D)$ с постоянными коэффициентами системе других минимальных операторов $\{P_j(D)\}_1^N$ в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Другими словами, рассматривается задача об описании линейных пространств $\mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$ минимальных дифференциальных операторов $Q(D)$, удовлетворяющих оценке

$$\|Q(D)f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left[\sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L_p} + \|f\|_{L_p} \right], \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (1)$$

при $p = \infty$ с некоторой константой C , не зависящей от f . Здесь $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_j := (1/i)(\partial/\partial x^j)$.

Легко показать, что при всех $p \in [1; +\infty]$ из неравенства (1) вытекает алгебраическое неравенство для символов

$$|Q(\xi)| \leq C \left[\sum_{j=1}^N |P_j(\xi)| + 1 \right], \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

При $p = 2$ из равенства Парсеваля вытекает, что оценки (1) и (2) равносильны.

При $N = 1$ Хёрмандером [1] получен критерий справедливости оценки (1) в $L_2(\Omega)$ для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Этот результат обобщен в [2] на случай $N > 1$ (см. также [3]). Ильин [4] (см. также [3]) рассмотрел случай дифференциальных мономов Q и $\{P_j\}_1^N$ и показал, что при $1 < p < \infty$ оценки (1) и (2) эквивалентны. Боман (Boman) [5] исследовал ту же задачу в случае $p = \infty$. Им получен критерий геометрического характера для справедливости неравенства (1). В работе Бесова [6] (см. также [3]) получен

критерий коэрцитивности в $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, для системы операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ с переменными коэффициентами (напомним, что система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ называется *коэрцитивной* в $L_p(\Omega)$, если размерность пространства $\mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$ максимально возможная). Критерий коэрцитивности системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$ в пространстве $L_\infty(\Omega)$ получен Маламудом в [2], [7] (см. также [3]).

Отметим еще, что Бесовым [6] и Маламудом [7] оценки типа (1) установлены также для систем минимальных дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в пространствах вектор-функций при $p \in (1, \infty)$ и $p = \infty$ соответственно.

В монографии Волевича и Гиндикина [8] исследуются, в частности, априорные оценки типа (1) в связи с их применением к отысканию локальной гладкости решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Де Леу и Миркил [9] рассмотрели неравенство (1) в случае $p = \infty$, $N = 1$ и эллиптического оператора $P = P_1$. Известно, (см. [1], [3]), что если P и Q – дифференциальные полиномы, причем P эллиптический и степень $\deg Q \leq \deg P$, то справедлива оценка

$$\int |Q(D)f|^p \leq C \int (|P(D)f|^p + |f|^p), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty.$$

Доказательство этого факта при $p = 2$ основано на применении преобразования Фурье и теоремы Планшереля.

В настоящей работе исследуется предельный случай $p = \infty$. При $N = 1$ и $p = \infty$ оценка (1) принимает вид

$$\|Q(D)f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C[\|P(D)f\|_\infty + \|f\|_\infty], \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3)$$

Этот случай существенно отличается от предыдущих. Действительно, если $\deg Q = \deg P = d$ и $Q^d \neq cP^d$, то (см. предложение 2) оценка (3) не имеет места. Но эта оценка становится верной при $\deg Q < \deg P$ и эллиптическом P . Фактически, указанное свойство является характеристическим для эллиптических операторов в случае, когда размерность пространства $n \geq 3$ (теорема 1).

Другой предельный случай $p = 1$ рассмотрен в работе Орнштейна (Ornstein) [10]. Полученные им результаты для L_1 аналогичны упомянутым для L_∞ .

2. Обозначения и основные результаты. Будем в дальнейшем использовать следующие обозначения. Положим $\mathbb{Z}_+$ (соответственно $\mathbb{R}_+$) – множество целых (соответственно вещественных) неотрицательных чисел, $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ – множество натуральных чисел. Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\{l_j\}_1^n \in \mathbb{N}^n$, то $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_k = (1/i)(\partial/\partial x^k)$, $|\alpha: l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$; $[l_1, \dots, l_n]$ обозначает наименьшее общее кратное чисел $\{l_i\}_1^n$. Далее, $\mathbb{C}[\xi]$ – кольцо полиномов от n вещественных переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$ с комплексными коэффициентами; $\deg P$ – степень полинома P . Символ $o(t^k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, обозначает функцию, удовлетворяющую условию $\lim_{t \rightarrow +\infty} o(t^k)/t^k = 0$, а $O(t^k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – функцию, обладающую свойством $|O(t^k)| \leq Ct^k$ при $t \geq R > 0$.

Говорят, что оператор $Q(D)$ *подчинен* оператору $P(D)$ (или, что оператор $P(D)$ *подчиняет* оператор $Q(D)$) и пишут $Q \in \mathcal{L}(P)$, если верна оценка (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $l := (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Полином $P(\xi) \in \mathbb{C}[\xi]$ называется l -квазиоднородным, или l -однородным с весами $l_1^{-1}, \dots, l_n^{-1}$, если

$$P(t^{1/l_1}\xi_1, \dots, t^{1/l_n}\xi_n) = tP(\xi), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Полином

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha: l| \leq 1} a_\alpha \xi^\alpha$$

называется квазиэллиптическим относительно вектора $l := (l_1, \dots, l_n)$, если его главная l -квазиоднородная часть $P^l(\xi)$ удовлетворяет условию

$$P^l(\xi) := \sum_{|\alpha: l|=1} a_\alpha \xi^\alpha \neq 0 \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Пусть $l := (l_1, \dots, l_n)$, $d := [l_1, \dots, l_n]$, $m_i := d/l_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда полином $P(\xi)$ однозначно записывается в виде суммы

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^r P^{d_j}(\xi), \quad d_0 := d > d_1 > \dots > d_r,$$

где P^{d_j} , $j \in \{0, \dots, r\}$, суть (ld_j/d) -однородные полиномы. Другими словами, в P^{d_j} входят те и только те мономы из P , показатели которых $k_1, \dots, k_n$ удовлетворяют равенству $\sum_{i=1}^n m_i k_i = d_j$. В частности, $P^{d_0}(\xi) \equiv P^d(\xi) \equiv P^l(\xi)$.

ТЕОРЕМА 1 [9]. Пусть P – полином от $n \geq 2$ переменных степени $d \geq 2$. Тогда

- (i) если оператор $P(D)$ эллиптический, то он подчиняет в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ все операторы $Q(D)$, для которых $\deg Q \leq d - 1$;
- (ii) обратно, если $n \geq 3$ и оператор $P(D)$ подчиняет в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ все операторы $Q(D)$ порядка $\deg Q \leq d - 1$, то $P(D)$ является эллиптическим;
- (iii) при $n = 2$ утверждение (ii) теоремы неверно; например, неэллиптический оператор $P(D_1, D_2) = (D_1 + I)(D_2 + I)$ подчиняет операторы D_1, D_2 .

Цель работы – доказательство следующей теоремы, обобщающей теорему 1 на случай квазиэллиптического оператора P в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n)$, где l_i – произвольные натуральные числа, не все равные между собой; $P(D)$ – дифференциальный полином от $n \geq 2$ переменных с главной l -однородной частью $P^l(D)$. Тогда

- (i) если оператор $P(D)$ является квазиэллиптическим, то он подчиняет в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ все дифференциальные полиномы $Q(D)$ вида

$$Q(D) = \sum_{|\beta: l| < 1} b_\beta D^\beta; \tag{4}$$

- (ii) обратно, если $n \geq 3$ и оператор подчиняет все дифференциальные полиномы вида (4), то он является квазиэллиптическим.

Отметим, что последнее условие теоремы имеет следующий геометрический смысл: все точки $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, соответствующие показателям мономов $b_\beta \xi^\beta$ в (4), лежат ниже гиперплоскости $x_1/l_1 + \dots + x_n/l_n = 1$, определяющей главную l -квазиоднородную часть $P^l(D)$ оператора $P(D)$.

3. Вспомогательные утверждения. Здесь приводятся вспомогательные предложения, необходимые для доказательства теоремы 2 (см. п. 4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [9]. *Включение $Q \in \mathcal{L}(P)$ справедливо тогда и только тогда, когда существуют комплексные конечные в $\mathbb{R}^n$ меры μ и ν такие, что*

$$Q(\xi) \equiv M(\xi)P(\xi) + N(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

где $M = \hat{\mu}$ и $N = \hat{\nu}$ – преобразования Фурье–Стилтьеса мер μ и ν [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [2, § 5]. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n)$, $l_i > 0$, $P^l(\xi)$ и $Q^l(\xi)$ – главные l -однородные части полиномов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ соответственно. Тогда из включения $Q \in \mathcal{L}(P)$ следует тождество $Q^l(\xi) \equiv cP^l(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для однородного случая ($l_1 = \dots = l_n$) предложение 2 доказано в [9], где также найдена связь между предложениями 1 и 2: в этом случае $c = \mu(0)$, где $\hat{\mu}(\xi) = M(\xi)$. В частности, $\mu(0) = 0$, если $\deg Q < \deg P$.

ТЕОРЕМА 3 (теорема Бохнера [12, IX.2]). *Преобразования Фурье–Стилтьеса конечных положительных мер составляют в точности конус положительно определенных функций.*

ЛЕММА 1. Пусть μ – комплексная конечная мера в $\mathbb{R}^n$ и $M = \hat{\mu}$ – ее преобразование Фурье–Стилтьеса. Тогда ограничение $M|_E$ функции M на произвольное линейное подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$ также является преобразованием Фурье–Стилтьеса некоторой конечной меры в E .

ЛЕММА 2. При ограничении l -однородного полинома P^l на “координатное” подпространство $E = \{x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ полином $\tilde{P}^l := P^l|_E$ остается l -однородным.

Из предложения 1 и лемм 1 и 2 немедленно получается

СЛЕДСТВИЕ 1. Если E – произвольное линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ и $Q \in \mathcal{L}(P)$, то $Q|_E \in \mathcal{L}(P|_E)$. Другими словами, подчиненность операторов сохраняется при сужении на произвольное подпространство.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко показать, что если E – подпространство, “сохраняющее” при ограничении на него l -однородность полинома P^l (в частности, если E координатное) и если $\dim E \geq 2$, $\alpha|_E \neq 0$, то $P^l|_E \neq 0$. При этих условиях все наши рассуждения остаются в силе в меньших размерностях ($\leq n-1$). Это позволяет провести доказательство в п. 4 индукцией по размерности n .

ЛЕММА 3 (лемма Эберлейна [13]). Пусть μ – конечная мера, $c = \mu(0)$ и $M = \hat{\mu}$. Тогда постоянная функция c равномерно приближается функциями вида $\pi * M$, где π – вероятностная мера ($\pi(\mathbb{R}^n) = 1$).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если μ – конечная мера в $\mathbb{R}^n$ и $c = \mu(0) = 0$, то функция $c \equiv 0$ равномерно приближается выпуклыми комбинациями сдвигов функции $M = \hat{\mu}$, т.е.

$$\sum_{k=1}^m c_k M(\xi - \xi_k) \Rightarrow 0, \quad c_k > 0, \quad \sum_1^m c_k = 1, \quad \xi, \xi_k \in \mathbb{R}^n.$$

В дальнейшем будет предполагаться, что полином Q фиксирован и $\deg Q < \deg P$. Значит (предложение 1), функции $M = \hat{\mu}$ и $N = \hat{\nu}$ также фиксированы в равенстве (5) и согласно замечанию 1 $\mu(0) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Рассмотрим семейство Γ “полиномиальных кривых” в $\mathbb{R}^n$, заданных параметрически:

$$x = x(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}[t], \quad t \geq 0.$$

Будем говорить, что семейство Γ *допустимо*, если существует подсемейство $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ такое, что

- 1) для всех $\theta \in \mathbb{R}^n$ и всех $x \in \tilde{\Gamma}$ выполнено условие $x - \theta \in \tilde{\Gamma}$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} M(x(t)) = 1$ для всех $x = x(t) \in \tilde{\Gamma}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При сделанных предположениях не существует ни одного допустимого семейства полиномиальных кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Нам также понадобится следующая теоретико-числовая

ЛЕММА 4. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \geq 2$ и $l_1, \dots, l_n > l_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим множество

$$I := \left\{ k \in \mathbb{Z}_+^n : |k : l| = \sum_1^n \frac{k_i}{l_i} < 1 \right\}.$$

Тогда $\max_{k \in I} |k : l| > 1 - (1/\max_{1 \leq i \leq n} l_i)$.

4. Набросок доказательства теоремы 2. (i) Это утверждение доказано в [2, § 5] в более общей форме.

(ii) Предположим противное, т.е. что $Q \in \mathcal{L}(P)$ для всех Q вида (4), но $P(D)$ не квази-эллиптичен. Тогда найдется $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ такое, что $P^l(\alpha) = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$. Пусть

$$d := [l_1, \dots, l_n], \quad m_i := \frac{d}{l_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\};$$

тогда $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$.

Используя тождество (5), легко показать, что $P^{d_1}(\alpha) \neq 0$. Поэтому можно считать, что $P^{d_1}(\alpha) = 1$. Также положим

$$u_i := \frac{\partial P^d}{\partial x^i}(\alpha), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Выберем $Q(\xi) := P^{d_1}(\xi)$ в тождестве (5), так что

$$P^{d_1}(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi) = M(\xi)[P^d(\xi) + P^{d_1}(\xi) + \dots + P^{d_r}(\xi)] + N(\xi). \quad (6)$$

Введем следующие функции, определяющие некоторое семейство $\mathcal{N}$ полиномиальных кривых в $\mathbb{R}^n$:

$$x_i(t) := \alpha_i t^{m_i} + a_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (7)$$

где $a_i (\in \mathbb{R})$ – произвольные числа. Рассмотрим два основных случая относительно чисел $\{l_i\}_1^n$.

Случай $d > l_i$. Пусть $d > l_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Подставляя $\xi = x(t)$, $x(t)$ – функции (7), в (6) и раскладывая каждый из полиномов по формуле Тейлора в точке $\alpha t := \{\alpha_i t^{m_i}\}_1^n$, имеем

$$t^{d_1} + o(t^{d_1}) = M(x(t)) \left[\sum_{i=1}^n t^{d-m_i} u_i a_i + t^{d_1} + o(t^{d_1}) \right] + N(x(t)), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Заметим, что в обозначениях леммы 4 $d_1 = \max_{k \in I} |k: l|$, и по той же лемме $d_1 > d - m_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Отсюда $P^d(\alpha t) = o(t^{d_1})$ и

$$t^{d_1} + o(t^{d_1}) = M(x(t))[t^{d_1} + o(t^{d_1})] + N(x(t)), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Деля обе части равенства (8) на t^{d_1} , в силу произвольности выбора чисел $\{a_i\}_1^n$ получим, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} M(x(t)) = 1$ для всех $x(t) \in \mathcal{N}$. Значит, семейство кривых $\mathcal{N}$ допустимое. Противоречие с предложением 3.

Случай $d = l_1$. Пусть теперь $d = l_1 = \max_{1 \leq i \leq n} l_i$. Тогда $d_i = i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $m_1 = 1$. Как и выше, положим $P^{d_1}(\alpha) = P^{d-1}(\alpha) = 1$. Подставляя $\xi = x(t)$, $x(t)$ – функции (7), в (6) и раскладывая каждый из полиномов по формуле Тейлора в точке αt , имеем

$$t^{d-1} + o(t^{d-1}) = M(x(t)) \left[\left(\sum_{i=1}^n u_i a_i + 1 \right) t^{d-1} + o(t^{d-1}) \right] + N(x(t)). \quad (9)$$

Разделив обе части (9) на t^{d-1} , устремив $t \rightarrow \infty$ и приняв во внимание, что $M = O(1)$ и $N = O(1)$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[M(x(t)) \left(\sum_{i=1}^n u_i a_i + 1 \right) \right] = 1. \quad (10)$$

Введем вспомогательные векторы $\operatorname{Re} u := (\operatorname{Re} u_1, \dots, \operatorname{Re} u_n)$ и $\operatorname{Im} u := (\operatorname{Im} u_1, \dots, \operatorname{Im} u_n)$ и рассмотрим две возможные ситуации.

1. *Векторы $\operatorname{Re} u$ и $\operatorname{Im} u$ не пропорциональны.* Тогда найдутся такие вещественные числа $\{a_i\}_1^n$, что $\sum_1^n u_i a_i + 1 = 0$. Это противоречит соотношению (10).

2. Векторы $\operatorname{Re} u$ и $\operatorname{Im} u$ пропорциональны. Тогда ограничим выбор чисел $\{a_i\}_1^n$ в (7) условием

$$\sum_{i=1}^n u_i a_i = 0. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что для всех функций (7)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(x(t)) = 1. \quad (12)$$

Разобьем теперь множество индексов $\{1, \dots, n\}$ на p подмножеств $J_1, \dots, J_p$ таким образом, чтобы

$$m_i = m_j \iff i, j \in J_k \quad \text{для некоторого } k \in \{1, \dots, p\}.$$

Тогда, учитывая предположение $1 = m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$, имеем $M = \bigcup_{k=1}^p J_k$, $J_i \cap J_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $J_k = \{j_{k-1} + 1, \dots, j_k\}$, $0 =: j_0 < j_1 < \dots < j_p = n$, $k \in \{1, \dots, p\}$. Это разбиение порождает разбиение суммы $v := \sum_1^n u_i \alpha_i$ на p сумм $v_k := \sum_{i \in J_k} u_i \alpha_i$, $k \in \{1, \dots, p\}$.

Далее, последовательно подставим в тождество (6) функции $\tilde{x}^{(k)}(t) := x((t + \tau)^k)$, $k = 1, \dots, p$, где τ — произвольная постоянная, а $x(t)$ — функции (7). Используя равенство (12) для новых функций $\tilde{x}(t)$, определяющих то же семейство кривых $\mathcal{N}$, получим, что вектор $v := (v_1, \dots, v_p) = 0$ является решением некоторой однородной $(p \times p)$ -системы линейных уравнений с определителем типа Вандермонда (и, значит, не равным нулю). Отсюда $v_k = 0$, $k \in [1; p]$.

Теперь доказательство завершается индукцией по размерности $n \geq 3$. Сначала докажем теорему для $n = 3$ (база индукции). Затем, считая $n > 3$ и предполагая теорему доказанной для всех размерностей k , $k \in \{3, \dots, n - 1\}$, рассмотрим следующие три случая относительно вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

1) Если существует $j \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $\alpha_j = 0$, то, переходя к подпространству $E := \{x_j = 0\}$, $\dim E = n - 1$, получим, что $P^l|_E(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \neq 0$. Согласно следствию 1 и последующему замечанию 2 полином $P^l|_E$ подчиняет в E все полиномы Q вида (4). Это противоречит предположению индукции.

2) Если $\alpha_i \neq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, и $1 = m_1 < \dots < m_n$, то $0 = v_k = u_k \alpha_k$ для всех $k \in \{1, \dots, p = n\}$ и, следовательно, $u_i = 0$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Значит, параметры $\{a_i\}_1^n$ в (7) произвольные и семейство $\mathcal{N}$ допустимо. Противоречие с предложением 3.

3) Наконец, если $\alpha_i \neq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, и существуют $w_1 \neq w_2$ такие, что $m_{w_1} = m_{w_2}$, то ограничение нашей задачи на подпространство $E := \{x_{w_1} = x_{w_2} = 0\}$ “делает” ее однородной (имеется в виду, что $l_{w_1} = l_{w_2}$). Тогда подходящей заменой переменных в E (например, поворотом вокруг начала координат) добиваемся, чтобы $\alpha_{w_2} = 0$. Затем возвращаемся к рассуждениям пункта 1). Теорема 2 полностью доказана.

Я глубоко признателен своему научному руководителю М. М. Маламуду за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения. Я также благодарен А. А. Шкаликову и А. Г. Костюченко, на семинаре которых докладывалась работа, за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хёрмандер Л. К. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. М.: ИЛ, 1959.
- [2] Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ // Тр. ММО. 1995. Т. 56. С. 206–261.
- [3] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
- [4] Ильин В. П. Об условиях справедливости неравенств между L_p -нормами частных производных функций многих переменных // Тр. МИАН. 1968. Т. 96. С. 205–242.
- [5] Boman J. Supremum norms for partial derivatives of functions of several real variables // Illinois J. Math. 1972. V. 16. № 2. P. 203–216.
- [6] Бесов О. В. О коэрцитивности в изотропном пространстве С. Л. Соболева // Матем. сб. 1967. Т. 73 (115). № 4. С. 585–599.
- [7] Маламуд М. М. Оценки для дифференциальных операторов в пространствах с равномерной нормой и коэрцитивность в пространствах Соболева // Докл. АН СССР. 1988. Т. 37. № 1. С. 25–29.
- [8] Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. М.: УРСС, 2002.
- [9] De Leeuw K., Mirkil H. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm. // Illinois J. Math. 1964. V. 8. № 3. P. 112–124.
- [10] Ornstein D. A non-equality for differential operators in the L_1 norm. // Arch. Rational Mech. Anal. 1962. V. 11. P. 40–49.
- [11] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- [12] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
- [13] Eberlein W. F. Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 67. P. 217–240.

Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: lim@univ.donetsk.ua

Поступило
14.05.2003