Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ковалевский, О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из классов, близких к L^1 , *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 375–385

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm750>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:18:39

УДК 517.9

О СУММИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ КЛАССОВ, БЛИЗКИХ К L^1

А. А. Ковалевский

Устанавливается ряд результатов о суммируемости энтропийных и слабых решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в зависимости от свойств интегрируемости правых частей этих уравнений.

Библиография: 9 названий.

1. Введение и формулировка основных результатов. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) и $p \in (1, n)$. Пусть c_1, c_2 – положительные постоянные, g – неотрицательная функция из $L^{p/(p-1)}(\Omega)$, и пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i – функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, \xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1} + g(x), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, \xi) \xi_i \geq c_2 |\xi|^p. \quad (2)$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u) = f \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (3)$$

Вопросам о разрешимости и свойствах решений задачи (3) с f из $L^1(\Omega)$ или из класса ограниченных мер посвящено достаточно большое число работ (см., например, [1]–[5]).

Приведем ряд определений и результатов относительно этой задачи, непосредственно связанных с содержанием данной работы.

Далее будем считать, что $f \in L^1(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слабым решением задачи (3) будем называть функцию $u \in \dot{W}^{1,1}(\Omega)$ такую, что выполняются условия:

- 1) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i(x, \nabla u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

По поводу этого определения см., например, [2].

Далее, пусть для любого $k > 0$ T_k — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Через $\dot{T}^{1,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что для любого $k > 0$ $T_k(u) \in \dot{W}^{1,p}(\Omega)$.

Известно (см. [4]), что если $u \in \dot{T}^{1,p}(\Omega)$ и $i \in \{1, \dots, n\}$, то существует единственная измеримая функция $\delta_i u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любого $k > 0$

$$D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u| < k\}} \quad \text{п.в. на } \Omega. \quad (4)$$

Легко видеть, что $\dot{W}^{1,p}(\Omega) \subset \dot{T}^{1,p}(\Omega)$, и если $u \in \dot{W}^{1,p}(\Omega)$, то для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $\delta_i u = D_i u$ почти всюду на Ω .

Для любой функции $u \in \dot{T}^{1,p}(\Omega)$ положим $\delta u = (\delta_1 u, \dots, \delta_n u)$.

Для любого $\lambda \in [1, n]$ определим $\lambda^* = n\lambda/(n - \lambda)$.

Известно (см., например, [6]), что если $\lambda \in [1, n]$, то существует положительная постоянная $c_{n,\lambda}$, зависящая только от n и λ , такая, что для любой функции $u \in \dot{W}^{1,\lambda}(\Omega)$

$$\left(\int_{\Omega} |u|^{\lambda^*} dx \right)^{1/\lambda^*} \leq c_{n,\lambda} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{\lambda} dx \right)^{1/\lambda}. \quad (5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $u \in \dot{T}^{1,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1, p]$, $|\delta u| \in L^{\lambda}(\Omega)$. Тогда $u \in \dot{W}^{1,\lambda}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4), (5) и условий предложения для последовательности функций $T_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, имеем: $T_k(u) \in \dot{W}^{1,\lambda}(\Omega)$, $T_k(u) \rightarrow u$ сильно в $L^{\lambda}(\Omega)$ и $D_i T_k(u) \rightarrow \delta_i u$ сильно в $L^{\lambda}(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$ и $T_k(u) \rightarrow u$ сильно в $W^{1,\lambda}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \dot{W}^{1,\lambda}(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Энтропийным решением задачи (3) будем называть функцию $u \in \dot{T}^{1,p}(\Omega)$ такую, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$ имеет место неравенство

$$\int_{\{|u-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) (\delta_i u - \delta_i \varphi) \right\} dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) dx. \quad (6)$$

Заметим, что в силу (1) и (4) интеграл в левой части (6) определен и конечен, так что определение 2 корректно.

Понятие энтропийного решения задачи (3) введено и детально изучено в [4]. Из теоремы 6.1 работы [4] следует, что если дополнительно к (1) и (2) для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n [a_i(x, \xi) - a_i(x, \xi')] (\xi_i - \xi'_i) > 0, \quad (7)$$

то существует, причем единственное, энтропийное решение задачи (3). Кроме того, в [4] установлено, что если u – энтропийное решение задачи (3), то u является также решением этой задачи в следующем смысле: для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i(x, \delta u) \in L^1(\Omega)$ и для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u) D_i \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

При этом есть примеры, показывающие, что при $p \leq 2 - 1/n$ задача (3), вообще говоря, не имеет слабых решений.

Положим

$$r = \frac{n(p-1)}{n-1}.$$

Из результатов работы [4] вытекает, что если u – энтропийное решение задачи (3), то для любого $\lambda \in (0, n(p-1)/(n-p))$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$ и для любого $\lambda \in (0, r)$ имеем $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$; при этом если $p > 2 - 1/n$, то u – слабое решение задачи (3) и для любого $\lambda \in [1, r)$ имеем $u \in \dot{W}^{1,\lambda}(\Omega)$.

Из изложенного следует, в частности, что если $p > 2 - 1/n$ и дополнительно к (1) и (2) справедливо (7), то существует слабое решение задачи (3), принадлежащее пространству $\dot{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ для любого $\lambda \in [1, r)$.

Естественно возникает вопрос о возможности повышения суммируемости энтропийных и слабых решений задачи (3) при дополнительных условиях интегрируемости функции f . На этот счет имеются следующие два результата.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p > 2 - 1/n$ и дополнительно к (1) и (2) справедливо (7). Пусть $f \ln(1 + |f|) \in L^1(\Omega)$. Тогда существует слабое решение задачи (3), принадлежащее $\dot{W}^{1,r}(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p > 2 - 1/n$ и дополнительно к (1) и (2) справедливо (7). Пусть $1 < t < np/(np - n + p)$ и $f \in L^m(\Omega)$. Тогда существует слабое решение задачи (3), принадлежащее $\dot{W}^{1,(p-1)t^*}(\Omega)$.

Теоремы 1 и 2 доказаны в работе [2]. Это сделано в предположении, что коэффициенты a_i зависят еще и от аргумента, соответствующего неизвестной функции. Однако последнее не является принципиальным моментом. Отметим, что доказательство теорем 1 и 2 основано, по существу, на получении некоторых равномерных оценок для решений аппроксимирующих задач с гладкими правыми частями и последующем предельном переходе к функциям, являющимся искомыми слабыми решениями задачи (3). При этом осуществление предельного перехода предполагает использование условия монотонности (7).

Заметим еще, что если дополнительно к (1) и (2) справедливо (7), $m \geq np/(np - n + p)$ и $f \in L^m(\Omega)$, то в силу известных результатов теории монотонных операторов (см. [7]) существует слабое решение задачи (3), принадлежащее $\dot{W}^{1,p}(\Omega)$.

Целью настоящей работы является доказательство следующих двух результатов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\frac{n-1}{n} < \sigma < 1 \quad (8)$$

и

$$f[\ln(1 + |f|)]^\sigma \in L^1(\Omega). \quad (9)$$

Пусть u – энтропийное решение задачи (3). Тогда $u \in L^q(\Omega)$, где $q = n(p-1)/(n-p)$, и $|\delta u| \in L^r(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$1 < m < \frac{np}{np - n + p} \quad (10)$$

и

$$f \in L^m(\Omega). \quad (11)$$

Пусть u – энтропийное решение задачи (3). Тогда

- 1) для любого $\lambda \in (0, nmt(p-1)/(n-tp))$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 2) для любого $\lambda \in (0, (p-1)m^*)$ имеем $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$;
- 3) если $(p-1)m^* \geq 1$, то $u \in \dot{W}^{1,(p-1)m^*}(\Omega)$.

Эти результаты описывают свойства интегрируемости произвольных энтропийных решений задачи (3). Их доказательство, в отличие от доказательства теорем 1 и 2, не обращается к решениям задач с гладкими данными, аппроксимирующих задачу (3), и не требует привлечения условия монотонности (7). Как мы увидим ниже, доказательство теорем 3 и 4 основано на некоторых приемах для интегральных неравенств, которым удовлетворяют энтропийные решения задачи (3) в силу (6) и (2). Устанавливая утверждение 3) теоремы 4, мы модифицируем прием, предложенный в [2], а именно, проводим соответствующие оценки не для решений аппроксимирующих задач, а для суперпозиций рассматриваемых энтропийных решений и функций T_k .

Что касается слабых решений задачи (3), то теорема 3 позволяет получить усиление теоремы 1, а теорема 4 – дополнение к теореме 2.

Действительно, из теоремы 3, предложения 1 и изложенных выше результатов работы [4] вытекает такое утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p \geq 2 - 1/n$ и дополнительно к (1) и (2) справедливо (7). Пусть выполняются условия (8) и (9). Тогда существует слабое решение задачи (3), принадлежащее $\dot{W}^{1,r}(\Omega)$.

Очевидно, что этот результат сильнее теоремы 1.

Легко видеть, что теорема 2 вытекает из теоремы 4 и изложенных выше результатов работы [4]. Вместе с тем из теоремы 4 и изложенных выше результатов работы [4] вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $p \leq 2 - 1/n$ и дополнительно к (1) и (2) справедливо (7). Пусть $n/(np - n + 1) < m < np/(np - n + p)$ и $f \in L^m(\Omega)$. Тогда существует слабое решение задачи (3), принадлежащее $\dot{W}^{1,(p-1)m^*}(\Omega)$.

Отметим, наконец, что аналогично результатам данной работы могут быть получены теоремы об интегрируемости введенных и изученных в [8], [9] энтропийных и слабых решений задачи Дирихле для некоторого класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка в случаях, когда правые части этих уравнений удовлетворяют условиям (8), (9) или (10), (11).

2. Доказательство основных результатов. Установим сначала ряд вспомогательных фактов общего характера.

ЛЕММА 1. Пусть u — измеримая функция на Ω , $M > 0$, $\alpha > 0$, и пусть для любого $k > 0$ справедливо неравенство

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq Mk^{-\alpha}. \quad (12)$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, \alpha)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\lambda \in (0, \alpha)$ и положим $\lambda_1 = 2/(\alpha - \lambda)$. В силу (12) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\{k^{\lambda_1} \leq |u| < (k+1)^{\lambda_1}\}} |u|^\lambda dx \leq 2^{\lambda\lambda_1} Mk^{-2}.$$

Отсюда, производя суммирование по k в обеих частях неравенства, заключаем, что $u \in L^\lambda(\Omega)$. Лемма доказана.

Отметим, что свойство, представленное леммой 1, использовалось по существу, например, в [4].

ЛЕММА 2. Пусть u — измеримая функция на Ω , $M > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 1$, и пусть для любого $k \geq e$ справедливо неравенство

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq Mk^{-\alpha}(\ln k)^{-\beta}. \quad (13)$$

Тогда $u \in L^\alpha(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (13) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\{e^k \leq |u| < e^{k+1}\}} |u|^\alpha dx \leq Me^\alpha k^{-\beta}.$$

Отсюда, производя суммирование по k в обеих частях неравенства, заключаем, что $u \in L^\alpha(\Omega)$. Лемма доказана.

Положим для любых $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ и $k > 0$

$$I(u, k) = \int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p dx.$$

ЛЕММА 3. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ $k > 0$. Тогда

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_{n,p}^* k^{-p^*} [I(u, k)]^{p^*/p}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (14) следует из (5) и очевидного неравенства

$$k^{p^*} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx.$$

ЛЕММА 4. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$, $k, k_1 > 0$. Тогда

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq c_{n,p}^* k_1^{-p^*} [I(u, k_1)]^{p^*/p} + k^{-p} I(u, k_1). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $G = \{|u| < k_1, |\delta u| \geq k\}$. Ясно, что

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq \text{meas}\{|u| \geq k_1\} + \text{meas } G. \quad (16)$$

В силу (4) имеем $k \leq |\nabla T_{k_1}(u)|$ п.в. на G . Тогда

$$\text{meas } G \leq k^{-p} I(u, k_1). \quad (17)$$

Из (16), (17) и леммы 3 выводим (15), и тем самым лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $c > 0$, $(n-1)/n < \sigma < 1$, ψ — неотрицательная измеримая функция на Ω такая, что $\psi[\ln(1+\psi)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. Пусть $u \in \mathring{T}^{1,p}(\Omega)$ и для любого $k > 0$ справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq c \int_{\Omega} \psi |T_k(u)| dx. \quad (18)$$

Тогда $u \in L^q(\Omega)$, где $q = n(p-1)/(n-p)$, и $|\delta u| \in L^r(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через c_i , $i = 3, 4, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, p, c, σ , $\text{meas } \Omega$ и нормы в $L^1(\Omega)$ функции $\psi[\ln(1+\psi)]^\sigma$.

Зафиксируем $k \geq e$. Положим $\gamma = (p-1)/(2p)$. В силу (18) имеем

$$I(u, k) \leq c \int_{\{\psi \leq k^\gamma\}} \psi |T_k(u)| dx + c \int_{\{\psi > k^\gamma\}} \psi |T_k(u)| dx. \quad (19)$$

Используя неравенство Гёльдера и (5), для первого интеграла в правой части (19) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\{\psi \leq k^\gamma\}} \psi |T_k(u)| dx &\leq k^\gamma \int_{\Omega} |T_k(u)| dx \\ &\leq k^\gamma [\text{meas } \Omega]^{(p^*-1)/p^*} \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \\ &\leq c_3 k^\gamma [I(u, k)]^{1/p}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для второго интеграла в правой части (19) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\{\psi > k^\gamma\}} \psi |T_k(u)| dx &\leq k \int_{\{\psi > k^\gamma\}} \psi dx \\ &\leq k(\gamma \ln k)^{-\sigma} \int_{\Omega} \psi [\ln(1 + \psi)]^\sigma dx = c_4 k (\ln k)^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (19)–(21), используя неравенство Юнга, выводим

$$\begin{aligned} I(u, k) &\leq cc_3 k^\gamma [I(u, k)]^{1/p} + cc_4 k (\ln k)^{-\sigma} \\ &\leq \frac{1}{p} I(u, k) + \frac{p-1}{p} (cc_3)^{p/(p-1)} k^{1/2} + cc_4 k (\ln k)^{-\sigma}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I(u, k) \leq c_5 k^{1/2} + c_6 k (\ln k)^{-\sigma} \leq (2c_5 + c_6) k (\ln k)^{-\sigma}.$$

Таким образом, для любого $k \geq e$ справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq c_7 k (\ln k)^{-\sigma}. \quad (22)$$

Отсюда и из лемм 3 и 2 выводим, что $u \in L^q(\Omega)$, где $q = n(p-1)/(n-p)$.

Зафиксируем теперь произвольное число $k > e^{(n-1)/(n-p)}$. Легко видеть, что существует $k_1 > e$ такое, что

$$k_1^{n-1} (\ln k_1)^\sigma = k^{n-p}. \quad (23)$$

Тогда

$$k_1^{-n(p-1)/(n-p)} (\ln k_1)^{-\sigma n/(n-p)} = k^{-p} k_1 (\ln k_1)^{-\sigma} = k^{-r} (\ln k_1)^{-\sigma n/(n-1)}. \quad (24)$$

Очевидно, что $\ln k_1 < k_1$. Отсюда и из (23) следует, что

$$k^{n-p} < k_1^n. \quad (25)$$

Кроме того, поскольку $k_1 > e$, в силу (22) имеем

$$I(u, k_1) \leq c_7 k_1 (\ln k_1)^{-\sigma}. \quad (26)$$

Используя лемму 4 и (24)–(26), устанавливаем, что

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq c_8 k^{-r} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}.$$

Отсюда и из леммы 2, учитывая неравенство $\sigma > (n-1)/n$, выводим, что $|\delta u| \in L^r(\Omega)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $b > 0$, $1 < m < np/(np - n + p)$, ψ — неотрицательная функция на Ω , $\psi \in L^m(\Omega)$. Пусть $u \in \dot{T}^{1,p}(\Omega)$ и для любого $k > 0$ справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq b \int_{\Omega} \psi |T_k(u)| dx. \quad (27)$$

Тогда

- 1) для любого $\lambda \in (0, nm(p-1)/(n-mp))$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 2) для любого $\lambda \in (0, (p-1)m^*)$ имеем $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в силу неравенства $m < np/(np - n + p)$ имеем $mp < n$ и $(m-1)p^* < m$.

Положим

$$m_1 = 1 - \frac{m-1}{m}p^*, \quad m_2 = \frac{(m-1)p^*}{mp}, \quad m_3 = \frac{n-mp}{n-m}, \quad \theta = \frac{nm(p-1)}{n-mp}.$$

Ясно, что $0 < m_1 < 1$, $0 < m_2 < 1$. Кроме того, имеем

$$p^* \left[1 - \frac{m_1}{(1-m_2)p} \right] = \theta, \quad (28)$$

$$m_3\theta = p - \frac{m_1m_3}{1-m_2}. \quad (29)$$

Через $b_i, i = 1, 2, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, p, b, m и нормы в $L^m(\Omega)$ функции ψ .

Зафиксируем $k > 0$. Используя (27), неравенство Гёльдера и (5), получаем

$$\begin{aligned} I(u, k) &\leq bk^{m_1} \int_{\Omega} \psi |T_k(u)|^{1-m_1} dx \\ &\leq bk^{m_1} \left(\int_{\Omega} \psi^m dx \right)^{1/m} \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{p^*} dx \right)^{(m-1)/m} \\ &\leq b_1 k^{m_1} [I(u, k)]^{m_2}. \end{aligned}$$

Теперь можно заключить, что для любого $k > 0$

$$I(u, k) \leq b_2 k^{m_1/(1-m_2)}. \quad (30)$$

Отсюда и из леммы 3, учитывая (28), выводим, что для любого $k > 0$ $\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq b_3 k^{-\theta}$. Тогда по лемме 1 для любого $\lambda \in (0, \theta)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$. Значит, утверждение 1) справедливо.

Далее, зафиксируем $k > 0$ и положим $k_1 = k^{m_3}$. В силу (30) имеем

$$I(u, k_1) \leq b_2 k^{m_1m_3/(1-m_2)}.$$

Отсюда и из леммы 4, учитывая (28) и (29), выводим, что

$$\text{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq b_4 k^{-(p-1)m^*}.$$

Тогда по лемме 1 для любого $\lambda \in (0, (p-1)m^*)$ имеем $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$. Значит, утверждение 2) справедливо. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $b', b'' > 0$, $1 < m < np/(np - n + p)$, ψ — неотрицательная функция на Ω , $\psi \in L^m(\Omega)$. Пусть $(p-1)m^* \geq 1$. Пусть $u \in \dot{T}^{1,p}(\Omega)$ и для любого $k > 0$ справедливы неравенства

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq b' k^{-nm(p-1)/(n-mp)}, \quad (31)$$

$$\int_{\{k-1 \leq |u| < k\}} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq b'' \int_{\{|u| \geq k-1\}} \psi dx. \quad (32)$$

Тогда $u \in \dot{W}^{1,(p-1)m^*}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda = (p-1)m^*$. В силу условий леммы относительно m имеем $\lambda \in [1, p)$. Заметим еще, что

$$\lambda^* = \frac{nm(p-1)}{n-mp}, \quad \frac{\lambda^*}{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{mp}\right) = \frac{1}{p}. \quad (33)$$

Положим $\lambda_1 = \lambda^*(p-\lambda)/\lambda$. Имеем $\lambda_1 \in (0, 1)$ и

$$(1-\lambda_1) \frac{m}{m-1} = \lambda^*. \quad (34)$$

Через $b_i, i = 5, 6, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $n, p, m, b', b'', \text{meas } \Omega$ и нормы в $L^m(\Omega)$ функции ψ .

Зафиксируем произвольное $N \in \mathbb{N}$. Используя неравенство Гёльдера, (31), первое из равенств (33) и (34), получаем

$$\begin{aligned} N^{1-\lambda_1} \int_{\{|u| \geq N\}} \psi dx &\leq N^{1-\lambda_1} (\text{meas}\{|u| \geq N\})^{(m-1)/m} \|\psi\|_{L^m(\Omega)} \\ &\leq (b' + 1) N^{1-\lambda_1-\lambda^*(m-1)/m} \|\psi\|_{L^m(\Omega)} = b_5. \end{aligned} \quad (35)$$

Далее, положим

$$I_N = \int_{\Omega} |\nabla T_N(u)|^\lambda dx, \quad J_N = \int_{\Omega} \frac{|\nabla T_N(u)|^p}{(1 + |T_N(u)|)^{\lambda_1}} dx.$$

В силу неравенства Гёльдера и определения λ_1 имеем

$$\begin{aligned} I_N &= \int_{\Omega} \frac{|\nabla T_N(u)|^\lambda}{(1 + |T_N(u)|)^{\lambda_1 \lambda/p}} (1 + |T_N(u)|)^{\lambda_1 \lambda/p} dx \\ &\leq J_N^{\lambda/p} \left[\int_{\Omega} (1 + |T_N(u)|)^{\lambda^*} dx \right]^{(p-\lambda)/p}. \end{aligned} \quad (36)$$

Оценим J_N . Используя (4) и (32), получаем

$$J_N \leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \int_{\{k-1 \leq |u| < k\}} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq b'' \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \int_{\{|u| \geq k-1\}} \psi dx. \quad (37)$$

Сумму в правой части этого неравенства, учитывая (35), оцениваем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \int_{\{|u| \geq k-1\}} \psi \, dx &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \sum_{l=k}^N \int_{\{l-1 \leq |u| < l\}} \psi \, dx + \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \right) \int_{\{|u| \geq N\}} \psi \, dx \\
 &= \sum_{l=1}^N \left(\int_{\{l-1 \leq |u| < l\}} \psi \, dx \right) \sum_{k=1}^l \frac{1}{k^{\lambda_1}} + \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{\lambda_1}} \right) \int_{\{|u| \geq N\}} \psi \, dx \\
 &\leq \frac{2}{1-\lambda_1} \sum_{l=1}^N l^{1-\lambda_1} \int_{\{l-1 \leq |u| < l\}} \psi \, dx + \frac{2}{1-\lambda_1} N^{1-\lambda_1} \int_{\{|u| \geq N\}} \psi \, dx \\
 &\leq \frac{2}{1-\lambda_1} \int_{\Omega} \psi (1 + |T_N(u)|)^{1-\lambda_1} \, dx + \frac{2b_5}{1-\lambda_1} \\
 &\leq b_6 \left[\int_{\Omega} (1 + |T_N(u)|)^{\lambda^*} \, dx \right]^{(m-1)/m} + b_7.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (36), (37) вытекает, что

$$I_N \leq b_8 \left(\int_{\Omega} |T_N(u)|^{\lambda^*} \, dx \right)^{1-\lambda/(mp)} + b_8. \quad (38)$$

В свою очередь, в силу (5) имеем

$$\int_{\Omega} |T_N(u)|^{\lambda^*} \, dx \leq c_{n,\lambda}^{\lambda^*} I_N^{\lambda^*/\lambda}. \quad (39)$$

Из (38), (39), используя второе из равенств (33) и неравенство Юнга, выводим, что

$$I_N \leq b_8 (c_{n,\lambda}^{\lambda^*} + 1) I_N^{1/p} + b_8 \leq \frac{1}{p} I_N + \frac{p-1}{p} b_9$$

и, следовательно, $I_N \leq b_9$.

Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\Omega} |\nabla T_N(u)|^{\lambda} \, dx \leq b_9.$$

Отсюда, учитывая, что в силу (4) $|\nabla T_N(u)| \rightarrow |\delta u|$ п.в. на Ω , и применяя лемму Фату, получаем, что $|\delta u| \in L^{\lambda}(\Omega)$. Теперь из предложения 1 вытекает, что $u \in \dot{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Лемма доказана.

Относительно энтропийных решений задачи (3) имеют место следующие результаты.

ЛЕММА 8. Пусть u – энтропийное решение задачи (3). Тогда для любого $k > 0$ справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq c_2^{-1} \int_{\Omega} |f| |T_k(u)| \, dx.$$

ЛЕММА 9. Пусть u – энтропийное решение задачи (3). Тогда для любого $k > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{\{k-1 \leq |u| < k\}} |\nabla T_k(u)|^p dx \leq c_2^{-1} \int_{\{|u| \geq k-1\}} |f| dx.$$

Эти результаты устанавливаются с использованием неравенств (6) и (2). По поводу их доказательства см. [4].

Теперь остается заметить, что теорема 3 вытекает из лемм 8 и 5, а теорема 4 – из лемм 8, 9 и 6, 7.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Boccardo L., Gallouët T. Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data // J. Funct. Anal. 1989. V. 87. P. 149–169.
- [2] Boccardo L., Gallouët T. Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures // Comm. Partial Differential Equations. 1992. V. 17. P. 641–655.
- [3] Boccardo L., Gallouët T., Vazquez J. L. Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without growth restrictions on the data // J. Differential Equations. 1993. V. 105. P. 334–363.
- [4] Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L. An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1995. V. 22. P. 241–273.
- [5] Boccardo L., Gallouët T. Summability of the solutions of nonlinear elliptic equations with right hand side measures // J. Convex Anal. 1996. V. 3. P. 361–365.
- [6] Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [7] Lions J. L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
- [8] Kovalevsky A. Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic fourth-order equations with L^1 -data // Nonlinear Boundary Value Problems. 1999. V. 9. P. 46–54.
- [9] Ковалевский А. А. Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1 -правыми частями // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 2. С. 27–80.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк
E-mail: alexkvl@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило
26.09.2000