Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Т. Мамедов, Граничные свойства решений параболических уравнений второго порядка в областях со специальной симметрией, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 386–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm751>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 10:31:41

УДК 517.956.4

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТЯХ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

И. Т. Мамедов

Рассматривается первая краевая задача для недивергентных параболических уравнений 2-го порядка с, вообще говоря, разрывными коэффициентами. Исследуется регулярность граничной точки в предположении, что в некоторой окрестности этой точки граница области является поверхностью вращения. В терминах параболических емкостей доказывается необходимое и достаточное условие регулярности, смыкающееся в случае уравнения теплопроводности в критерий типа Винера.

Библиография: 15 названий.

Введение. Рассмотрим в ограниченной области D , расположенной в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{n+1}$ точек $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$, первую краевую задачу

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i x_j} - u_t = 0, \quad (x, t) \in D, \quad u|_{\Gamma(D)} = f, \quad f \in C(\Gamma(D)), \quad (1)$$

в предположении, что матрица $\|a_{ij}(x, t)\|$ симметрична и

$$\inf_{(x,t) \in D, |\xi|=1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j = \lambda_1 > 0, \quad (2)$$

$$\sup_{(x,t) \in D} \sum_{i=1}^n a_{ii}(x, t) = M_1 < \infty. \quad (3)$$

Здесь $\Gamma(D)$ – параболическая граница области D . Точка $(x^0, t^0) \in \Gamma(D)$ называется *регулярной* относительно первой краевой задачи, если при всякой $f \in C(\Gamma(D))$ для обобщенного по Винеру решения $u_f(x, t)$ задачи (1) (см. [1]) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0, t^0) \\ (x,t) \in D}} u_f(x, t) = f(x^0, t^0).$$

Интерес к изучению вопросов регулярности граничной точки для параболических уравнений 2-го порядка зародился сразу после получения Н. Винером известного критерия регулярности относительно задачи Дирихле для уравнения Лапласа [2]. И. Г. Петровский [3], рассматривая одномерное уравнение теплопроводности, установил несмыкающиеся друг с другом необходимые и достаточные условия регулярности для областей, ограниченных прямыми $t = t^1$, $t = t^2$ и кривыми $x = \varphi_1(t)$, $x = \varphi_2(t)$. Е. М. Ландис [4], [5] получил критерий регулярности для многомерного уравнения теплопроводности в терминах расходимости ряда из тепловых потенциалов некоторых подмножеств $\mathbb{R}_{n+1} \setminus D$. Этот критерий был перенесен на широкий класс параболических уравнений 2-го порядка в [6]–[9]. В терминах тепловых емкостей в [1], [10]–[13] были получены различные достаточные условия регулярности граничной точки. Л. Эванс и Р. Гарипи в [14] установили необходимое и достаточное условие регулярности для уравнения теплопроводности в терминах расходимости ряда из тепловых емкостей, которое можно считать полным аналогом критерия Винера для уравнения Лапласа.

Целью настоящей заметки является обобщение этого результата на произвольные равномерно параболические уравнения 2-го порядка недивергентной структуры с, вообще говоря, разрывными коэффициентами для областей, обладающих некоторой специальной симметрией.

1. Необходимое условие регулярности. Будем считать, что точка (x^0, t^0) совпадает с началом координат, область D расположена в полупространстве $t < 0$ и в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ граница ∂D представляется уравнением

$$|x|^2 = -t\alpha(-t), \quad -b \leq t < 0,$$

где $\alpha(z)$ – положительная, невозрастающая функция на $(0, b]$, при этом

$$|\alpha'(z)| \leq \frac{k}{z}, \quad z \in (0, b], \quad 0 \leq k < 2M_1. \quad (4)$$

Кроме того, предположим, что существует конечный или бесконечный предел

$$J = \lim_{z \rightarrow 0+} |\alpha'(z)| z \ln \frac{1}{z}, \quad (5)$$

причем если $J = 4\lambda_1$ и

$$\sigma(z) = \left| |\alpha'(z)| - \frac{4\lambda_1}{z \ln(1/z)} \right|, \quad \text{то} \quad \int_0^b \sigma(z) dz < \infty.$$

Положим для $s > 0$ и $\beta > 0$

$$G_{s,\beta}(x, t) = \begin{cases} t^{-s} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\beta t}\right) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

ЛЕММА 1 [1]. Если относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (2), (3), $s^+ = M_1/(2\lambda_1)$, $\beta^+ = \lambda_1$ и (y, τ) – произвольная точка D , то для $(x, t) \in D \setminus \{(y, \tau)\}$

$$L_{(x,t)}G_{s^+, \beta^+}(x-y, t-\tau) \geq 0.$$

Для доказательства заметим, что для $t > \tau$

$$\begin{aligned} LG_{s^+, \beta^+} &= \frac{G_{s^+, \beta^+}}{t-\tau} \left(\frac{1}{4(\beta^+)^2(t-\tau)} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\beta^+} \sum_{i=1}^n a_{ii}(x, t) + s^+ - \frac{|x-y|^2}{4\beta^+(t-\tau)} \right) \\ &\geq \frac{G_{s^+, \beta^+}}{t-\tau} \left(\frac{\lambda_1|x-y|^2}{4(\beta^+)^2(t-\tau)} - \frac{M_1}{2\beta^+} + s^+ - \frac{|x-y|^2}{4\beta^+(t-\tau)} \right) = 0. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Из условий (2), (3) следует, что

$$\sup_{(x,t) \in D, |\xi|=1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j = \lambda_2 < \infty, \quad \inf_{(x,t) \in D} \sum_{i=1}^n a_{ii}(x, t) = M_2 > 0.$$

Тогда если $s^+ = M_2/(2\lambda_2)$, $\beta^- = \lambda_1$ и (y, τ) – произвольная точка D , то для $(x, t) \in D \setminus \{(y, \tau)\}$

$$L_{(x,t)}G_{s^-, \beta^-}(x-y, t-\tau) \leq 0.$$

В дальнейшем $G_{s^\pm, \beta^\pm}(x, t)$ будем обозначать через $G_\pm(x, t)$. Запись $C(\dots)$ означает, что положительная константа C зависит лишь от содержимого скобок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}_{n+1}$. Назовем меру $\mu^\pm$ с носителем в $K(s^\pm, \beta^\pm)$ – допустимой, если

$$\int_K G^\pm(x-y, t-\tau) d\mu^\pm(y, \tau) \leq 1 \quad \text{при } (x, t) \notin K.$$

Число $p^\pm(K) = \sup \mu^\pm(K)$, где точная верхняя грань берется по всем $(s^\pm, \beta^\pm)$ -допустимым мерам, называется $G^\pm$ -емкостью компакта K . В случае $s^+ = s^- = n/2$, $\beta^+ = \beta^- = 1$ соответствующая емкость называется тепловой и обозначается через $p(K)$.

Пусть $t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^k$, Ω_i – ограниченные n -мерные области, F_i – цилиндры $\Omega_i \times (t^{i-1}, t^i)$, $i = 1, \dots, k$. Область Q называется ступенчатой, если она представляет собой множество внутренних точек объединения $\bigcup_{i=1}^k \overline{F}_i$. При этом

$$S(Q) = \bigcup_{i=1}^k (\partial\Omega_i \times [t^{i-1}, t^i]).$$

Для произвольной $(n+1)$ -мерной области H через $\gamma(H)$ обозначим совокупность всех точек $(x, t) \in \partial H$, для каждой из которых существует $r = r(x, t)$ такое, что $C_{x,r}^{t-r, t} \subset H$, $C_{x,r}^{t, t+r} \subset \mathbb{R}_{n+1} \setminus H$. Здесь $C_{x^0, r}^{a, b}$ – цилиндр, определяемый неравенствами $|x - x^0| < r$, $a < t < b$.

Множество $\Gamma(H) = \partial H \setminus \gamma(H)$ называется параболической границей области H .

Пусть V – область в $\mathbb{R}_{n+1}$, $(x^0, t^0) \in V$. Обозначим через $\Lambda[(x^0, t^0)]$ совокупность точек $(x, t) \in V \setminus \{(x^0, t^0)\}$, для каждой из которых существует непрерывная кривая, соединяющая точки (x, t) и (x^0, t^0) , такая, что вдоль этой кривой при движении от (x, t) к (x^0, t^0) координата t строго возрастает.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Определенная в области V полунепрерывная снизу функция $u(x, t)$ называется L -суперпараболической, если

- а) $-\infty < u(x, t) \leq +\infty$;
- в) для каждой точки $(x, t) \in V$ существует точка $(x^0, t^0) \in V$ такая, что $(x, t) \in \Lambda[(x^0, t^0)]$ и $u(x^0, t^0) < +\infty$;
- с) для всякой строго внутренней подобласти V' области V и произвольного решения $h(x, t)$ уравнения $Lh = 0$ в V' из $u - h|_{\Gamma(V')} \geq 0$ следует $u \geq h$ в V' .

Функция $u(x, t)$ называется L -субпараболической в V , если функция $-u(x, t)$ является L -суперпараболической в V .

Пусть для натурального m

$$A_m^\pm = \{(x, t): e^{ms^\pm} \leq G^\pm(-x, -t) \leq e^{(m+1)s^\pm}\}, \quad B_m^\pm = A_m^\pm \setminus D.$$

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что обобщенное по Винеру решение $u_f(x, t)$ задачи (1) существует. Для этого достаточно, например, чтобы в каждой строго внутренней подобласти области D коэффициенты оператора L удовлетворяли равномерному условию Дини.

ТЕОРЕМА 1. Если коэффициенты оператора L удовлетворяют в области D условиям (2), (3), то для регулярности точки $(0, 0)$ относительно первой краевой задачи необходимо, чтобы

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{ms^-} p^-(B_m^-) = \infty. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условие (6) не выполнено. Обозначим через m_1 наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{m=m_1}^{\infty} e^{ms^-} p^-(B_m^-) \leq \frac{e^{-s^-}}{4}. \quad (7)$$

Выберем непрерывную граничную функцию $f(x, t)$ первой краевой задачи (1) так, чтобы $f(0, 0) = 1$, $f(x, t) = 0$ при $t \leq \inf_{(y, \tau) \in B_{m_1}^-} \{\tau\}$, $0 \leq f(x, t) \leq 1$. Согласно [15] для каждого натурального $m \geq m_1$ при любом $\varepsilon_m > 0$ существуют ступенчатая область $Q_m \supset B_m^-$ с достаточно гладкими границами оснований составляющих цилиндров и мера μ_m с носителем в $\overline{Q_m}$ такие, что если

$$U_m(x, t) = \int_{\overline{Q_m}} G^-(x - y, t - \tau) d\mu_m(y, \tau),$$

то

$$U_m|_{S(Q_m) \cup \gamma(Q_m)} = 1, \quad (8)$$

$$\mu_m(\overline{Q_m}) \leq p^-(B_m^-) + \varepsilon_m. \quad (9)$$

Положим $\varepsilon_m = e^{-s^-} 2^{-m}/4$. Согласно следствию из леммы 1 и принципу максимума функция $U(x, t) = \sum_{m=m_1}^{\infty} U_m(x, t)$ является L -суперпараболической в

$$D^1 = D \setminus \overline{\bigcup_{m=m_1}^{\infty} Q_m}.$$

Кроме того, из (8) с учетом выбора функции $f(x, t)$ следует, что

$$u_f(x, t) \leq U(x, t) \quad \text{для } (x, t) \in \Gamma(D^1).$$

По принципу максимума $u_f(x, t) \leq U(x, t)$ в D^1 . Поэтому, учитывая (7) и (9), получаем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\substack{(x, t) \rightarrow (0, 0) \\ (x, t) \in D^1}} u_f(x, t) &\leq U(0, 0) \leq \sum_{m=m_1}^{\infty} e^{(m+1)s^-} \mu_m(\overline{Q_m}) \\ &\leq e^{s^-} \left(\sum_{m=m_1}^{\infty} e^{ms^-} p^-(B_m^-) + \frac{e^{-s^-}}{4} \sum_{m=m_1}^{\infty} 2^{-m} \right) \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

т.е. точка $(0, 0)$ является иррегулярной. Теорема доказана.

2. Некоторые емкостные оценки. Для натурального m обозначим через z_m корень уравнения

$$\alpha(z_m) = 2M_1 \ln \frac{e^{-m}}{z_m}. \quad (10)$$

Покажем вначале, что для достаточно больших m уравнение (10) имеет корень в интервале $(e^{-\gamma_1 m}, e^{-m})$, где $\gamma_1 = 4M_1/(2M_1 - K)$. Действительно, если

$$\varphi(z) = \alpha(z) - 2M_1 \ln \frac{e^{-m}}{z},$$

то

$$\varphi(e^{-m}) = \alpha(e^{-m}) > 0, \quad (11)$$

$$\varphi(e^{-\gamma_1 m}) = \alpha(e^{-m}) - 2M_1(\gamma_1 - 1)^m. \quad (12)$$

С другой стороны, для $t^1 \geq t^2 > 0$ из (4) следует, что

$$\alpha(t^2) - \alpha(t^1) \leq K \ln \frac{t^1}{t^2}, \quad (13)$$

т.е. для достаточно малых t

$$\alpha(t) \leq \alpha(b) + K \ln b + K \ln \frac{1}{t} < \frac{2M_1 + K}{2} \ln \frac{1}{t}.$$

Теперь из (12) получаем

$$\varphi(e^{-\gamma_1 m}) < m \left(\frac{2M_1 + K}{2} \gamma_1 - 2M_1(\gamma_1 - 1) \right) = 0,$$

что вместе с (11) гарантирует наличие корня в указанном интервале. Если уравнение (10) имеет более одного корня в интервале $(e^{-\gamma_1 m}, e^{-m})$, то через z_m обозначим точную нижнюю грань всех этих корней. Заметим, что z_m является модулем временной координаты точек пересечения поверхности уровня $G^+(-x, -t) = e^{ms^+}$ с ∂D .

Нетрудно видеть, что для достаточно больших m последовательность $\{z_m\}$ не возрастает. Действительно, из (10) следует, что

$$\frac{z_m}{z_{m+1}} = \exp\left(-\frac{1}{2M-1}(\alpha(z_m) - \alpha(z_{m+1})) + 1\right). \quad (14)$$

Если теперь предположить, что $z_m < z_{m+1}$, то из (13) и (14) выводим

$$\frac{z_m}{z_{m+1}} \geq e \cdot \left(\frac{z_m}{z_{m+1}}\right)^{K/(2M_1)},$$

т.е.

$$\frac{z_m}{z_{m+1}} \geq \exp\left(\frac{2M_1}{2M_1 - K}\right) > 1,$$

и мы получаем противоречие. Итак $z_m \geq z_{m+1}$, что с учетом (13) и (14) влечет за собой

$$e^{-d} z_m \leq z_{m+1} \leq e^{-1} z_m, \quad (15)$$

где $d = 2M_1/(2M_1 - K)$. Обозначим $e^{-m} z_m$ через r_m . Из (15) заключаем, что для достаточно больших m $r_m \geq r_{m+1}$, т.е. существует предел $r_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} r_m$. Не теряя в общности, будем считать, что $r_0 < 1$.

ЛЕММА 2. Если относительно области D выполнено условие (4), то для достаточно больших m

$$p^+(B_m^+) \leq C_1(\alpha, s^+, \beta^+, n)(z_m)^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_m}\right)^{n-s^+}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы ограничимся рассмотрением случая $r_0 = 0$. При $r_0 > 0$ доказательство проводится по аналогичной схеме. Для натурального m обозначим через T_m пересечение $B_m^+ \cap \{(x, t): -z_m \leq t \leq -z_{m+1}\}$. Пусть $\tau \in [-z_m, z_{m+1}]$. Обозначим через $h_m(\tau)$ длину отрезка, параллельного оси t , соединяющего точку лежащей в гиперплоскости $t = \tau$ сферы

$$|y| = \sqrt{2M_1(-\tau) \ln \frac{e^{-m}}{-\tau}}$$

с соответствующей точкой поверхности уровня $G^+(-x, -t) = e^{(m+1)s^+}$.

Имеем

$$\sqrt{2M_1(-\tau) \ln \frac{e^{-m}}{-\tau}} = \sqrt{2M_1(-\tau + h_m(\tau)) \ln \frac{e^{-m-1}}{-\tau + h_m(\tau)}}.$$

Обозначая $h_m(\tau)/|\tau|$ через $v_m(\tau)$, из предыдущего равенства получаем

$$\begin{aligned} v_m(\tau) &= \frac{1}{\ln(e^{-m}/(-\tau))} (1 + v_m(\tau) + v_m(\tau) \ln(1 + v_m(\tau)) + \ln(1 + v_m(\tau))) \\ &\leq \frac{2 + 2 \ln 2 + \ln 2}{\ln(e^{-m}/z_m)} \leq \frac{5}{\ln(1/r_m)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$h_m(\tau) \leq \frac{5}{\ln(1/r_m)}. \quad (17)$$

С другой стороны,

$$\sqrt{2M_1 z_m \ln \frac{e^{-m}}{z_m}} - \sqrt{2M_1 z_m \ln \frac{e^{-m-1}}{z_m}} \leq \sqrt{2M_1 \frac{z_m}{\ln(1/r_m)}}. \quad (18)$$

Поэтому если

$$C_2 = \max\{\sqrt{5}, \sqrt{2M_1}\}, \quad \rho_m = C_2 \sqrt{\frac{z_m}{\ln(1/r_m)}},$$

то из (17) и (18) заключаем, что T_m можно покрыть $C_3(\alpha, s^+, \beta^+, n) \cdot [\ln(1/r_m)]^n$ числом цилиндров вида $C_{x^1, \rho_m}^{t^1 - \rho_m^2, t^1}$. Согласно [1]

$$p^+(C_{x^1, \rho_m}^{t^1 - \rho_m^2, t^1}) = C_4(C_2, s^+, \beta^+, n) \cdot \rho_m^{2s^+}. \quad (19)$$

Из полуаддитивности G^+ -емкости и (19) получаем

$$p^+(T_m) \leq C_5(\alpha, s^+, \beta^+, n) \cdot (z_m)^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_m} \right)^{n-s^+}.$$

Совершенно аналогично можно показать, что если для фиксированного m и любого целого неотрицательного i $T_{m,i} = B_m^+ \cap \{(x, t) : -z_{m+i} \leq t \leq -z_{m+i+1}\}$, то

$$p^+(T_{m,i}) \leq C_5(z_{m+i})^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_{m+i}} \right)^{n-s^+}.$$

Поэтому

$$p^+(B_m^+) \leq \sum_{i=0}^{\infty} p^+(T_{m,i}) \leq C_5(z_m)^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_m} \right)^{n-s^+} \sum_{i=0}^{\infty} a_{m,i}, \quad (20)$$

где

$$a_{m,i} = \left(\frac{z_{m+i}}{z_m} \right)^{s^+} \left(\frac{\ln(1/r_{m+i})}{\ln(1/r_m)} \right)^{n-s^+}.$$

Так как последовательность $\{1/r_m\}$ не убывает, то при $s^+ \geq n$

$$\frac{a_{m,i+1}}{a_{m,i}} \leq e^{-s^+},$$

поэтому

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{m,i} \leq \frac{a_{m,0}}{1 - e^{-s^+}} = \frac{1}{1 - e^{-s^+}}. \quad (21)$$

Пусть $s^+ < n$. Согласно (15) имеем

$$\ln \frac{1}{r_{m+i+1}} \leq \ln \frac{1}{r_{m+i}} + d - 1,$$

что при достаточно больших m и предположении $r_0 = 0$ влечет за собой оценку

$$\left(\frac{\ln(1/r_{m+i+1})}{\ln(1/r_{m+i})} \right)^{n-s^+} \leq (1 + \varepsilon_0)^{n-s^+},$$

где $\varepsilon_0 = \exp(s^+/(2(n - s^+))) - 1$. Тогда

$$\frac{a_{m,i+1}}{a_{m,i}} \leq e^{-s^+/2}$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{m,i} \leq \frac{1}{1 - e^{-s^+/2}}. \quad (22)$$

Теперь из (20)–(22) вытекает требуемая оценка (16) с $C_1 = C_5/(1 - e^{-s^+/2})$. Лемма доказана.

Пусть для натурального m $H_m = B_m^+ \cap \{(x, t) : t \leq -z_{m+2}\}$.

ЛЕММА 3. *Если относительно области D выполнено условие (4), то для достаточно больших m*

$$p^+(H_m) \geq C_6(\alpha, s^+, \beta^+, n)(z_m)^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_m} \right)^{n-s^+}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и в предыдущей лемме, ограничимся случаем $r_0 = 0$. Пусть для натурального m

$$\theta_m = \sqrt{2M_1 z_{m+2} \ln \frac{e^{-m}}{z_{m+2}}} - \sqrt{2M_1 z_{m+2} \ln \frac{e^{-m-1}}{z_{m+2}}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\sqrt{\frac{M_1}{2} \frac{z_{m+2}}{\ln(e^{-m}/z_{m+2})}} \leq \theta_m \leq \sqrt{2M_1 \frac{z_{m+2}}{\ln(e^{-m}/z_{m+2})}}. \quad (24)$$

Обозначим через H_m^1 множество

$$\left\{ (x, t) : \sqrt{2M_1(-t) \ln \frac{e^{-m}}{-t}} - \theta_m \leq |x| \leq \sqrt{2M_1(-t) \ln \frac{e^{-m}}{-t}} \right\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Так как $H_m^1 \subset H_m$, то

$$p^+(H_m) \geq p^+(H_m^1). \quad (25)$$

Пусть далее для натурального m

$$S_m = \left\{ (y, \tau) : |y| = \sqrt{2M_1(-\tau) \ln \frac{e^{-m}}{-\tau}} - \frac{\theta}{2}, \quad -z_{m+1} + \theta_m^2 \leq \tau \leq -z_{m+2} - \theta_m^2 \right\}.$$

В силу нашего предположения относительно r_0 и (24)

$$\frac{z_{m+1} - z_{m+2}}{\theta_m^2} \rightarrow \infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

поэтому $S_m \subset H_m^1$. Зафиксируем точку (x, t) на боковой поверхности H_m^1 и обозначим через S_m^1 ту часть S_m , из которой удалены точки (y, τ) , где $0 < t - \tau < \theta_m^2/(4M_1)$. Если $I_1 = \int_{S_m^1} G^+(x - y, t - \tau) dS_{(y, \tau)}$, то, очевидно, $I_1 = 0$ при $t \leq -z_{m+1} + \theta_m^2$. Пусть $t > -z_{m+1} + \theta_m^2$. Перейдем от интегрирования по поверхности S_m^1 к интегрированию по ее проекции S_m^2 на гиперплоскость $\tau = -z_{m+1} + \theta_m^2$. Обозначая через (x', t') и (v, η) образы точек (x, t) и (y, τ) соответственно, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= (t' - \eta)^{-s^+} \int_{S_m^2} \exp\left(-\frac{|x' - v|^2}{4\beta^+(t' - \eta)}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v_n}\right)^2} dv \\ &= (t' - \eta)^{-s^+} \int_{S_m^2} \exp\left(-\frac{|x' - v|^2}{4\beta^+(t' - \eta)}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial |v|}\right)^2} dv. \end{aligned} \quad (26)$$

Но, с другой стороны, из равенства $r_0 = 0$ следует, что

$$\frac{\partial \eta}{\partial |v|} = \left(\frac{\partial |v|}{\partial \eta}\right)^{-1} \leq \sqrt{\frac{2}{M_1} \frac{|\eta| \ln(e^{-m}/(-\eta))}{(\ln(e^{-m}/(-\eta)) - 1)^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{M_1}},$$

если только m достаточно велико. Используя эту оценку и тот факт, что $s^+ \geq n/2$, из (26) заключаем, что

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_7(M_1, n)(t' - \eta)^{-s^+} \int_{S_m^2} \exp\left(-\frac{|x' - v|^2}{4\beta^+(t' - \eta)}\right) dv \\ &\leq C_8(M_1, n)\theta_m^{-2s^+ + n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right)^n = C_9(M_1, n)\theta_m^{-2s^+ + n}. \end{aligned} \quad (27)$$

Пусть теперь $S_m^3 = S_m \setminus S_m^1$, $(y, \tau) \in S_m^3$. Покажем, что если точка (x, t) расположена на боковой поверхности H_m^1 и $0 < t - \tau < \theta_m^2/(4M_1)$, то для достаточно больших m

$$|x - y| \geq \frac{\theta_m}{4}. \quad (28)$$

Действительно, пусть, например, точка (x, t) расположена на поверхности

$$|x| = \sqrt{2M_1(-t) \ln \frac{e^{-m}}{-t}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |x - y| &\geq |x| - |y| = \sqrt{2M_1(-t) \ln \frac{e^{-m}}{-t}} - \sqrt{2M_1(-\tau) \ln \frac{e^{-m}}{-\tau}} + \frac{\theta_m}{2} \\ &\geq \frac{\theta_m}{2} - \sqrt{\frac{M_1}{2} \frac{|\ln(e^{-m}/(-\xi)) - 1|}{\sqrt{-\xi \ln(e^{-m}/(-\xi))}}}(t - \tau), \end{aligned}$$

где $\tau < \xi < t$. Теперь, учитывая (24) и то, что $r_0 = 0$, для достаточно больших m получаем

$$|x - y| \geq \frac{\theta_m}{2} - \sqrt{\frac{M_1}{2} \frac{\ln(e^{-m}/z_{m+2})}{z_{m+2}}}(t - \tau) \geq \frac{\theta_m}{2} - \frac{M_1}{\theta_m}(t - \tau) \geq \frac{\theta_m}{4}.$$

Аналогично доказывается неравенство (28), если точка (x, t) расположена на поверхности $|x| = \sqrt{2M_1(-t) \ln(e^{-m}/(-t))} - \theta_m$. Имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{S_m^3} G^+(x - y, t - \tau) dS_{(y, \tau)} \\ &\leq 4^{2s^+} \theta_m^{-2s^+} \int_{S_m^3} \left(\frac{|x - y|^2}{t - \tau} \right)^{s^+} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4\beta^+(t - \tau)}\right) dS_{(y, \tau)}. \end{aligned}$$

Переходя теперь к интегрированию по проекции S_m^3 на гиперплоскость $t = -z_{m+1} + \theta_m^2$ и учитывая, что

$$\int_{\mathbb{R}_{n+1} \times \{t = -z_{m+1} + \theta_m^2\}} |w|^{2s^+} \exp\left(-\frac{|w|^2}{4\beta^+}\right) dw < \infty,$$

получаем

$$I_2 \leq C_{10}(s^+, \beta^+, n) \theta_m^{-2s^+ + n}. \quad (29)$$

Используя те же соображения, что и при оценке интеграла I_1 , заключаем, что

$$I = \int_{S_m} G^+(x - y, t - \tau) dS_{(y, \tau)} \leq C_9 \theta_m^{-2s^+ + n} \quad (30)$$

для $(x, t) \in \gamma(H_m^1)$. Из (27), (29) и (30) следует, что для $(x, t) \in \partial H_m^1$

$$I \leq (C_9 + C_{10}) \theta_m^{-2s^+ + n}.$$

Поэтому, учитывая (24) и (15), для достаточно больших m получаем

$$\begin{aligned} p^+(H_m^1) &\geq \frac{\theta_m^{2s^+ - n}}{C_9 + C_{10}} \int_{S_m} dS_{(y, \tau)} \geq \frac{C_{11}(\alpha, M_1, n)}{C_9 + C_{10}} \theta_m^{2s^+ - n} \left(z_{m+2} \ln \frac{e^{-m}}{z_{m+2}} \right)^{n/2} \\ &\geq C_{12}(\alpha, s^+, \beta^+, n) (z_{m+2})^{s^+} \left(\ln \frac{e^{-m}}{z_{m+2}} \right)^{n - s^+} \\ &\geq C_{12} e^{-2ds^+} 2^{-|n - s^+|} (z_m)^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_m} \right)^{n - s^+}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и (25) вытекает требуемая оценка (23) с $C_6 = C_{12} e^{-2ds^+} \times 2^{-|n - s^+|}$. Лемма доказана.

3. Теорема о возрастании положительных решений.

ТЕОРЕМА 2. Если относительно области D выполнены предположения (4) и (5), то из условия

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{ms^+} p^+(B_m^+) = \infty \quad (31)$$

следует, что

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{\ln \ln m} e^{ms^+} p^+(B_m^+) = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие (31). Из лемм 2 и 3 заключаем, что (31) эквивалентно условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} (r_m)^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_m} \right)^{n-s^+} = \infty. \quad (32)$$

Рассмотрим случай, когда константа J в (5) равна $4\lambda_1$, и предположим вначале, что $s^+ \leq n+1$. Считая $b < e^{-1}$, из (5) для $z \in (0, b)$ находим

$$\alpha(z) \leq \alpha(b) + 4\lambda_1 \ln \ln \frac{1}{z} + \int_0^b \sigma(t) dt,$$

откуда следует, что

$$r_m = \exp\left(-\frac{\alpha(z_m)}{2M_1}\right) \geq C_{13}(\alpha, M_1) \left(\ln \frac{1}{z_m}\right)^{-2\lambda_1/M_1}.$$

Но так как $z_m \geq e^{-\gamma_1 m}$, то

$$(r_m)^{s^+} \geq C_{14}(\alpha, M_1, s^+) m^{-(2\lambda_1/M_1)s^+} = C_{14} m^{-1}. \quad (33)$$

Если $s^+ \leq n$, то из (33) вытекает расходимость ряда

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{\ln \ln m} (r_m)^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_m} \right)^{n-s^+},$$

т.е. в этом случае теорема доказана. Пусть $s^+ \in (n, n+1]$. Из (33) следует, что

$$\ln \frac{1}{r_m} \leq C_{15}(\alpha, s^+, \beta^+) \ln m.$$

Поэтому для $m \geq 3$

$$(r_m)^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_m} \right)^{n-s^+} \geq \frac{C_{14}(C_{15})^{n-s^+}}{m(\ln m)^{s^+-n}} \geq \frac{C_{14}(C_{15})^{n-s^+}}{m \ln m},$$

и теорема доказана. Рассмотрим теперь случай, когда $s^+ > n+1$. Из (5) для $z \in (0, b)$ имеем

$$\alpha(z) \geq 4\lambda_1 \ln \ln \frac{1}{z} - 4\lambda_1 \ln \ln \frac{1}{b} - \int_0^b \sigma(t) dt.$$

Таким образом,

$$r_m \leq \exp\left(-\frac{1}{2M_1}\left(4\lambda_1 \ln \ln \frac{1}{z} - C_{16}(\alpha, \lambda_1)\right)\right) = C_{17}(\alpha, \lambda_1, M_1) \left(\ln \frac{1}{z_m}\right)^{-2\lambda_1/M_1}.$$

Учитывая, что $z_m \leq e^{-m}$, получаем

$$(r_m)^{s^+} \leq C_{18}(\alpha, s^+, \lambda_1, M_1) m^{-1}.$$

С другой стороны,

$$\left(\ln \frac{1}{r_m}\right)^{n-s^+} \leq \frac{C_{19}(\alpha, s^+, \beta^+, n)}{(\ln m)^{s^+-n}},$$

т.е.

$$(r_m)^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_m}\right)^{n-s^+} \leq \frac{C_{18}C_{19}}{m(\ln m)^{s^+-n}},$$

и условие (32) не может быть выполнено, так как $s^+ - n > 1$. Аналогично рассматривается случай $J < 4\lambda_1$. Пусть теперь $J > 4\lambda_1$. Тогда существуют константы $K' > K'' > 4\lambda_1$ такие, что для достаточно малых z

$$|\alpha'(z)| \geq \frac{K'}{z \ln(1/z)} \quad \text{и} \quad \alpha(z) \geq K'' \ln \ln \frac{1}{z}.$$

Отсюда получаем

$$r_m \leq \exp\left(-\frac{K''}{2M_1} \ln \ln \frac{1}{z_m}\right) = \left(\ln \frac{1}{z_m}\right)^{-K''/(2M_1)} \leq m^{-K''/(2M_1)}.$$

Поэтому

$$(r_m)^{s^+} \leq m^{-K''/(4\lambda_1)}$$

и при $s^+ \geq n$ условие (32) не может быть выполнено. Если же $s^+ > n$, то в силу неубывания при достаточно малых z функции $z^{s^+}(\ln(1/z))^{n-s^+}$ имеем

$$(r_m)^{s^+} \left(\ln \frac{1}{r_m}\right)^{n-s^+} \leq \left(\frac{K''}{2M_1}\right)^{n-s^+} m^{-K''/(4\lambda_1)} (\ln m)^{n-s^+}.$$

Так как $K'' > 4\lambda_1$, то вновь условие (32) не выполняется. Теорема доказана.

Обозначим для натурального m $D \cap \{(x, t) : -z_m < t < 0\}$ и $\partial D \cap \{(x, t) : -z_m < t < 0\}$ через D_m и Γ_m соответственно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u(x, t)$ – положительная L -субпараболическая в D_m функция, непрерывная в $\bar{D}_m$ и обращающаяся в нуль на Γ_m . Тогда при выполнении условий (2)–(5) и (31) существуют положительные константы K_1 и γ , зависящие лишь от M_1 , $\lambda_1 n$ и функции $\alpha(z)$, такие, что если m достаточно велико и натуральное число $k(m)$ не меньше $K_1 \ln \ln m$, то

$$\sup_{D_m} u \geq (1 + \eta e^{ms^+} p^+(B_m^+)) \sup_{D_m + k(m)} u. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_m имеет тот же смысл, что и раньше, а (s^+, β^+) -допустимая мера ν_m на H_m такова, что

$$\nu_m(H_m) \geq \frac{1}{2} p^+(H_m). \quad (35)$$

Обозначим $\sup_{D_m}$ через M_m , и пусть $F_m(x, t) = M_m(1 - W_m(x, t))$, где

$$W_m(x, t) = \int_{H_m} G^+(x - y, t - \tau) d\nu_m(y, \tau).$$

Ясно, что $F_m \geq 0$ на Γ_m , а на $N_m = \partial D_m \cap \{(x, t): t = -z_m\}$ функция W_m обращается в нуль, т.е. там $F_m = M_m$. По принципу максимума $u(x, t) \leq F_m(x, t)$ в D_m и, в частности,

$$M_{m+k(m)} \leq \sup_{D_{m+k(m)}} F_m = M_m(1 - \inf_{N_{m+k(m)}} W_m). \quad (36)$$

Оценим сейчас $\inf_{N_{m+k(m)}} W_m$. Пусть $(x, t) \in N_{m+k(m)}$, $(y, \tau) \in H_m$ и m настолько велико, что $k(m) \geq 3$. Имеем

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\beta^+(-z_{m+k(m)}-\tau)}\right) \\ & \geq \exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta^+(-z_{m+k(m)}-\tau)}\right) \cdot \left(\exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta^+(-z_{m+k(m)}-\tau)}\right)\right)^{(|x|+|y|)^2/|y|^2-1} \\ & \geq \exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta^+(-z_{m+k(m)}-\tau)}\right) \cdot \left(\exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta^+(-z_{m+k(m)}-\tau)}\right)\right)^{3|x|/|y|} \\ & = \exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta^+(-z_{m+k(m)}-\tau)}\right) \cdot J_m^1. \end{aligned} \quad (37)$$

С другой стороны, для достаточно больших m

$$\begin{aligned} 3\frac{|x|}{|y|} & \leq 3\sqrt{\frac{z_{m+k(m)} \ln(1/r_{m+k(m)})}{z_{m+1} \ln(1/r_{m+1})}} = 3b_m, \\ \exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta^+(-z_{m+k(m)}-\tau)}\right) & \geq \left(\exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta^+(-\tau)}\right)\right)^{z_m/(z_m-z_{m+k(m)})} \\ & \geq (e^{ms^+}(z_{m+2})^{s^+})^2 \geq C_{20}(\alpha, s^+)(e^{ms^+}(z_m)^{s^+})^2. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая, что $b_m \leq C_{21}(\alpha, n)$, получаем

$$\begin{aligned} J_m^1 & \geq C_{22}(\alpha, s^+, n)(e^{ms^+}(z_m)^{s^+})^{6b_m}, \quad \text{т.е.} \\ \ln \frac{C_{22}}{J_m^1} & \leq 6s^+ b_m \ln \frac{1}{r_m} \leq C_{23}(\alpha, s^+) \sqrt{\frac{z_{m+k(m)}}{z_m} \ln \frac{1}{r_{m+k(m)}} \ln \frac{1}{r_m}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Используя (13), имеем

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{r_{m+k(m)}} & = \ln \frac{1}{r_m} + \ln \left(\exp \left(\frac{1}{2M_1} (\alpha(z_{m+k(m)}) - \alpha(z_m)) \right) \right) \\ & \leq \ln \frac{1}{r_m} + \frac{K}{2M_1} \ln \frac{z_m}{z_{m+k(m)}} \leq \ln \frac{1}{r_m} + \left(\frac{z_m}{z_{m+k(m)}} \right)^{K/(2M_1)}. \end{aligned}$$

Так как $a_1 + a_2 \leq 2a_1a_2$ при $a_1 \geq 1, a_2 \geq 1$, то

$$\ln \frac{1}{r_{m+k(m)}} \leq 2 \left(\frac{z_m}{z_{m+k(m)}} \right)^{K/(2M_1)} \ln \frac{1}{r_m}.$$

Обозначая $\frac{1}{2}(1 - K/(2M_1))$ через $\delta > 0$, из последней оценки и (38) получаем

$$\ln \frac{C_{22}}{J_m^1} \leq 2C_{23} \left(\frac{z_m}{z_{m+k(m)}} \right)^\delta \ln \frac{1}{r_m} \leq 2C_{23} \exp[-\delta k(m)] \ln \frac{1}{r_m}. \quad (39)$$

Имеем далее

$$\ln \frac{1}{r_m} = \frac{\alpha(z_m)}{2M_1} \leq \frac{\alpha(e^{-m})}{2M_1} + \frac{K}{2M_1} \ln \frac{1}{r_m},$$

т.е.

$$\ln \frac{1}{r_m} \leq \frac{1}{4M_1\delta} \alpha(e^{-m}). \quad (40)$$

Как видно из доказательства предыдущей теоремы, условие (31) не может выполняться, если $J > 4\lambda_1$. Таким образом, для достаточно малых z $\alpha(z) \leq 5\lambda_1 \ln \ln(1/z)$ и поэтому

$$\alpha(e^{-m}) \leq 5\lambda_1 \ln m. \quad (41)$$

Положим $K_1 = 1/\delta$. Учитывая теперь (40), (41) и условие $k(m) \geq K_1 \ln \ln m$, из (39) получаем

$$\ln \frac{C_{22}}{J_m^1} \leq \frac{3C_{23}}{M_1\delta} (\ln m)^{1-\delta K_1} \leq \frac{3C_{23}}{M_1\delta}.$$

Таким образом,

$$J_M^1 \geq C_{22} \exp\left(-\frac{3C_{23}}{M_1\delta}\right) = C_{24},$$

что вместе с (37) влечет за собой

$$W_m(x, t) \geq C_{24} W_m(0, -z_{m+k(m)}), \quad (x, t) \in N_{m+k(m)}. \quad (42)$$

Имеем далее для $(y, \tau) \in H_m$

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta+(-z_{m+k(m)}-\tau)}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta+(-\tau)}\right) \left(\exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta+(-\tau)}\right)\right)^{z_{m+k(m)}/(-z_{m+k(m)}-\tau)} \\ &= \exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta+(-\tau)}\right) J_m^2. \end{aligned} \quad (43)$$

С другой стороны, для достаточно больших m

$$\begin{aligned} J_m^2 &\geq \left(\exp\left(-\frac{|y|^2}{4\beta+(-\tau)}\right)\right)^{2z_{m+k(m)}/z_m} \\ &\geq \left(\exp\left(-s + \ln \frac{e^{-m}}{z_{m+2}}\right)\right)^{2z_{m+k(m)}/(2z_m)} \geq \left(\exp\left(-2s + \ln \frac{1}{r_m}\right)\right)^{2z_{m+k(m)}/(2z_m)}, \end{aligned}$$

т.е. с учетом (40) и (41)

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{J_m^2} &\leq 4s^+ \frac{z_{m+k(m)}}{z_m} \ln \frac{1}{r_m} \leq \frac{s^+}{M_1 \delta} \exp[-k(m)] \alpha(e^{-m}) \\ &\leq \frac{5\lambda_1 s^+}{M_1 \delta} (\ln m)^{1-K_1} \leq \frac{5\lambda_1 s^+}{M_1 \delta}, \end{aligned}$$

так как $K_1 = 1/\delta > 1$. Таким образом,

$$J_m^2 \geq \exp\left(-\frac{5\lambda_1 s^+}{M_1 \delta}\right) = C_{25};$$

поэтому, используя (42), (43), (35), (23) и (16), заключаем, что

$$\begin{aligned} \inf_{N_{m+k(m)}} W_m(x, t) &\geq C_{24} C_{25} W_m(0, 0) \geq C_{24} C_{25} e^{ms^+} \nu_m(H_m) \\ &\geq \frac{C_{24} C_{25}}{2} e^{ms^+} p^+(H_m) \geq \frac{C_{24} C_{25} C_6}{2C_1} e^{ms^+} p^+(B_m^+). \end{aligned} \quad (44)$$

Полагая теперь $\eta = C_{24} C_{25} C_6 / (2C_1)$, из (36) и (44) получаем требуемую оценку (34). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть для натурального $i \geq 3$ $m_i = [4K_1 i \ln \ln i] + 1$. Тогда если $u(x, t)$ – положительная L -субпараболическая в D_{m_i} функция, непрерывная в D_{m_i} и обращающаяся в нуль на m_i , то для достаточно больших i при выполнении условий (2)–(5) и (31)

$$\sup_{D_{m_i}} u \geq (1 + \eta e^{m_i s^+} p^+(B_{m_i}^+)) \sup_{D_{m_{i+1}}} u.$$

Для доказательства достаточно заметить, что при достаточно больших i

$$m_{i+1} - m_i \geq K_1 \ln \ln m_i.$$

4. Достаточное условие регулярности.

ТЕОРЕМА 4. Если относительно коэффициентов оператора L и области D справедливы предположения (2)–(5), то для регулярности точки $(0, 0)$ относительно первой краевой задачи достаточно, чтобы выполнялось условие (31).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что если

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{\ln \ln m} e^{ms^+} p^+(B_m^+) = \infty, \quad (45)$$

то

$$\sum_{i=3}^{\infty} e^{m_i s^+} p^+(B_{m_i}^+) = \infty. \quad (46)$$

Так как для любой непрерывной и монотонно убывающей на $[1, \infty)$ положительной функции $\varphi(z)$, стремящейся к нулю при $z \rightarrow \infty$, при всяком натуральном $i > 1$

$$\sum_{k=2}^i \varphi(k) \leq \int_1^i \varphi(z) dz \leq \sum_{k=1}^{i-1} \varphi(k),$$

то для достаточно больших натуральных q

$$\sum_{i=3}^q e^{m_i s^+} p^+(B_{m_i}^+) \geq C_{26}(\alpha, s^+, n) \int_3^{q+1} e^{m(t) s^+} p^+(B_{\{m(t)\}}^+) dt. \quad (47)$$

Здесь $m(t) = 4K_1 t \ln \ln t$, $B_{\{z\}}^+ = \{(x, t): e^{zs^+} \leq G^+(-x, -t) \leq e^{(z+1)s^+}\} \setminus D$. Но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_3^{q+1} e^{m(t) s^+} p^+(B_{\{m(t)\}}^+) dt &\geq \frac{1}{8K_1} \int_{12K_1 \ln \ln 3}^{4K_1(q+1) \ln \ln(q+1)} e^{zs^+} p^+(B_{\{z\}}^+) \frac{dz}{\ln \ln z} \\ &\geq \frac{1}{8K_1} \sum_{m=[12K_1 \ln \ln 3]+2}^{[4K_1 q \ln \ln q]} \frac{1}{\ln \ln m} e^{ms^+} p^+(B_m^+). \end{aligned} \quad (48)$$

Теперь из (47), (48) видно, что выполнение условия (45) влечет за собой справедливость (46). Отсюда, используя теорему 2, заключаем, что при выполнении условия (31) верно (46). Для доказательства регулярности точки $(0, 0)$ достаточно показать следующее: для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что какова бы ни была L -субпараболическая в D функция $u(x, t) \leq 1$, обращающаяся в нуль на $\partial D \cap \{(x, t) : -\varepsilon_1 < t < 0\}$, для $(x, t) \in D \cap \{(x, t) : -\delta < t < 0\}$ выполнено неравенство $u(x, t) < \varepsilon_2$ (см. [1]). Пусть числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и функция $u(x, t)$ уже заданы. Обозначим через $j \geq 3$ наименьшее натуральное число, для которого $z_{m_j} < \varepsilon_1$, и пусть натуральное число $k > j+1$ таково, что в D_{m_k} найдется точка (x^0, t^0) , в которой

$$u(x^0, t^0) \geq \varepsilon_2. \quad (49)$$

Применяя последовательно следствие из теоремы 3 и используя (49), получаем

$$1 \geq M_{m_j} \geq \prod_{i=j}^{k-1} (1 + \eta e^{m_i s^+} p^+(B_{m_i}^+)) \cdot \varepsilon_2,$$

т.е.

$$\sum_{i=j}^{k-1} \ln(1 + \eta e^{m_i s^+} p^+(B_{m_i}^+)) \leq \ln \frac{1}{\varepsilon_2}. \quad (50)$$

Но для всякого натурального m $B_m^+ \subset A_m^+ \subset C_{0, \sqrt{2M_1}/e}^{-e^{-m}, 0}$, поэтому

$$p^+(B_m) \leq C_{26}(s^+, \beta^+, n) e^{ms^+}.$$

Пусть

$$C_{27} = \inf_{t \in (0, C_{26}]} \frac{\ln(1 + \eta t)}{t}.$$

Из (50) имеем

$$\sum_{i=j}^{k-1} e^{m_i s^+} p^+(B_{m_i}^+) \leq \frac{1}{C_{27}} \ln \frac{1}{\varepsilon_2}.$$

В силу условия (46) последнее неравенство может выполняться лишь при $k \leq l(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha, s^+, \beta^+, n)$. Теперь достаточно выбрать $\delta = z_{m_l+1}$ и теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если L – оператор теплопроводности $\Delta - \partial/\partial t$, то $s^+ = s^- = n/2$, $\beta^+ = \beta^- = 1$, $B_m^+ = B_m^- = B_m$, и для регулярности точки $(0, 0)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{mn/2} p(B_m) = \infty.$$

Последнее условие представляет собой критерий регулярности граничной точки для уравнения теплопроводности, полученный Эвансом и Гариши в [14].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.
- [2] Wiener N. The Dirichlet problem // J. Math. Phys. 1924. № 3. P. 127–146.
- [3] Petrowsky I. G. Zur ersten Randwertaufgabe de Wärmeleitungsgleichung // Comp. Math. 1935. № 1. P. 383–419.
- [4] Ландис Е. М. Необходимое и достаточное условие регулярности граничной точки для задачи Дирихле для уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 3. С. 517–520.
- [5] Ландис Е. М. О регулярности граничной точки для уравнения теплопроводности // Качественная теория краевых задач математической физики. Баку: Элм, 1991. С. 69–96.
- [6] Новрузов А. А. О некоторых критериях регулярности граничных точек для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 4. С. 785–787.
- [7] Ибрагимов А. И. О некоторых качественных свойствах решений уравнений параболического типа второго порядка с непрерывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 2. С. 306–319.
- [8] Мамедов И. Т. О регулярности граничных точек для линейных и квазилинейных уравнений параболического типа // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. № 3. С. 559–561.
- [9] Мамедов И. Т. О регулярности граничных точек для линейных уравнений параболического типа // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 5. С. 717–723.
- [10] Effros E. G., Kazdan J. L. On the Dirichlet problem for the heat equation // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 20. P. 683–694.
- [11] Lanconelli E. Sul problema di Dirichlet per l'equazione del calore // Ann. Math. Pura Appl. 1973. V. 97. P. 83–114.
- [12] Михайлова Н. А. О поведении на границе решений параболических уравнений 2-го порядка с непрерывными коэффициентами // Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 6. С. 816–831.
- [13] Мамедов И. Т. Оценка модуля непрерывности решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в граничной точке // Тр. ИММ АН Азерб. 1996. Т. 5(13). С. 30–50.
- [14] Evans L. C., Gariepy R. F. Wiener's criterion for the heat equation // Arch. Rath. Mech. Ann. 1992. V. 78. № 4. P. 293–314.
- [15] Mamedov I. T. Some notions on parabolic potentials and capacities // Trans. Acad. Sci. Azerb. 1998. V. 18. № 3–4. P. 115–127.