Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Панкрашкин, Локальность квадратичных форм для
точечных возмущений операторов Шредингера, *Матем.
заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 425–433

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm754>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:35:16

УДК 517.9

ЛОКАЛЬНОСТЬ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ДЛЯ ТОЧЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА

К. В. Панкрашкин

В работе изучаются точечные возмущения операторов Шредингера в контексте теории самосопряженных расширений Крейна. Доказан критерий локальности квадратичной формы для таких возмущений.

Библиография: 16 названий.

Введение. *Точечными возмущениями* принято называть операторы, формально имеющие вид

$$H = H^0 + \sum_{\mathbf{a} \in A} \lambda^{\mathbf{a}} \delta(\cdot - \mathbf{a}), \quad (1)$$

где H^0 – самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^{\nu})$, A – дискретное подмножество $\mathbb{R}^{\nu}$, δ – дельта-функция Дирака. Строгий математический смысл выражению (1) можно придать с использованием теории самосопряженных расширений, при этом возникает и соответствующая параметризация точечных возмущений [1], [2]. Однако семейство возникающих при этом операторов довольно обширно и включает в себя операторы с весьма экзотическими свойствами. Пусть, например, H^0 – оператор Ландау (в частности, оператор Лапласа). Возмущения такого H^0 регулярными периодическими потенциалами в так называемом случае рационального потока имеют зонный спектр [3]. Желательно было бы сохранить регулярную структуру спектра и при замене регулярно-го потенциала точечным. Однако дело обстоит иначе, а именно: *существуют периодические точечные возмущения H^0 , имеющие в своем спектре участки с фрактальной структурой* [4], [5]. Тем не менее, появления подобной патологии можно избежать, ограничившись рассмотрением точечных возмущений, обладающих свойством форм-локальности [5]. Напомним, что оператор B в $L^2(X, d\mu)$, имеющий квадратичную форму b с областью определения $\mathbf{D}(b)$, предложено называть *форм-локальным* или *локальным в смысле форм*, если $b(\varphi, \psi) = 0$ для любых φ, ψ из $\mathbf{D}(b)$ таких, что $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi = \emptyset$ (квадратичная форма b при этом называется *локальной*) [6]. Заметим, что обычное определение локальности (оператор B , действующий в $L^2(X, d\mu)$, принято называть *локальным*, если для любой функции φ из его области определения

выполнено $\text{supp } B\varphi \subset \text{supp } \varphi$) не является различающим в данном случае, поскольку все точечные возмущения локального оператора также локальны [1].

Понятие форм-локальности представляет интерес также и с точки зрения подхода к определению точечного возмущения (1) как предела операторов вида

$$H_n = H^0 + \sum_{\mathbf{a} \in A} \lambda_n^{\mathbf{a}} f_n(\cdot - \mathbf{a}), \quad n \rightarrow \infty,$$

при $f_n \rightarrow \delta$. Уже в случае, когда $H^0 = -\Delta$ и множество A конечно, такой подход применим лишь к точечным возмущениям, соответствующим так называемой модели независимых центров [1]. В то же время в [6] замечено, что только такие точечные возмущения и являются локальными в смысле форм.

В настоящей работе решается следующая задача: среди точечных возмущений оператора Шредингера выделить те, которые являются форм-локальными. Основным результатом работы является теорема 2, дающая необходимое и достаточное условие локальности в смысле форм для точечных возмущений двух- и трехмерных операторов Шредингера.

1. Точечные возмущения и формула Крейна. Мы будем использовать следующие обозначения: $\mathbf{D}(B)$, $\mathbf{Q}(B)$, $\rho(B)$, $\sigma(B)$ – область определения, область определения квадратичной формы, резольвентное множество и спектр оператора B соответственно; $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ – пространство ограниченных операторов из $\mathcal{G}$ в $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ – пространство самосопряженных операторов в $\mathcal{G}$. Скалярное произведение будем считать линейным по второму аргументу.

Введем теперь строгое определение точечного возмущения для оператора Шредингера.

Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ – линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^\nu$, $m \leq \nu \leq 3$,

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^m k_i \mathbf{a}_i : k_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

K – произвольное конечное подмножество $\mathbb{R}^\nu$ и $A = \Lambda + K$ (мы не исключаем случай $m = 0$, т.е. $\Lambda = \{0\}$, $A = K$).

Пусть также $\mathbf{A}: \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ – дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $V: \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая полуограниченная снизу функция и, кроме того, $\mathbf{A}$ и V периодичны относительно Λ , т.е. выполнены следующие условия:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{a}_i) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad V(\mathbf{x} + \mathbf{a}_i) \equiv V(\mathbf{x}), \quad i \leq m.$$

Через H^0 обозначим оператор Шредингера с векторным потенциалом магнитного поля $\mathbf{A}$ и электрическим потенциалом V :

$$H^0 = (i\nabla + \mathbf{A})^2 + V. \quad (2)$$

Известно, что выполнены включения [7]

$$\mathbf{D}(H^0) \subset C(\mathbb{R}^\nu), \quad (3a)$$

$$\mathbf{Q}(H^0) \subset H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^\nu). \quad (3b)$$

В силу первого из этих включений корректно определены множество $\mathbf{D}(S)$ и оператор S :

$$\mathbf{D}(S) = \{\varphi \in \mathbf{D}(H^0) : \varphi(\mathbf{a}) = 0 \ \forall \mathbf{a} \in A\}, \quad S = H^0|_{\mathbf{D}(S)}. \quad (4)$$

Точечным возмущением оператора H^0 , сосредоточенным на A , называют любое самосопряженное расширение H оператора S , дизъюнктное с H^0 , т.е. такое, что $\mathbf{D}(H) \cap \mathbf{D}(H^0) = \mathbf{D}(S)$. Удобное описание точечных возмущений дает теория самосопряженных расширений Крейна [8], основные положения которой мы сейчас напомним.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, S – замкнутый симметрический оператор в $\mathcal{H}$ с индексами дефекта (n, n) , $0 < n \leq \infty$, H^0 – фиксированное самосопряженное расширение S . Зафиксируем гильбертово пространство $\mathcal{G}$ такое, что $\dim \mathcal{G} = n$. Отображение $z \mapsto \Gamma_z$ из $\rho(H^0)$ в $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ называется Γ -полем пары (S, H^0) , если выполнены следующие условия:

I) Γ_z – линейно-топологический изоморфизм $\mathcal{G}$ на $\text{Ker}(S^* - z)$;

II) для всех $z, \zeta \in \rho(H^0)$ выполнено равенство $\Gamma_z = (H^0 - \zeta)(H^0 - z)^{-1}\Gamma_\zeta$.

Оператор-функция $Q(z)$ на $\rho(H^0)$ со значениями в $\mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ называется $\mathcal{Q}$ -функцией пары (S, H^0) , если она обладает свойством $Q(\zeta) - Q(z)^* = (\zeta - \bar{z})\Gamma_z^*\Gamma_\zeta$. Функция $Q(z)$ определена с точностью до слагаемого $C \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \cap \mathcal{S}(\mathcal{G})$, выбрав которое можно положить

$$Q(z) = C - i \text{Im } \zeta \Gamma_\zeta^* \Gamma_\zeta + (z - \bar{\zeta})\Gamma_\zeta^* \Gamma_z,$$

где ζ – фиксированный элемент из $\rho(H^0)$.

ТЕОРЕМА 1 (формула Крейна). *Выражение*

$$R(z) = R^0(z) - \Gamma_z(Q(z) - T)^{-1}\Gamma_z^*, \quad (5)$$

где $R^0(z) = (H^0 - z)^{-1}$ – резольвента оператора H^0 , устанавливает взаимно однозначное соответствие между самосопряженными операторами T , действующими в $\mathcal{G}$, и резольвентами $R(z)$ самосопряженных расширений оператора S , дизъюнктными с H^0 .

В дальнейшем оператор, резольвента которого определяется по формуле (5), будем обозначать через H_T^0 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Выражение (1) используется в физической литературе для символического обозначения целых семейств точечных потенциалов. Соответственно $\lambda_{\mathbf{a}}$ в (1), вообще говоря, не дают корректной параметризации. Математически корректная параметризация точечных возмущений дается теоремой 1.

Вернемся к H^0 и S , определенным через (2) и (4). Γ -поле Γ_z и $\mathcal{Q}$ -функция $Q(z)$ для этой пары строятся следующим образом [9]. Пусть $G^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z)$ – функция Грина оператора H^0 , т.е. интегральное ядро резольвенты $R^0(z)$. Известно [7], [10], [11], что $G^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z)$ раздельно непрерывна вне диагонали $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ при $\nu = 2, 3$, непрерывна по совокупности переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ при $\nu = 1$, а также при каждом $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\nu$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} |G^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z)|^2 d\mathbf{y} < \infty. \quad (6)$$

Для каждого $\mathbf{a} \in A$ положим $g_z^{\mathbf{a}} = G^0(\cdot, \mathbf{a}; z)$; в силу (6) все $g_z^{\mathbf{a}}$ лежат в $L^2(\mathbb{R}^\nu)$. Пусть теперь $\mathcal{G} = l^2(A)$. Тогда операторы Γ_z задаются по правилу

$$\Gamma_z \xi = \sum_{\mathbf{a} \in A} \xi_{\mathbf{a}} g_z^{\mathbf{a}}, \quad \xi = (\xi_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in A} \in l^2(A).$$

Функция $Q(z)$ в стандартном базисе $l^2(A)$ задается матрицей

$$Q_{\mathbf{ab}}(z) = G^0(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z) - G^0(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \zeta) + C_{\mathbf{ab}}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A,$$

где $(C_{\mathbf{ab}})$ – матрица ограниченного самосопряженного оператора в $l^2(A)$, ζ – фиксированный элемент из $\rho(H^0)$.

Мы будем использовать так называемую “каноническую” $\mathcal{Q}$ -функцию, матрица которой задана следующим образом [9]:

$$Q_{\mathbf{ab}}(z) = \begin{cases} G^0(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z) & \text{при } \mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \\ G^0(\mathbf{a}, \mathbf{a}; z) - G^0(\mathbf{a}, \mathbf{a}; \zeta) & \text{при } \mathbf{a} = \mathbf{b} \end{cases}$$

при $\nu = 2, 3$ и

$$Q_{\mathbf{ab}}(z) = G^0(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z)$$

при $\nu = 1$.

Для удобства ссылок зафиксируем также следующее известное утверждение.

ЛЕММА 1 [9]. Пусть $z \in \rho(H^0)$, $\mathbf{a} \in A$, $\varphi \in \mathbf{D}(H^0)$. Тогда

$$\langle g_z^{\mathbf{a}} | (H^0 - \bar{z})\varphi \rangle = \varphi(\mathbf{a}). \quad (7)$$

Отсюда следует, что при $z, \zeta \in \rho(H^0)$ выполнено включение $g_z^{\mathbf{a}} - g_\zeta^{\mathbf{a}} \in \mathbf{D}(H^0)$.

2. Локальность квадратичной формы для точечного возмущения в двух- и трехмерном случаях. В этом пункте мы будем рассматривать лишь случай $\nu = 2, 3$. Напомним, что в этом случае функция Грина имеет следующую асимптотику [10]: для любых $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\nu$ и $\delta > 0$ найдутся функция $\omega \in C^2(\mathbb{R}^\nu)$ и число $\alpha \neq 0$ такие, что

$$G^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z) = \begin{cases} \omega(\mathbf{x}) + \alpha \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| & \text{при } \nu = 2, \\ \omega(\mathbf{x}) + \frac{\alpha}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & \text{при } \nu = 3 \end{cases} \quad (8)$$

при $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$.

Прежде чем перейти к предварительным утверждениям, дадим некоторые пояснения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы отождествляем $l^2(A)$ и $L^2(\mathbb{R}^\nu, d\mu)$ с мерой $\mu\Omega = \text{card}\{\Omega \cap A\}$; в частности, для $\xi = (\xi_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in A} \in l^2(A)$ имеем $\text{supp } \xi = \{\mathbf{a} : \xi_{\mathbf{a}} \neq 0\}$.

ЛЕММА 2. Пусть $z \in \rho(H^0)$, $\xi = (\xi_{\mathbf{a}}) \in l^2(A)$, Ω – открытое множество, содержащее множество $\text{supp } \xi$ вместе с некоторой его ε -окрестностью. Тогда найдется функция φ из $\mathbf{D}(H^0)$ такая, что $\text{supp}(\varphi - \Gamma_z \xi) \subset \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\theta = \inf_{\substack{\mathbf{a} \in \text{supp } \xi \\ \mathbf{x} \notin \Omega}} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|;$$

по условию $\theta > 0$. Выберем числа d и D так, что $0 < d < D < \theta$, и функцию $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ такую, что $0 \leq |\phi| \leq 1$, $\phi(\mathbf{x}) = 0$ при $|\mathbf{x}| > D$, $\phi(\mathbf{x}) = 1$ при $|\mathbf{x}| < d$. Обозначим $\psi = 1 - \phi$, $\psi_{\mathbf{a}} = \psi(\cdot - \mathbf{a})$, $\varphi_{\mathbf{a}} = \psi_{\mathbf{a}} g_z^{\mathbf{a}}$. Покажем, что $\varphi_{\mathbf{a}} \in \mathbf{D}(H^0)$.

В смысле обобщенных функций выполнено равенство

$$((i\nabla + \mathbf{A})^2 + V - z)\varphi_{\mathbf{a}} = \psi_{\mathbf{a}}((i\nabla + \mathbf{A})^2 + V - z)g_z^{\mathbf{a}} - g_z^{\mathbf{a}} \Delta \psi_{\mathbf{a}} + 2i\nabla \psi_{\mathbf{a}}(i\nabla + \mathbf{A})g_z^{\mathbf{a}}. \quad (9)$$

Рассмотрим правую часть (9). Первое слагаемое в ней равно нулю в силу равенства (7). Второе слагаемое, очевидно, лежит в $L^2(\mathbb{R}^\nu)$. Принадлежность третьего слагаемого к $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ следует из (8). Таким образом, правая часть (9) является элементом $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, откуда следует $\varphi_{\mathbf{a}} \in \mathbf{D}(H^0)$, причем правая часть (9) есть выражение для $(H^0 - z)\varphi_{\mathbf{a}}$.

В силу Λ -периодичности $\mathbf{A}$ и V функция Грина $G^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; z)$ обладает следующим свойством:

$$G^0(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{a}_i; z) \equiv G^0(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i, \mathbf{y}; z), \quad i \leq m, \quad (10)$$

поэтому существуют постоянные C_1, C_2 такие, что для всех $\mathbf{a} \in A$ выполнено

$$\|g_z^{\mathbf{a}} \Delta \psi_{\mathbf{a}}\| \leq C_1, \quad \|\nabla \psi_{\mathbf{a}}(i\nabla + \mathbf{A})g_z^{\mathbf{a}}\| \leq C_2.$$

Обозначим $\varphi = \sum_{\mathbf{a} \in A} \xi_{\mathbf{a}} \varphi_{\mathbf{a}}$; как легко видеть, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$. Кроме того, семейство $(g_z^{\mathbf{a}} \Delta \psi_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in A}$, как и $(\nabla \psi_{\mathbf{a}}(i\nabla + \mathbf{A})g_z^{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in A}$, образует ортогональную систему, поэтому ряд $\sum_{\mathbf{a} \in A} \xi_{\mathbf{a}}(H^0 - z)\varphi_{\mathbf{a}}$ сходится в $L^2(\mathbb{R}^\nu)$. По теореме о замкнутом графике отсюда следует $\varphi \in \mathbf{D}(H^0)$. В силу построения φ выполнено $\text{supp}(\varphi - \Gamma_z \xi) \subset \Omega$, так что φ – требуемая функция. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Имеет место равенство $\mathbf{Q}(H^0) \cap \Gamma_z l^2(A) = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, напротив, что $\varphi \in \mathbf{Q}(H^0) \cap \Gamma_z l^2(A)$ и $\varphi \neq 0$. Тогда $\varphi = \Gamma_z \xi$, $\xi = (\xi_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in A} \in l^2(A)$ и $\xi_{\mathbf{b}} \neq 0$ при некотором $\mathbf{b} \in A$, и мы можем записать $\xi_{\mathbf{b}} g_z^{\mathbf{b}} = \varphi - \Gamma_z \eta$, где $\eta = (\xi_{\mathbf{a}} - \delta_{\mathbf{a}\mathbf{b}} \xi_{\mathbf{b}})_{\mathbf{a} \in A}$. Воспользовавшись леммой 2, найдем функцию ϕ , совпадающую в некотором шаре Ω , содержащем точку $\mathbf{b}$, с $\Gamma_z \eta$. Кроме того, выберем $\omega \in C^2(\mathbb{R}^\nu)$ и $\alpha \neq 0$ так, что в Ω выполнено равенство (8). Тогда на Ω имеем

$$-\xi_{\mathbf{b}} \omega + \varphi - \phi = \begin{cases} \alpha \xi_{\mathbf{b}} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| & \text{при } \nu = 2, \\ \frac{\alpha \xi_{\mathbf{b}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} & \text{при } \nu = 3. \end{cases}$$

Из (3b) следует, что правая часть последнего равенства лежит в $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$, для левой же части такое включение не выполнено. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь наша цель – построить квадратичную форму для H_T^0 . Обозначим $\mathbf{D} = \mathbf{Q}(H^0) + \Gamma_z l^2(A)$ и введем оператор $P: \mathbf{D} \mapsto l^2(A)$ соотношением $\varphi - \Gamma_z P\varphi \in \mathbf{Q}(H^0)$. Из леммы 1 следует, что $\mathbf{D}$ и P не зависят от выбора $z \in \rho(H^0)$. При построении формы мы ограничимся полуограниченными снизу точечными возмущениями, в связи с чем будем рассматривать лишь те операторы H_T^0 , соответствующие которым операторы T удовлетворяют следующему условию [6], [12], [13]:

$$\text{при некотором } \zeta < \inf \sigma(H^0) \text{ оператор } T - Q(\zeta) \text{ положительно определен.} \quad (11)$$

Обозначим теперь через h_z^0 , t и t_z квадратичные формы для операторов $H^0 - z$, T и $T - Q(z)$ соответственно.

ЛЕММА 4. *При выполнении (11) квадратичная форма h_z^T для оператора $H_T^0 - z$ замкнута на $\mathbf{Q}(H^0) + \Gamma_z \mathbf{Q}(T)$, полуограничена снизу и задается выражением*

$$h_z^T(\varphi, \varphi) = h_z^0(\varphi - \Gamma_z P\varphi, \varphi - \Gamma_z P\varphi) + t_z(P\varphi, P\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из общих результатов [12] и проводится совершенно аналогично [14] (см. также [15]).

ЛЕММА 5. *Для любой функции φ из $\mathbf{Q}(H_T^0)$ выполнено $\text{supp } P\varphi \subset \text{supp } \varphi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, $\varphi \in \mathbf{Q}(H_T^0)$, $\xi = P\varphi$ и $\varphi = 0$ в окрестности $\mathbf{b} \in A$, но $\xi_{\mathbf{b}} \neq 0$. Воспользуемся леммой 2 и найдем функцию $\phi \in \mathbf{D}(H^0)$ такую, что $\phi = \Gamma_z \xi - \xi_{\mathbf{b}} g_z^{\mathbf{b}}$ в некотором шаре Ω , содержащем точку $\mathbf{b}$. Тогда в Ω должно быть выполнено равенство $\phi = -\xi_{\mathbf{b}} g_z^{\mathbf{b}}$. Однако в силу (8) и (3b) это равенство не может быть выполнено.

ЛЕММА 6. *Пусть $\varphi, \psi \in \mathbf{Q}(H_T^0)$ и $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi = \emptyset$. Тогда выполнено равенство*

$$h_z^0(\varphi - \Gamma_z P\varphi, \psi - \Gamma_z P\psi) = \langle P\varphi | Q(z) P\psi \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО во многом следует [6]. Обозначим $\varphi^0 = \varphi - \Gamma_z P\varphi$, $\psi^0 = \psi - \Gamma_z P\psi$. Из лемм 1 и 5 следует, что для обобщенной функции $(H^0 - z)\varphi^0$ выполнено включение

$$\text{supp}(H^0 - z)\varphi^0 \subset \text{supp } \varphi.$$

Кроме того, на $\text{supp } \varphi$ выполнено $\psi^0 = -\Gamma_z P\psi$, поэтому

$$h_z^0(\varphi^0, \psi^0) = \langle (H^0 - z)\varphi^0 | \psi^0 \rangle = -\langle (H^0 - z)\varphi^0 | \Gamma_z P\psi \rangle = -\sum_{\mathbf{a} \in A} (P\psi)_{\mathbf{a}} \overline{\varphi^0(\mathbf{a})}. \quad (12)$$

Теперь заметим, что

$$\varphi(\mathbf{x}) = - \sum_{\mathbf{a} \in A} (P\varphi)_{\mathbf{a}} g_z^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{x} \notin \text{supp } \varphi. \quad (13)$$

Окончательно, заметив, что в силу леммы 5 $\text{supp } P\varphi \cap \text{supp } P\psi = \emptyset$, и подставив (13) в (12), получаем

$$h_z^0(\varphi^0, \psi^0) = \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A} \overline{(P\varphi)_{\mathbf{a}}} (P\psi)_{\mathbf{b}} G^0(\mathbf{a}, \mathbf{b}; z) = \langle P\varphi | Q(z) P\psi \rangle,$$

что и требовалось доказать.

Теперь можно доказать основной результат работы.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы оператор H_T^0 был локален в смысле форм, необходимо и достаточно, чтобы оператор T был также локален в смысле форм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор T локален в смысле форм. Возьмем функции φ, ψ из $\mathbf{Q}(H_T^0)$ такие, что $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi = \emptyset$. Тогда с применением леммы 6 получаем

$$h_z^T(\varphi, \psi) = h_z^0(\varphi - \Gamma_z P\varphi, \psi - \Gamma_z P\psi) + t_z(P\varphi, P\psi) = t(P\varphi, P\psi).$$

Поскольку $\text{supp } P\varphi \cap \text{supp } P\psi = \emptyset$ в силу леммы 5, то $t(P\varphi, P\psi) = 0$.

Пусть теперь H_T^0 локален в смысле форм. Возьмем $\xi, \eta \in \mathbf{Q}(T)$ такие, что $\text{supp } \xi \cap \text{supp } \eta = \emptyset$. В силу леммы 2 можно найти функции $\varphi, \psi \in \mathbf{D}(H^0)$ такие, что $P\varphi = \xi, P\psi = \eta$, причем $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } \psi = \emptyset$. Тогда имеем

$$t(\xi, \eta) = t_z(\xi, \eta) + \langle \xi | Q(z) \eta \rangle = t_z(\xi, \eta) + h_z^0(\varphi - \Gamma_z P\xi, \psi - \Gamma_z P\eta) = h_z^T(\varphi, \psi) = 0.$$

Теорема доказана.

В классе операторов T , имеющих матрицы в стандартном базисе $l^2(A)$, форм-локальность эквивалентна диагональности этой матрицы, поэтому доказанная теорема допускает важный частный случай.

СЛЕДСТВИЕ. *В классе операторов T , имеющих матрицу в стандартном базисе $l^2(A)$, локальным в смысле форм точечным возмущениям H_T^0 соответствуют лишь те операторы, матрица которых диагональна.*

3. Замечания. Все утверждения для $\nu = 2, 3$ сохраняют силу и для оператора Шредингера с однородным магнитным полем [3], т.е. $\mathbf{A} = \mathbf{A}_u = \mathbf{B} \times \mathbf{x}$, где $\mathbf{B}$ – постоянный вектор из $\mathbb{R}^\nu$. В этом случае оператор H^0 уже не является Λ -периодическим, поэтому его функция Грина не обладает свойством (10). Тем не менее, такой оператор инвариантен относительно действия группы магнитных трансляций [16], и потому (10) можно заменить на

$$\begin{aligned} |G^0(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{a}_i; z)| &\equiv |G^0(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i, \mathbf{y}; z)|, \\ |(i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x}))G^0(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{a}_i; z)| &\equiv |(i\nabla + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i))G^0(\mathbf{x} - \mathbf{a}_i, \mathbf{y}; z)|, \end{aligned} \quad i \leq m,$$

что не влияет на дальнейшее изложение. В случаях $H_0 = -\Delta$ и $H^0 = (i\nabla + \mathbf{A}_u)^2$ все результаты сохраняются и для случая, когда A – произвольное равномерно дискретное множество [9].

4. Одномерный случай. Пусть $\nu = 1$ и $H^0 = -\Delta + V$. Будем рассматривать лишь возмущения с операторами T , удовлетворяющими следующему условию: оператор T имеет ограниченный обратный. Обозначим $B = T^{-1}$.

ЛЕММА 7. Квадратичная форма h_z^T для $H_T^0 - z$ замкнута на $\mathbf{Q}(H^0)$ и задается выражением

$$h_z^T(\varphi, \varphi) = h_z^0(\varphi, \varphi) + \sum_{\mathbf{a} \in A} B_{\mathbf{a}\mathbf{b}} \overline{\varphi(\mathbf{a})} \varphi(\mathbf{b}), \quad (14)$$

где h_z^0 – квадратичная форма для $H^0 - z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство соответствующего утверждения для $V = 0$, приведенное в [1].

ТЕОРЕМА 3. Оператор H_T^0 локален в смысле форм тогда и только тогда, когда оператор T задается в стандартном базисе $l^2(A)$ диагональной матрицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathbf{Q}(H^0)$, из (14) сразу следует, что для локальности квадратичной формы точечного возмущения необходимо и достаточно, чтобы оператор B имел диагональную матрицу. Учитывая связь между T и B , получаем утверждение теоремы.

5. Связь с краевыми условиями. Полученные результаты допускают достаточно простое описание на языке граничных условий в точках множества A . Для большей наглядности будем считать, что множество A конечно.

Сначала рассмотрим двух- и трехмерный случаи. Как следует из теоремы 1, любая функция f из области определения любого точечного возмущения H_T^0 вблизи каждой точки $\mathbf{a} \in A$ имеет следующую асимптотику [2]:

$$f(\mathbf{x}) = \phi_{\mathbf{a}}(f) + \psi_{\mathbf{a}}(f) g_z^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + o(1), \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a},$$

где числа $\phi_{\mathbf{a}}(f)$, $\psi_{\mathbf{a}}(f)$ определяются для f единственным образом. Векторы $\phi(f) = (\phi_{\mathbf{a}}(f))_{\mathbf{a} \in A}$ и $\psi(f) = (\psi_{\mathbf{a}}(f))_{\mathbf{a} \in A}$ называются [13] векторами граничных значений функции f . Функция f лежит в $\mathbf{D}(H_T^0)$ тогда и только тогда, когда $\phi(f) = C\psi(f)$, где C задается в стандартном базисе $l^2(A)$ матрицей $C_{\mathbf{a}\mathbf{b}}(z) = T_{\mathbf{a}\mathbf{b}} - \delta_{\mathbf{a}\mathbf{b}} Q_{\mathbf{a}\mathbf{b}}(z)$. Матрица C , очевидно, диагональна тогда и только тогда, когда диагональна матрица оператора T .

В одномерном случае в качестве граничных значений функции f удобно взять $\phi_{\mathbf{a}}(f) = f'(\mathbf{a}+) - f'(\mathbf{a}-)$ и $\psi_{\mathbf{a}}(f) = f(\mathbf{a})$; тогда оператору H_T^0 соответствуют краевые условия $\phi(f) = C\psi(f)$ с $C = T^{-1}$. Матрица C также диагональна тогда и только тогда, когда диагональна матрица оператора T .

Иными словами, в обоих случаях локальным в смысле форм точечным возмущениям соответствуют диагональные матрицы C , т.е. в каждом из краевых условий, задающих форм-локальное точечное возмущение, участвуют граничные значения функции, соответствующие одной точке. Соответственно недиагональным матрицам C и, следовательно, краевым условиям, связывающим граничные значения функции в различных точках, соответствуют нелокальные в смысле квадратичных форм точечные возмущения.

Автор выражает благодарность В. А. Гейлеру за привлечение внимания к тематике и ценные обсуждения рассмотренных вопросов, а также С. Ю. Доброхотову за постоянный интерес к работе. Автор также признателен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [2] Павлов Б. С. Теория расширений и явнорешаемые модели // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 99–131.
- [3] Новиков С. П. Двумерные операторы Шредингера в периодических полях // Современные проблемы математики (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР). Т. 23. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3–32.
- [4] Albeverio S., Geyler V. A. The band structure of the general periodic Schrödinger operator with point interactions // Comm. Math. Phys. 2000. V. 210. № 1. P. 29–48.
- [5] Geyler V. A., Pankrashkin K. V. On fractal structure of the spectrum for periodic point perturbations of the Schrödinger operator with a uniform magnetic field // Operator Theory: Adv. and Appl. 1999. V. 108. P. 259–265.
- [6] Шондин Ю. Г. Полуограниченные локальные гамильтонианы для возмущений лапласиана на кривых с угловыми точками в $\mathbb{R}^4$ // ТМФ. 1996. Т. 106. № 2. С. 179–199.
- [7] Simon B. Schrödinger semigroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. № 3. P. 447–526.
- [8] Крейн М. Г., Лангер Г. К. О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ // Функцион. анализ и его прилож. 1971. V. 5. № 2. P. 59–71; № 3. P. 54–69.
- [9] Гейлер В. А., Маргулис В. А., Чучаев И. И. Потенциалы нулевого радиуса и операторы Карлемана // Сиб. матем. ж. 1995. Т. 36. № 4. С. 628–641.
- [10] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
- [11] Коротков В. Б. Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
- [12] Бирман М. Ш. К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов // Матем. сб. 1956. Т. 38. № 4. С. 431–450.
- [13] Derkach V. A., Malamud M. M. Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps // J. Funct. Anal. 1991. V. 95. № 1. P. 1–95.
- [14] Teta A. Quadratic forms for singular perturbations of the Laplacian // Publ. RIMS Kyoto Univ. 1990. V. 26. P. 803–817.
- [15] Кошманенко В. Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1993.
- [16] Гейлер В. А. Двумерный оператор Шредингера с однородным магнитным полем и его возмущения периодическими потенциалами нулевого радиуса // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 3. С. 1–48.

Институт проблем механики РАН, г. Москва
E-mail: kpankrashkin@mail.com

Поступило
25.10.1999
Исправленный вариант
15.01.2001