Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ж. Сакбаев, О задаче Коши для уравнения среднего поля, описывающего модель твердого магнетика, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 434–445

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm755>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:41:28

УДК 517.955.2+517.968.74

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО МОДЕЛЬ ТВЕРДОГО МАГНЕТИКА

В. Ж. Сакбаев

Рассматривается модель твердого магнетика как системы частиц, обладающих механическим моментом $\vec{s}$, $\vec{s} \in S^2$, и магнитным моментом $\vec{\mu}$, $\vec{\mu} = \mu_e \vec{s}$, которые взаимодействуют друг с другом посредством магнитного поля, что определяет изменение механического момента каждой частицы. Изучается система интегродифференциальных уравнений, определяющая эволюцию одночастичной функции распределения указанной системы частиц. Доказаны теоремы о существовании и единственности обобщенного и классического решений задачи Коши для данной системы уравнений и о непрерывной зависимости обобщенного решения от начальных условий.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Описание модели. В настоящей работе рассмотрена модель, описывающая поведение магнетика, состоящего из частиц (атомов, молекул, ионов), обладающих ненулевым спином и ненулевым магнитным дипольным моментом (МДМ). В рассматриваемой модели применяется классическое описание состояния и динамики системы: каждая частица вещества характеризуется своим положением в пространстве $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$; ее спиновое состояние определяется 3-мерным вектором механического момента частицы $\vec{s}(t)$, $|\vec{s}(t)| = 1$, для каждой частицы (см. [1]–[3]).

Предполагается, что частица, находящаяся в состоянии $\vec{s}$, обладает МДМ $\vec{\mu} = \mu_e \vec{s}$, где константа μ_e определяется свойствами частиц. Пусть единицы измерения физических величин выбраны так, что $\mu_e = 1$. МДМ $\vec{s}$, находящийся в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, создает магнитное поле, равное

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla_x \left(\frac{(\vec{s}, \vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} \right), \quad (1)$$

в точках, достаточно удаленных от $\vec{x}_0$ (см., например, [3]).

Будем предполагать, что частицы вещества расположены в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$; тогда состояние каждой частицы характеризуется координатами $(\vec{x}, \vec{s})$, $\vec{x} \in \Omega$, $\vec{s} \in S^2$.

В данной модели предполагается, что каждая частица находится в некоторой точке Ω и не изменяет своего положения $\vec{x}$, а движение ее спиновой координаты $\vec{s}(\vec{x}, t)$ подчиняется классическому уравнению (см. [1], [2])

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = [\vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t) \times \vec{s}], \quad (2)$$

где момент сил $[\vec{B} \times \vec{s}]$ возникает в результате взаимодействия МДМ с магнитным полем, созданным всей совокупностью МДМ и внешними источниками, а также в результате учета электростатического взаимодействия частиц друг с другом с помощью введения эффективных магнитных полей. Здесь $\vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t)$ – индукция суммарного эффективного магнитного поля, которая в соответствии с [1], [2] определяется как суперпозиция внешнего магнитного поля $\vec{B}_0(\vec{x}, t)$, магнитного поля дипольного взаимодействия $\vec{B}(\vec{x}, t)$ и специальных полей, имеющих электростатическую природу: эффективного магнитного поля обменного взаимодействия $\vec{B}_I(\vec{x}, t)$ и эффективного магнитного поля анизотропии кристалла $\vec{B}_a(\vec{s})$. Возможность описать влияние электрических полей на изменение состояния частицы с помощью эффективного магнитного поля обсуждалась в указанной литературе. Выводы работы справедливы, в частности, и для систем с чисто магнитным взаимодействием.

В статье изучается описание самосогласованной динамики спинового состояния системы $\vec{s}(\vec{x}, t)$ в поле $\vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t)$, связанном с этой динамикой. Рассматриваются вопросы корректности задачи Коши и связи предлагаемого описания непрерывной среды с описанием многочастичной системы с помощью классических уравнений движения.

Состояние системы частиц в момент времени t будем определять с помощью функции распределения в координатном пространстве $X = \Omega \times S^2$: $f(\vec{x}, \vec{s}, t)$ есть плотность вероятности распределения частиц в пространстве X в момент времени t , т.е. если число частиц системы равно N , то для любой области $D \in X$ величина $N \int_D f(\vec{x}, \vec{s}, t) dx ds$ характеризует число частиц, находящихся в области D пространства X в момент времени t . По своему смыслу функция $f(\vec{x}, \vec{s}, t)$ должна удовлетворять следующим требованиям:

- 1) $f(\vec{x}, \vec{s}, t) \geq 0$ для всех $(\vec{x}, \vec{s}, t)$;
- 2) $\int_X f(\vec{x}, \vec{s}, t) dx ds = 1$ при всех t .

Введем следующие обозначения.

1) $T_{\vec{s}}(S^2)$ – касательная плоскость к единичной сфере в точке $\vec{s}$. На сфере S^2 выбран и фиксирован атлас из двух карт $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$, координаты в каждой из которых обозначаются через σ_1, σ_2 ; тогда $\vec{s} = \vec{s}(\sigma_1, \sigma_2)$. Выбор локальной системы координат (σ_1, σ_2) в карте определяет в касательных плоскостях $T_{\vec{s}}(S^2)$ в каждой точке сферы базис $\vec{e}_1(\vec{s}), \vec{e}_2(\vec{s})$ ($\vec{e}_i(\vec{s}) = (\partial \vec{s}(\sigma_1, \sigma_2) / \partial \sigma_i) | \partial \vec{s} / \partial \sigma_i |^{-1}$).

2) Пространство непрерывно дифференцируемых k раз в каждой точке сферы вещественнозначных функций обозначается через $C^k(S^2)$; введено обозначение

$$D_{\sigma_\alpha}^i f(\vec{s}) = \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_\alpha} \right)^i f(\vec{s}(\sigma_1, \sigma_2)), \quad \alpha = 1, 2, \quad i = 1, \dots, k,$$

если $f(\vec{s}(\sigma_1, \sigma_2)) \in C^k(S^2)$.

3) $C^k(X)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на ограниченном замкнутом множестве $[X]$ (замыкание X в $\mathbb{R}^3 \times S^2$) с гладкой границей. Чтобы определить норму в пространстве $C^k(X)$, рассмотрим покрытие сферы меньшими картами $\{\Sigma'_1, \Sigma'_2\}$, лежащими строго внутри соответствующих карт исходного покрытия. Тогда определим норму в $C^k(X)$ равенством

$$\|f(\vec{x}, \vec{s})\|_{C^k(X)} = \max_{\alpha=1,2} \left(\sup_{l=0,\dots,k} \left(\sup_{i_1+\dots+i_l=l} \left(\sup_{\Omega \times \Sigma'_\alpha} |D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} D_{x_3}^{i_3} D_{\sigma_1}^{j_1} D_{\sigma_2}^{j_2} f(\vec{x}, \vec{s}(\sigma_1, \sigma_2))| \right) \right) \right),$$

где $i_1, \dots, j_2$ – неотрицательные целые числа. Нетрудно проверить, что данное равенство действительно определяет норму.

4) Пусть Y – банахово пространство. Тогда $C^i([0, T] \times X, Y)$, $i = 0, 1$, есть соответственно непрерывное и непрерывно дифференцируемое по совокупности аргументов $t, \vec{x}, \vec{s}$ отображение пространства $[0, T] \times X$ в пространство Y .

5) Для функций $f(\vec{s})$ из $C^1(S^2)$ и для гладких векторных полей $\vec{A}(\vec{s})$ на S^2 введем операции градиента функции $\nabla_s: f(\vec{s}) \rightarrow \nabla_s f(\vec{s})$ и дивергенции векторного поля $\vec{A}(\vec{s}) \rightarrow \operatorname{div}_s \vec{A}(\vec{s})$ (см. [4]). Скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ евклидова пространства $T_{\vec{s}}(S^2)$ обозначается через $(\vec{a}, \vec{b})$.

Конкретизируем, каким образом поле $B(\vec{x}, \vec{s}, t)$ зависит от состояния системы:

$$\vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t) = \vec{B}_0(\vec{x}, t) + \vec{B}_m(\vec{x}, t) + \vec{B}_I(\vec{x}, t) + \vec{B}_a(\vec{s}), \quad (31)$$

где выполняются следующие условия.

1) $\vec{B}_0(\vec{x}, t) \in C^1(X \times [0, T], \mathbb{R}^3)$ – заданное внешнее магнитное поле.

2) $\vec{B}_m(\vec{x}, t) = \nabla_x \int_{\Omega} (\nabla_x 1/|\vec{x} - \vec{y}|, \vec{M}(\vec{y}, t)) dy + 4\pi \vec{M}(\vec{x}, t)$ – магнитное поле, созданное всеми МДМ с функцией распределения $f(\vec{x}, \vec{s}, t)$ в момент времени t , где

$$\vec{M}(\vec{x}, t) = \int_{S^2} \vec{s} f(\vec{x}, \vec{s}, t) ds$$

– намагниченность данной системы МДМ. Данная зависимость поля дипольных моментов от функции распределения соответствует уравнениям магнитостатики (см. [2]).

В действительности, функция $1/|\vec{x} - \vec{y}|$, характеризующая парное взаимодействие МДМ, соответствует приближенному закону этого взаимодействия для двух МДМ, достаточно удаленных друг от друга. Взаимодействие двух МДМ, близких друг к другу, имеет более сложный характер. С другой стороны, сингулярность в интегральном операторе в формуле для магнитного поля является дополнительной трудностью при исследовании соответствующей математической задачи. В соответствии с этим в статье рассматривается парное взаимодействие МДМ с некоторым модельным гладким потенциалом $U(\vec{x} - \vec{y})$, который может возникнуть, например, при аппроксимации сингулярного ядра $1/|\vec{x} - \vec{y}|$ бесконечно гладкими функциями. При этом естественно потребовать, чтобы магнитное поле, определяемое с помощью этого модельного закона взаимодействия, являлось соленоидальным. Чтобы удовлетворить это требование, определим магнитное поле системы МДМ с функцией распределения $f(\vec{x}, \vec{s}, t)$ формулой

$$\vec{B}_m(\vec{x}, t) = \int_X (4\pi \vec{s} \omega_U(\vec{x} - \vec{y}) + \nabla(\vec{s}, \nabla U(\vec{x} - \vec{y}))) f(\vec{y}, \vec{s}, t) dy ds, \quad (32)$$

где функции ω_U и U связаны формулой $\omega_U = \Delta U$. Тогда напряженность магнитного поля определяется по формуле

$$\vec{H}(\vec{x}) = \nabla \int_{\Omega} (\nabla U(\vec{x} - \vec{y}), \vec{M}(\vec{y})) dy,$$

а индукция магнитного поля по формуле

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{H}(\vec{x}) + 4\pi \int_{\Omega} \omega_U(\vec{x} - \vec{y}) \vec{M}(\vec{y}) dy,$$

что обеспечивает выполнение условия $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}) = 0$. Заметим также, что при $\omega(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$ модельная зависимость магнитного поля от намагниченности совпадает с зависимостью, даваемой уравнениями Максвелла.

3) В настоящей работе предполагается модельная зависимость энергии обменного взаимодействия

$$E_I = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \omega_0(\vec{x} - \vec{y}) (\vec{M}(\vec{x}), \Delta \vec{M}(\vec{y})) dy dx;$$

эффе́ктивное поле обменного взаимодействия связано с функцией распределения соотношением

$$\vec{B}_I = J \int_{S^2} \Delta \omega_0(\vec{x} - \vec{y}) \vec{s} f(\vec{y}, \vec{s}, t) dy ds,$$

где $\omega_0(\vec{x}) \in C_0^\infty(B^3(0, 1), [0, +\infty))$, $\int_{\mathbb{R}^3} \omega_0(\vec{x}) dx = 1$, $B^3(0, 1)$ – шар единичного радиуса с центром в нуле в пространстве $\mathbb{R}^3$, $J \in \mathbb{R}$ – константа обменного взаимодействия.

При $\omega_0(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$ формула для обменного поля совпадает с формулой, принятой для описания обменного взаимодействия, например, в уравнении Ландау–Лифшица (см. [2]). Такое определение эффе́ктивного поля обменного взаимодействия отражает многие явления магнетизма, однако строгий вывод этого уравнения, по-видимому, отсутствует.

4) $\vec{B}_a(\vec{s}) = \nabla V(\vec{s})$, где $V(\vec{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Это эффе́ктивное поле выражает факт зависимости энергии $V(\vec{s})$ состояния $\vec{s}$ от ориентации $\vec{s}$ относительно осей кристаллической решетки. Данное определение поля $\vec{B}_a(\vec{s})$ соответствует вводимому в монографиях [1], [2] эффе́ктивному полю анизотропии кристалла.

Итак, для каждой частицы рассматриваемой системы ее координаты изменяются по закону:

$$\vec{x} = \text{const}, \quad \frac{\partial \vec{s}(\vec{x}, t)}{\partial t} = [\vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t) \times \vec{s}(\vec{x}, t)], \quad (4)$$

где $\vec{B}$ определяется по формулам (3). Тогда функция распределения системы из N частиц есть

$$f^N(\vec{x}, \vec{s}, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \delta(\vec{s} - \vec{s}_i(\vec{x}_i, t)),$$

где функция $\vec{s}_i(\vec{x}_i, t)$ – решение уравнения (4), и нетрудно проверить, что $f^N(\vec{x}, \vec{s}, t)$ является обобщенным решением уравнения (отметим, что вектор $[\vec{B}^N \times \vec{s}]$ принадлежит касательной плоскости $T_{\vec{s}}(S^2)$):

$$\frac{\partial f^N}{\partial t} + (\nabla_s f^N, [\vec{B}^N \times \vec{s}]) = 0 \quad (5)$$

в том смысле, что для любого $\psi \in C^1(X)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \int_X \psi(\vec{x}, \vec{s}) f^N(\vec{x}, \vec{s}, t) dx ds = \int_X f^N(\vec{x}, \vec{s}, t) ([\vec{B}^N \times \vec{s}], \nabla_s \psi(\vec{x}, \vec{s})).$$

Здесь $\vec{B}^N(\vec{x}, \vec{s}, t)$ – полное эффе́ктивное магнитное поле, соответствующее распределению N частиц в пространстве X с плотностью $f^N(\vec{x}, \vec{s}, t)$.

Следуя подходу, применяемому при выводе уравнения Власова (см. [5]), заменим систему N частиц, описываемых уравнением (5), некоторой непрерывной средой, описываемой системой уравнений (6) (см. ниже). Рассмотрим следующую задачу для неизвестной функции распределения $f(\vec{x}, \vec{s}, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + ([\vec{B} \times \vec{s}], \nabla_s f) = 0, \quad (\vec{x}, \vec{s}) \in X, \quad t \in [0, T], \quad (6_1)$$

$$f(\vec{x}, \vec{s}, 0) = f_0(\vec{x}, \vec{s}). \quad (6_2)$$

Индукция магнитного поля $\vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t)$ определяется по формулам (3)

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t) = & \vec{B}_0(\vec{x}, t) + \nabla V(\vec{s}) + \int_X w(\vec{x} - \vec{y}) \vec{s} f(\vec{y}, \vec{s}, t) dy ds \\ & + \nabla \int_X (\vec{s}, \nabla U(\vec{x} - \vec{y})) f(\vec{y}, \vec{s}, t) dy ds = \vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t; [f]), \end{aligned} \quad (6_3)$$

где

- 1) $[0, T]$ – произвольный отрезок времени, X – описанное выше координатное пространство;
- 2) $f(\vec{x}, \vec{s}, t) \in C^1([0, T] \times X, \mathbb{R}^+)$ – неизвестная функция распределения на пространстве X такая, что $f(\vec{x}, \vec{s}, 0) = f_0(\vec{x}, \vec{s})$; функция $f_0(\vec{x}, \vec{s})$ удовлетворяет условиям: $f_0(\vec{x}, \vec{s}) \in C^1(X, \mathbb{R}^+)$, $\int_X f_0(\vec{x}, \vec{s}) dx ds = 1$;
- 3) функция U удовлетворяет условиям

$$\Delta U \in C_0^\infty(B^3(0, 1), [0, +\infty)), \quad \int_{\mathbb{R}^3} \Delta U(\vec{x}) dx = 1;$$

- 4) $w(\vec{x}) = J\Delta\omega_0(\vec{x}) + \Delta U(\vec{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, [0, +\infty))$ в соответствии с определениями полей магнитного, дипольного и обменного взаимодействий.

Далее функции $U(\vec{x})$ и $w(\vec{x})$ рассматриваются как независимые.

Систему (6) будем называть *системой уравнений среднего поля*.

В данной работе изучается вопрос корректности задачи (6). Кроме того, получен некоторый результат о близости решения задачи (6) и задачи, описывающей движение конечного числа частиц (5), который, в частности, подтверждает применимость системы уравнений (6) к описанию явлений в магнетиках. Для исследования этих проблем автор применяет комбинацию методов изучения корректности задачи Коши для уравнения Власова, предложенных в [5] и [6].

2. Обобщенное решение системы уравнений среднего поля. Дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f(\vec{x}, \vec{s}, t)$, определенная на $X \times [0, T]$, называется *классическим решением сглаженной системы* (6), если

- 1) $f(\vec{x}, \vec{s}, t) \in C^1([0, T] \times X, \mathbb{R}_+)$;
- 2) $f(\vec{x}, \vec{s}, t)$ удовлетворяет системе уравнений (6).

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что для классического решения системы (6) интеграл $\int_X f(\vec{x}, \vec{s}, t) dx ds$ не зависит от времени. (Поскольку $\operatorname{div}_s[\vec{B} \times \vec{s}] = 0$.)

Рассмотрим пространство M (не обязательно знакоопределенных) борелевских мер на пространстве X . Определим в пространстве M метрику d соотношением: пусть $\mu, \nu \in M$; тогда

$$d(\mu, \nu) = \sup_{f \in D} \left| \int_X \mu(dx ds) f(\vec{x}, \vec{s}) - \int_X \nu(dx ds) f(\vec{x}, \vec{s}) \right|,$$

где

$$D = \{f \mid f: X \rightarrow [0, 1], \quad |f(\vec{x}, \vec{s}) - f(\vec{y}, \vec{\sigma})| \leq |\vec{x} - \vec{y}| + |\vec{s} - \vec{\sigma}|\}.$$

Тогда метрика d порождает топологию слабой сходимости в пространстве M : для последовательности $\mu_n \in M$ условие $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mu_n, \mu) = 0$ эквивалентно условию (см. [5], [6])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \mu_n(dx ds) \psi(\vec{x}, \vec{s}) = \int_X \mu(dx ds) \psi(\vec{x}, \vec{s})$$

для любого $\psi \in C(X)$.

На фиксированном выше отрезке $[0, T]$ рассмотрим множество слабо непрерывных отображений $C([0, T], M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $\mu(t, dx ds) \in C([0, T], M)$ называется *обобщенным решением системы уравнений среднего поля*, если она при любом $\psi(\vec{x}, \vec{s}) \in C^1(X)$ удовлетворяет следующей системе уравнений (7) на отрезке $[0, T]$:

$$\int_X \psi(\vec{x}, \vec{s}) (\mu(t, dx ds) - \mu(0, dx dt)) = \int_0^t d\tau \int_X (\nabla_s \psi(\vec{x}, \vec{s}), [\vec{B} \times \vec{s}]) \mu(\tau, dx ds), \quad (7_1)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t) = \vec{B}_0(\vec{x}, t) + \nabla V(\vec{s}) + \vec{A}(\vec{x}, t) + \nabla \varphi(\vec{x}, t), \quad (7_2)$$

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int_X (\nabla U(\vec{x} - \vec{y}), \vec{s}) \mu(t, dy ds), \quad (7_3)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int_X w(\vec{x} - \vec{y}) \vec{s} \mu(t, dy ds), \quad (7_4)$$

$$\mu(+0) = \mu_0, \quad (7_5)$$

где $\mu_0(dx ds) \in M(X)$ – положительная мера и $\int_X \mu_0(dx ds) = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены следующие предположения о функциях $w(\vec{x})$, $V(\vec{s})$, $U(\vec{x})$, $\vec{B}_0(\vec{x}, t)$: $\vec{B}_0(\vec{x}, t) \in C^1(X \times [0, T], \mathbb{R}^3)$ и существует такая положительная постоянная L , что

$$\begin{aligned} |D_{\vec{x}}^2 U(\vec{x})| &\leq L, & |D_{\vec{x}}^2 (U(\vec{x}) - U(\vec{y}))| &\leq L |\vec{x} - \vec{y}| \quad \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \Omega, \\ |\nabla V(\vec{s})| &\leq L, & |\nabla V(\vec{s}) - \nabla V(\vec{\sigma})| &\leq L |\vec{s} - \vec{\sigma}| \quad \forall (\vec{s}, \vec{\sigma}) \in S^2, \\ |w(\vec{x})| &\leq L, & |w(\vec{x}) - w(\vec{y})| &\leq L |\vec{x} - \vec{y}| \quad \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Тогда

- 1) если μ_0 – неотрицательная борелевская мера такая, что $\int_X \mu_0(dx ds) = 1$, то для любого $T > 0$ существует единственное обобщенное решение системы (6), причем для любого $t \in [0, T]$ мера $\mu(t)$ неотрицательна и

$$\int_X \mu(t, dx ds) = 1;$$

- 2) существует такое $C > 0$, что если $\mu(t)$ и $\nu(t)$ суть обобщенные решения уравнения среднего поля с начальными условиями μ_0 и ν_0 соответственно, то справедливо неравенство $d(\mu(t), \nu(t)) \leq e^{Ct} d(\mu_0, \nu_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$, $\{\mu_0, \nu_0\} \in M(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\mu(t) \in C([0, T], M)$. Она определяет зависимость от времени поля $\vec{B}_{\mu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}, t)$ в соответствии с формулами (7₂)–(7₄).

Согласно предположению теоремы относительно функций U, V, w задача Коши

$$\frac{d\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t)}{dt} = [\vec{B}_{\mu(\cdot)} \times \vec{s}], \quad t \in [0, T], \quad \vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, 0) = \vec{\sigma}, \quad (8)$$

при любых $(\vec{x}, \vec{\sigma}) \in X$ имеет на $[0, T]$ единственное решение $\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot))$, и ясно, что это решение непрерывно дифференцируемо по $(t, \vec{x}, \vec{\sigma})$, т.е. $\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot)) \in C^1([0, T] \times X, S^2)$. Определим отображение $T_t[\mu(\cdot)]$, действующее из $C^1(X)$ в $C^1(X)$:

$$(T_t[\mu(\cdot)]\psi)(\vec{x}, \vec{\sigma}) = \psi(\vec{x}, \vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot))), \quad t \in [0, T].$$

Для произвольного $\nu_0 \in M$ определим функцию $\nu(t) \in C([0, T], M)$ соотношением $\nu(t) = \nu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)]$, т.е.

$$\int_X \nu(t, dx ds) \psi(\vec{x}, \vec{s}) = \int_X \nu_0(dx ds) (T_t[\mu(\cdot)]\psi)(\vec{x}, \vec{s}).$$

Тогда справедлива следующая лемма.

ЛЕММА. Функция $\mu(t) \in C([0, T], M)$ является обобщенным решением уравнения среднего поля с начальными данными μ_0 тогда и только тогда, когда $\mu(t)$ есть неподвижная точка отображения $\Lambda: \Lambda\mu(t) = \mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu(t)$ является неподвижной точкой отображения Λ , то $\mu(t)$, очевидно, удовлетворяет совокупности условий (7).

Пусть функция $\mu(t)$ есть обобщенное решение системы (6). Рассмотрим отображение $S_t(\vec{x} | \mu(\cdot)) \in C^1(S^2, S^2): \vec{\sigma} \rightarrow \vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot))$, задаваемое задачей (8) при каждом значении $\vec{x}$. Нетрудно проверить, что данное отображение является взаимно однозначным и якобиан его равен 1. (Чтобы доказать этот факт, достаточно убедиться в том, что $\operatorname{div}_s[\vec{s} \times \vec{B}(\vec{x}, \vec{s}, t | \mu)] = 0$.) Следовательно, корректно определено обратное отображение $S_t^{-1}(\vec{x} | \mu(\cdot)) \in C^1(S^2, S^2): \vec{\sigma} \rightarrow \vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot))$. Поскольку

$S_t^{-1}(\vec{x} \mid \mu(\cdot)) \circ S_t(\vec{x} \mid \mu(\cdot))(\vec{\sigma}) = \vec{n}(\vec{x}, \vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t \mid \mu(\cdot)), t \mid \mu(\cdot)) = \vec{\sigma}$, то функции $\vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t \mid \mu(\cdot))$ при каждом значении $(\vec{x}, \vec{\sigma}) \in X$ и каждом $i = 1, 2$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{n}(\vec{x}, \vec{s}, t))_i + (\nabla_s(\vec{n}(\vec{x}, \vec{s}, t))_i, [\vec{B}_{\mu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}, t) \times \vec{s}]) &= 0, \\ \vec{n}(\vec{x}, \vec{s}, 0) &= \vec{s}, \end{aligned} \quad (8')$$

которое единственно и принадлежит классу $C^1(X \times [0, T], S^2)$ в силу предположений теоремы. Учитывая уравнения (7₁) и (8'), нетрудно показать, что

$$\frac{d}{dt} \int_X \psi(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x}, \vec{s}, t \mid \mu(\cdot))) \mu(t, dx ds) = 0$$

для любого $\psi \in C^1(X)$. Следовательно, для любого $t \in [0, T]$ и любого $\psi \in C^1(X)$ справедливо равенство

$$\int_X \psi(\vec{x}, \vec{\sigma}) \mu_0(dx d\sigma) = \int_X \psi(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t \mid \mu(\cdot))) \mu(t, dx d\sigma).$$

Поскольку отображение $S_t^{-1}(\vec{x} \mid \mu(\cdot))$ взаимно однозначное при любых $\vec{x}$ и t , то отображение $C^1(X) \rightarrow C^1(X)$:

$$\psi(\vec{x}, \vec{s}) \rightarrow \psi(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x}, \vec{s}, t \mid \mu(\cdot)))$$

является взаимно однозначным преобразованием пространства $C^1(X)$. Поэтому для любого обобщенного решения задачи (6) при всех $\psi \in C^1(X)$ справедливо соотношение

$$\int_X \psi(\vec{x}, \vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t \mid \mu(\cdot))) \mu_0(dx d\sigma) = \int_X \psi(\vec{x}, \vec{\sigma}) \mu(t, dx d\sigma). \quad (9)$$

Следовательно, для всякого обобщенного решения задачи (6) выполнено условие $\mu(t) = \mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)]$. Лемма доказана.

Пусть $\mu(t) = \mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)]$, $\nu(t) = \nu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]$. Тогда

$$\begin{aligned} d(\mu(t), \nu(t)) &= d(\mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)], \nu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]) \\ &\leq d(\mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)], \mu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]) + d(\mu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)], \nu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]). \end{aligned}$$

Для второго слагаемого справедлива оценка

$$\begin{aligned} d(\mu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)], \nu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]) &= e^{Lt} \sup_{f \in D} \left| \int_X (d\mu_0 - d\nu_0) e^{-Lt} (T_t[\nu(\cdot)] f) \right| \\ &\leq e^{Lt} d(\mu_0, \nu_0), \end{aligned}$$

так как если $f \in D$, то $e^{-Lt} (T_t[\nu(\cdot)] f) \in D$. Действительно, в силу уравнения (8)

$$\left| \frac{d}{dt} (\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t) - \vec{s}(\vec{y}, \vec{s}, t)) \right| \leq L(|\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t) - \vec{s}(\vec{y}, \vec{s}, t)| + |\vec{x} - \vec{y}|).$$

Из последнего неравенства и леммы Гронуолла получается требуемое условие.

А для первого слагаемого имеем

$$\begin{aligned} d(\mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)], \mu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]) &= \sup_{f \in D} \left| \int_X d\mu_0(T_t[\mu(\cdot)]f - T_t[\nu(\cdot)]f) \right| \\ &\leq \int_X \mu_0(dx d\sigma) |\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot)) - \vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \nu(\cdot))| = \lambda(t), \end{aligned}$$

поскольку $f \in D$. Следовательно, в силу (9)

$$\begin{aligned} \lambda(t) &\leq \int_X \mu_0(dx d\sigma) \left| \int_0^t d\tau [\vec{B}_{\mu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}(\tau | \mu(\cdot)), \tau) \times \vec{s}(\tau | \mu(\cdot))] \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t d\tau [\vec{B}_{\nu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}(\tau | \nu(\cdot)), \tau) \times \vec{s}(\tau | \nu(\cdot))] \right| \\ &\leq \int_0^t \int_X \mu(\tau, dx ds) |[\vec{B}_{\mu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}, \tau) \times \vec{s}] - [\vec{B}_{\nu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}, \tau) \times \vec{s}]| \\ &\quad + L \int_0^t \int_X \mu_0(dx ds) |\vec{s}(\tau | \mu(\cdot)) - \vec{s}(\tau | \nu(\cdot))| \\ &\leq c_1(L) \int_0^t d\tau d(\mu(\tau), \nu(\tau)) + L \int_0^t \lambda(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому с помощью рассуждений, применяемых для доказательства леммы Гронуолла, можно показать, что

$$\lambda(t) \leq c_1(L) \int_0^t d\tau e^{L(t-\tau)} d(\mu(\tau), \nu(\tau)).$$

Таким образом,

$$d(\mu(t), \nu(t)) \leq e^{Lt} d(\mu_0, \nu_0) + c_1(L) \int_0^t d\tau e^{L(t-\tau)} d(\mu(\tau), \nu(\tau)).$$

Из последнего неравенства и леммы Гронуолла вытекает утверждение 2) теоремы 1.

Пусть μ_0 – начальное условие задачи (7). Пусть

$$C_\mu = \{\mu(t) | \mu(t) \in C([0, T], M) : \mu(0) = \mu_0\}.$$

Произвольной функции $\mu(t) \in C_\mu$ поставим в соответствие функцию $\Lambda\mu(t) = \mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)]$. Отображение Λ отображает пространство C_μ в себя. Введем в пространстве C_μ метрику: для любых $\mu, \nu \in C_\mu$ положим

$$d_\alpha(\mu(\cdot), \nu(\cdot)) = \sup_{t \in [0, T]} d(\mu(t), \nu(t)) e^{-\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Так как (M, d) есть полное метрическое пространство (см. [6]), то метрическое пространство (C_μ, d_α) также является полным.

Докажем, что отображение Λ пространства (C_μ, d_α) в себя при достаточно больших α является сжатием. Действительно, согласно сделанной выше оценке имеем

$$\begin{aligned} d((\Lambda\mu(\cdot))(t), (\Lambda\nu(\cdot))(t)) &= d(\mu_0 \circ T_t[\mu(\cdot)], \mu_0 \circ T_t[\nu(\cdot)]) \\ &\leq c_1(L) \int_0^t d\tau e^{L(t-\tau)} d(\mu(\tau), \nu(\tau)). \end{aligned}$$

Следовательно, при $\alpha > L$

$$d_\alpha(\Lambda\mu(\cdot), \Lambda\nu(\cdot)) \leq \frac{c_1}{\alpha - L} d_\alpha(\mu(\cdot), \nu(\cdot)),$$

что и доказывает утверждение.

Поэтому отображение Λ имеет единственную неподвижную точку $\mu(t) \in C_\mu$. Следовательно, существует единственное обобщенное решение уравнения среднего поля.

Положим в (9) $\psi \equiv 1$. Тогда получим, что для любого $t \in [0, T]$ мера $\mu(t)$ является вероятностной. Теорема 1 доказана.

3. Классическое решение уравнения среднего поля. В этом пункте приводится исследование гладкости решения задачи (7) при условии, что начальная мера обладает гладкой плотностью.

Рассмотрим задачу (7) с начальной мерой $\mu_0(dx ds) = f_0(\vec{x}, \vec{s}) dx ds$, где функция $f_0(\vec{x}, \vec{s}) \in C^1(X)$ – плотность неотрицательной нормированной меры.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1 о свойствах функций U, V и w . Пусть функция $f_0(\vec{x}, \vec{s})$ принадлежит пространству $C^1(X)$. Тогда на отрезке $[0, T]$ существует единственное классическое решение задачи Коши (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем существование классического решения. Пусть $\mu(t)$ – обобщенное решение задачи (6) с начальной мерой $\mu_0(dx ds) = f_0(\vec{x}, \vec{s}) ds dx$. По теореме 1 это решение существует и единственно. В силу предположений теоремы поля $\vec{B}_{\mu(\cdot)}(\vec{x}, \vec{s}, t)$, отвечающие этому решению, принадлежат пространству $C^1(X \times [0, T], \mathbb{R}^3)$. Следовательно, задача Коши (8) имеет единственное решение $\vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot)) \in C^1(X \times [0, T], S^2)$.

В соответствии с утверждением леммы $\mu(t) = \mu \circ T_t[\mu(\cdot)]$, поэтому для любого $\psi \in C^1(X)$ справедливо равенство

$$\int_X \mu(t, dx ds) \psi(\vec{x}, \vec{s}) = \int_X f_0(\vec{x}, \vec{s}) dx d\sigma \psi(\vec{x}, \vec{s}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot))).$$

Отображение $S_t^{-1}(\vec{x} | \mu(\cdot)): \vec{\sigma} \rightarrow \vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot))$ при любых $\vec{x} \in \Omega$ и $t \in [0, T]$ является взаимно однозначным отображением с равным единице якобианом (см. лемму), поэтому если в последнем равенстве сделать замену переменных интегрирования $\vec{\sigma} \rightarrow \vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot))$, то равенство примет вид

$$\int_X \mu(t, dx ds) \psi(\vec{x}, \vec{s}) = \int_X f_0(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot))) \psi(\vec{x}, \vec{\sigma}) dx d\sigma.$$

Поскольку функция $\vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot))$ является решением задачи Коши (8'), то в силу предположений теоремы о функциях U , V и w она принадлежит пространству $C^1(X \times [0, T], S^2)$.

Следовательно, обобщенное решение задачи (6) $\mu(t)$ имеет плотность $f(\vec{x}, \vec{\sigma}, t) = f_0(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x}, \vec{\sigma}, t | \mu(\cdot)))$ и $f(\vec{x}, \vec{s}, t) \in C^1(X \times [0, T], \mathbb{R}^+)$. Тогда

$$\int_X \psi(\vec{x}, \vec{s}) \left(\frac{\partial f}{\partial t} - (\nabla_s f, [\vec{B} \times \vec{s}]) \right) dx ds = 0$$

для произвольного $\psi \in C^1(X)$, поэтому функция $f(\vec{x}, \vec{s}, t)$ удовлетворяет системе уравнений (6) и, следовательно, является классическим решением задачи (6).

Единственность этого решения следует из единственности решения задачи Коши (8'). Теорема 2 доказана.

4. Обсуждение результатов. Предположим, что мера $\mu_N(0)$ определена формулой

$$\int_X \psi d\mu_N(0) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} \psi(\vec{x}_j, \vec{s}_j),$$

где $\vec{x}_j, \vec{s}_j, j = 1, \dots, N$, – набор точек в пространстве X .

Тогда решение системы (7) с начальной мерой $\mu_N(0)$ существует и как неподвижная точка отображения Λ определяется формулой

$$\int \psi d\mu_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} \psi(\vec{x}_j, \vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t)),$$

где $\vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t)$ есть решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, 0) &= \vec{s}_j, \\ D_t \vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t) &= \left(\left(\nabla_{x_j} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} (\nabla_{x_j} U(\vec{x}_j - \vec{x}_i), \vec{s}^N(\vec{x}_i, \vec{s}_i, t)) \right. \right. \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} w(\vec{x}_j - \vec{x}_i) \vec{s}^N(\vec{x}_i, \vec{s}_i, t) + \nabla V(\vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t)) \\ &\left. \left. + \vec{B}_0(\vec{x}_j, t) \right) \times \vec{s}^N(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Данная система уравнений является системой уравнений движения N частиц, положение в пространстве которых $\vec{x}_i, i = 1, \dots, N$, фиксированно, а механический момент $\vec{s}_i^N(t)$ изменяется по закону $D_t \vec{s}_i^N(t) = \vec{F}_i^N(t); \vec{F}_i^N(t)$ – момент сил, действующих на частицу.

Изменение механического момента $\vec{s}_i^N$ частицы обусловлено тем, что с ним связан дипольный магнитный момент $\vec{m}_i^N = \mu \vec{s}_i^N = \vec{s}_i^N$. Система N частиц представляет собой набор находящихся в поле друг друга магнитных диполей, и момент сил магнитного дипольного взаимодействия i -й частицы с другими частицами равен

$$\vec{F}_{\text{mag}}^N(t) = [\vec{B}_{\text{mag}}^N(\vec{x}_i, t) \times \vec{s}_i^N].$$

В формуле (10) кроме сил магнитного дипольного взаимодействия частиц с помощью эффективного магнитного поля учтено также взаимодействие каждого электрона с атомами кристаллической решетки как целым (слагаемое $V(s)$) и обменное взаимодействие соседних электронов.

Пусть $\mu_\infty(t)$ – обобщенное решение задачи (6) с начальным условием $\mu_\infty(0) = \mu_\infty$. Тогда из теоремы 1 следует, что если $\lim_{N \rightarrow \infty} d(\mu_N, \mu_\infty) = 0$, то на произвольном отрезке $[0, T]$ решение $\mu_N(t)$ задачи (7) с начальным условием μ_N сходится к решению системы (7) с начальной мерой μ_∞ в пространстве $C([0, T], M)$ с метрикой d_α . Если мера $\mu_\infty(t)$ имеет гладкую плотность

$$f(\vec{x}, \vec{s}, t) = w * - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) \delta(\vec{s} - \vec{s}(\vec{x}_j, \vec{s}_j, t)),$$

то эта плотность является классическим решением приближенного уравнения (6) и содержит информацию о движении реальной спиновой системы с функцией распределения $f_N(\vec{x}, \vec{s}, t)$. В этом смысле уравнение (6), описывающее движение непрерывной системы, является “власовским” пределом уравнения движения системы N частиц (10) при $N \rightarrow \infty$ (см. [5]).

Пользуюсь возможностью выразить искреннюю благодарность моему научному руководителю П.Е. Жидкову за постановку задачи, полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967.
- [2] О’Делл Т. Ферромагнитодинамика. М.: Мир, 1983.
- [3] Парселл Э. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1983.
- [4] Постников М. М. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
- [5] Арсеньев А. А. Лекции о кинетических уравнениях. М.: Наука, 1992.
- [6] Spohn H. Large-Scale Dynamics on Interacting Particle. New York: Springer-Verlag, 1991.

Московский физико-технический институт
E-mail: sakbaev@thsun1.jinr.dubna.su

Поступило
14.08.1996