Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Ушаков, IA-автоморфизмы метабелевых произведений двух абелевых групп, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 446–457

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm756>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 11:43:11

УДК 512

IA-АВТОМОРФИЗМЫ МЕТАБЕЛЕВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

П. В. Ушаков

В этой статье предъявлены IA-автоморфизмы метабелевых произведений двух абелевых групп скручением, которые не являются внутренними и, следовательно, не индуцируются никакими автоморфизмами свободных произведений тех же абелевых групп.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Автоморфизм группы K называется *IA-автоморфизмом*, если он индуцирует тождественное отображение в факторгруппе K/K' , где K' – коммутант K . Эндоморфизм группы K называется *IA-эндоморфизмом*, если он индуцирует тождественное отображение в факторгруппе K/K' .

С. Бахмут, Е. Форманек, Х. Мочизуки [1] доказали, что если F_2 – абсолютно свободная группа ранга 2, $R \triangleleft F_2$, $R \leq F_2'$ и групповое кольцо $\mathbb{Z}(F_2/R)$ без делителей нуля, то любой IA-автоморфизм группы F_2/R' внутренний.

Для любой группы K мы обозначим через $\mathbb{Z}K$ целочисленное групповое кольцо группы K , через K' мы обозначим коммутант группы K , а через K'' коммутант коммутанта группы K . В данной работе мы докажем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = A_1 * A_2$ – свободное произведение двух нетривиальных конечных абелевых групп, не являющихся одновременно циклическими порядка 2. Допустим, что порядки групп A_1 и A_2 не являются взаимно простыми. Тогда не всякий IA-автоморфизм группы A/A'' является внутренним.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A = A_1 * A_2$ – свободное произведение двух нетривиальных бесконечных абелевых групп. Если целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}(A_1 \times A_2)$ прямого произведения групп A_1 и A_2 имеет нетривиальные единицы, то не всякий IA-автоморфизм группы A/A'' является внутренним.

Полезно отметить, что любой IA-автоморфизм свободного произведения A двух нетривиальных абелевых групп является внутренним; следовательно, невнутренний IA-автоморфизм группы A/A'' не индуцируется никаким IA-автоморфизмом группы A .

В данной работе мы будем использовать следующие обозначения. Через $A = A_1 * A_2$ мы обозначим свободное произведение двух нетривиальных абелевых групп A_1 и A_2 . Мы обозначим $G \stackrel{\text{def}}{=} A/A''$, $H \stackrel{\text{def}}{=} A/A'$. Для каждого $x \in G$ мы обозначим его образ

Исследования частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00420, № 96-15-96050 и № 99-01-00894.

в H через $\bar{x}$. Для каждого $x \in A$ мы обозначим его образ в H через $\bar{x}$. Для каждого $x \in A$ мы обозначим его образ в G через $\tilde{x}$. Образы групп A_1, A_2 в группе G мы обозначим через G_1, G_2 соответственно. Образы групп A_1, A_2 в группе H мы обозначим через H_1, H_2 соответственно. Под $\mathbb{Z}H(H_1 - 1)$ мы будем понимать идеал кольца $\mathbb{Z}H$, порожденный всеми $(h - 1), h \in H_1$. Аналогично, под $\mathbb{Z}H(H_2 - 1)$ мы будем понимать идеал кольца $\mathbb{Z}H$, порожденный всеми $(h - 1), h \in H_2$.

2. Обобщенные дифференцирования групповых колец.¹ Вложение Шмелькина (см. [2]) позволяет ввести отображения $\bar{D}_1, \bar{D}_2$, которые играют при исследовании группы A/A'' ту же роль, которую дифференцирования Фокса $\bar{\partial}/\partial(x_1), \bar{\partial}/\partial(x_2)$ играют при исследовании групп вида F_2/F_2'' , где $F_2 = F_2(x_1, x_2)$ – свободная группа с двумя порождающими x_1, x_2 .

Напомним формулировку вложения Шмелькина. Пусть $P \triangleleft A, P \subseteq C, C$ – декартова подгруппа группы A . Пусть M_P – свободный модуль с двумя свободными порождающими $s_{1,P}, s_{2,P}$ над $\mathbb{Z}(A/P)$. Пусть Ξ_P – группа матриц вида

$$\begin{vmatrix} u & u_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad u \in A/P, \quad u_1 \in M_P.$$

Тогда существует вложение $\chi_P: A/P' \rightarrow \Xi_P$ такое, что

$$\chi_P(gP') = \begin{vmatrix} gP & (gP - 1)s_{1,P} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad g \in A_1,$$

и

$$\chi_P(gP') = \begin{vmatrix} gP & (gP - 1)s_{2,P} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad g \in A_2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенным дифференцированием по компоненте $i = 1, 2$ называется отображение $D_i: \mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}A$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

- 1) для любых $a, b \in \mathbb{Z}A$ выполнено $D_i(a + b) = D_i(a) + D_i(b)$,
- 2) для любых $a, b \in \mathbb{Z}A$ выполнено $D_i(ab) = aD_i(b) + \varepsilon(b)D_i(a)$,
- 3) для любого $a \in A_i$ выполнено $D_i(a) = a - 1$,
- 4) для любого $a \in A_j, j \neq i$, выполнено $D_i(a) = 0$,

где ε – гомоморфизм тривиализации (также называемый *дополняющим гомоморфизмом*).

Покажем, что определение обобщенных дифференцирований корректно. Понятно, что если существует хотя бы одно отображение, удовлетворяющее свойствам 1)–4) определения дифференцирований, то оно единственно. Покажем, что одно такое отображение существует. Будем использовать вложение $\chi_{\{1\}}$. Мы имеем

$$\chi_{\{1\}}(x) = \begin{vmatrix} x & \hat{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

¹Уже после того, как эта статья была отдана в редакцию, автор узнал, что подобное обобщение дифференцирований Фокса было введено несколькими годами ранее в работах Н. С. Романовского.

для всех $x \in A$. Каждый элемент $r \in \mathbb{Z}A$ может быть представлен в виде суммы

$$r = \sum_{i=1}^I z_i r_i, \quad 0 \neq z_i \in \mathbb{Z}, \quad r_i \in A, \quad r_i \neq r_j, \quad i \neq j.$$

Рассмотрим отображение D , которое отображает r в $\sum_{i=1}^I z_i \hat{r}_i$. Очевидно, что для всех $u, v \in A$ выполнено $D(uv) = uD(v) + D(u)$. Более того, если $u \in A_k, k = 1, 2$, то $D(u) = (u - 1)s_{k, \{1\}}$. Для всех $u, v \in \mathbb{Z}A$ выполнено $D(u + v) = D(u) + D(v)$. Пусть $r = \sum_{i=1}^I z_i r_i \in \mathbb{Z}A, p = \sum_{j=1}^J z'_j r'_j \in \mathbb{Z}A$. Тогда

$$\begin{aligned} D(rp) &= D\left(\sum_{i=1, I; j=1, J} z_i z'_j r_i r'_j\right) \quad (\text{по определению } D) \\ &= \sum_{i=1, I; j=1, J} z_i z'_j D(r_i r'_j) = \sum_{i=1, I; j=1, J} z_i z'_j (r_i D(r'_j) + D(r_i)) \\ &= \sum_{i=1, I; j=1, J} z_i z'_j r_i D(r'_j) + \sum_{i=1, I; j=1, J} z_i z'_j D(r_i) = rD(p) + \varepsilon(p)D(r). \end{aligned}$$

Рассмотрим отображение $\omega_k, k = 1, 2$, которое отображает $\sum_{j=1, 2} a_j s_{j, \{1\}}, a_j \in \mathbb{Z}A$, в a_k . Очевидно, что отображение $\omega_k(D)$ существует, единственно и удовлетворяет свойствам 1)–4) определения дифференцирований. Следовательно, обобщенные дифференцирования определены корректно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Индукцированным обобщенным дифференцированием по компоненте $i = 1, 2$ называется отображение $\bar{D}_i: \mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}H$, определяемое по правилу $\bar{D}_i(a) \stackrel{\text{def}}{=} \tau(D_i(a)), a \in A, \tau$ – естественное отображение $\mathbb{Z}A \rightarrow \mathbb{Z}H$.*

Легко заметить, что

$$\chi_{\{1\}}(x) = \left\| \begin{array}{cc} x & D_1(x)s_{1, \{1\}} + D_2(x)s_{2, \{1\}} \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad x \in A.$$

Из этого и вложения $\chi_{A'}$ мы видим, что $\bar{D}_i(a) = 0, i = \overline{1, 2}$, тогда и только тогда, когда $a \in A''$. Фактически, дифференцирования $\bar{D}_i, i = \overline{1, 2}$, отображают $\mathbb{Z}G$ в $\mathbb{Z}H$, поскольку $\bar{D}_i(ab) = \bar{D}_i(a)$ для всяких $a \in A, b \in A''$.

Важнейшим свойством дифференцирований является следующее (см. [3]). Если $a \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1), b \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1), u \in H, u - 1 = a + b$, то существует $v \in G, \bar{D}_1(v) = a, \bar{D}_2(v) = b, \bar{v} = u$. Обратно, для всякого $v \in G$ выполнено $\bar{D}_1(v) \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1), \bar{D}_2(v) \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1), \bar{D}_1(v) + \bar{D}_2(v) = \bar{v} - 1$.

3. Задание IA-автоморфизмов группы G матрицами над $\mathbb{Z}H$. Рассмотрим множество матриц $\tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$, состоящее из всех матриц

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 + s_1 & -s_1 \\ -s_2 & 1 + s_2 \end{array} \right\|$$

таких, что $s_1 \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1), s_2 \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$. Это множество замкнуто относительно операции умножения. Действительно, пусть

$$M_1 = \left\| \begin{array}{cc} 1 + s_1 & -s_1 \\ -s_2 & 1 + s_2 \end{array} \right\| \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H), \quad M_2 = \left\| \begin{array}{cc} 1 + c_1 & -c_1 \\ -c_2 & 1 + c_2 \end{array} \right\| \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H).$$

Тогда

$$M_1 M_2 = \left\| \begin{array}{cc} 1 + (s_1 + c_1 + s_1 c_1 + s_1 c_2) & -(s_1 + c_1 + s_1 c_1 + s_1 c_2) \\ -(s_2 + s_2 c_1 + c_2 + s_2 c_2) & 1 + (s_2 + s_2 c_1 + c_2 + s_2 c_2) \end{array} \right\|,$$

$$(s_1 + c_1 + s_1 c_1 + s_1 c_2) \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1), \quad (s_2 + s_2 c_1 + c_2 + s_2 c_2) \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1).$$

Каждой матрице

$$M = \left\| \begin{array}{cc} 1 + s_1 & -s_1 \\ -s_2 & 1 + s_2 \end{array} \right\|$$

из $\tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$ мы сопоставим отображение α_M , определяемое по правилу

$$\alpha_M: u \rightarrow v, \quad u, v \in G, \quad (\overline{D}_1(v), \overline{D}_2(v)) = (\overline{D}_1(u), \overline{D}_2(u)) \left\| \begin{array}{cc} 1 + s_1 & -s_1 \\ -s_2 & 1 + s_2 \end{array} \right\|.$$

Отображение α_M определено корректно, поскольку

$$\begin{aligned} \overline{D}_1(u)(1 + s_1) - \overline{D}_2(u)s_2 &\in \mathbb{Z}H(H_1 - 1), \\ -\overline{D}_1(u)s_1 + \overline{D}_2(u)(1 + s_2) &\in \mathbb{Z}H(H_2 - 1), \\ \overline{D}_1(u)(1 + s_1) - \overline{D}_2(u)s_2 - \overline{D}_1(u)s_1 + \overline{D}_2(u)(1 + s_2) &= \overline{D}_1(u) + \overline{D}_2(u) = \bar{u} - 1, \end{aligned}$$

откуда следует, что каждому $u \in G$ сопоставляется, и единственный, $v \in G$.

Проверим, что α_M является эндоморфизмом группы G . Допустим, $u_1, u_2 \in G$. Пусть $\alpha_M(u_1) = v_1$, $\alpha_M(u_2) = v_2$. Докажем, что $v_1 v_2 = \alpha_M(u_1 u_2)$. Заметим, что $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$,

$$\begin{aligned} \overline{D}_1(v_1 v_2) &= \bar{u}_1 \overline{D}_1(v_2) + \overline{D}_1(v_1) \\ &= \bar{u}_1 (\overline{D}_1(u_2)(1 + s_1) - \overline{D}_2(u_2)s_2) + \overline{D}_1(u_1)(1 + s_1) - \overline{D}_2(u_1)s_2 \\ &= (\bar{u}_1 \overline{D}_1(u_2) + \overline{D}_1(u_1))(1 + s_1) - (\bar{u}_1 \overline{D}_2(u_2) + \overline{D}_2(u_1)s_2) \\ &= \overline{D}_1(u_1 u_2)(1 + s_1) - \overline{D}_2(u_1 u_2)s_2. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\overline{D}_2(v_1 v_2) = -\overline{D}_1(u_1 u_2)s_1 + \overline{D}_2(u_1 u_2)(1 + s_2).$$

Следовательно, $v_1 v_2 = \alpha_M(u_1 u_2)$.

Обратим внимание на то, что $\alpha_M \in \text{IEnd}(G)$, $M \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$, поскольку $\overline{\alpha_M(u)} = \bar{u}$, $u \in G$. Заметим также, что отображение $\alpha: \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H) \rightarrow \text{IEnd}(G)$, $M \rightarrow \alpha_M$, является гомоморфизмом, поскольку произведению матриц $M_1 M_2$ соответствует композиция $\alpha_{M_2}(\alpha_{M_1})$. Нам понадобится следующий результат.

ЛЕММА 1. Пусть $\beta \in \text{Inn } G$, $u \in G$, $\beta: g \rightarrow ugu^{-1}$, $g \in G$. Существует $M \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$ такая, что $\alpha_M = \beta$. При этом $\det M = \bar{u}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что матрица

$$M = \begin{vmatrix} 1 + \overline{D}_2(u) & -\overline{D}_2(u) \\ -\overline{D}_1(u) & 1 + \overline{D}_1(u) \end{vmatrix} \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$$

может быть взята в качестве искомой. Достаточно проверить, что $\alpha_M(g) = \beta(g)$ для всех $g \in G_1$ и $g \in G_2$. Пусть $g \in G_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{D}_2(ugu^{-1}) &= \bar{u}\overline{D}_2(gu^{-1}) + \overline{D}_2(u) = \bar{u}\bar{g}\overline{D}_2(u^{-1}) + \bar{u}D_2(g) + \overline{D}_2(u) \\ &= -\bar{u}\bar{g}\bar{u}^{-1}\overline{D}_2(u) + \overline{D}_2(u) = (1 - \bar{g})\overline{D}_2(u). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\overline{D}_1(ugu^{-1}) = \overline{ugu^{-1}} - 1 - (1 - \bar{g})\overline{D}_2(u) = (\bar{g} - 1)(\overline{D}_2(u) + 1).$$

Следовательно, $\alpha_M(g) = \beta(g)$. Аналогичные рассуждения можно провести для $g \in G_2$.

То, что $\det M = \bar{u}$, проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Полезно отметить и то, что если $M \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$, $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}H)$, то $M^{-1} \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$. Действительно, кольцо $\mathbb{Z}H$ коммутативно; следовательно, определитель матрицы M существует и обратим. Пусть

$$M = \begin{vmatrix} 1 + s_1 & -s_1 \\ -s_2 & 1 + s_2 \end{vmatrix} \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H).$$

Тогда $\det M = 1 + s_1 + s_2$ и

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} 1 - s_1(\det M)^{-1} & s_1(\det M)^{-1} \\ s_2(\det M)^{-1} & 1 - s_2(\det M)^{-1} \end{vmatrix} \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H).$$

Продemonстрируем, как по матрице $M \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$ строить явно α_M .

ЛЕММА 2. Допустим, что

$$M = \begin{vmatrix} 1 + a & -a \\ -b & 1 + b \end{vmatrix} \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H).$$

Предположим, что

$$a = \sum_{i=1}^I z_i \bar{a}_i (\bar{b}_i - 1), \quad b = \sum_{j=1}^J t_j \bar{c}_j (\bar{d}_j - 1),$$

$$I, J \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a_i, d_j \in A_1, \quad b_i, c_j \in A_2, \quad z_i, t_j = \pm 1.$$

(Очевидно, что всякие $a \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1)$, $b \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$ могут быть записаны в таком виде.) Тогда

$$\alpha_M: g \rightarrow \begin{cases} g \prod_{i=1}^I [g, \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}]^{z_i}, & g \in G_1, \\ g \prod_{j=1}^J [g, \tilde{d}_j^{-1} \tilde{c}_j^{-1}]^{t_j}, & g \in G_2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим справедливость утверждений леммы непосредственно. Пусть $g \in G_1$. Тогда

$$\overline{D}_2\left(g \prod_{i=1}^I [g, \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}]^{z_i}\right) = \bar{g} \overline{D}_2\left(\prod_{i=1}^I [g, \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}]^{z_i}\right) = \bar{g} \left(\sum_{i=1}^I z_i \overline{D}_2([g, \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}])\right).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \overline{D}_2([g, \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}]) &= \overline{D}_2(g^{-1} \tilde{a}_i \tilde{b}_i g \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}) = \bar{g}^{-1} \overline{D}_2(\tilde{a}_i \tilde{b}_i g \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}) \\ &= \bar{g}^{-1} \bar{a}_i \bar{b}_i \overline{D}_2(g \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}) + \bar{g}^{-1} \overline{D}_2(\tilde{a}_i \tilde{b}_i) \\ &= \bar{g}^{-1} \bar{a}_i \bar{b}_i \bar{g} \overline{D}_2(\tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}) + \bar{g}^{-1} \overline{D}_2(\tilde{a}_i \tilde{b}_i) = (\bar{g}^{-1} - 1) \overline{D}_2(\tilde{a}_i \tilde{b}_i) \\ &= (\bar{g}^{-1} - 1) \bar{a}_i \overline{D}_2(\tilde{b}_i) = (\bar{g}^{-1} - 1) \bar{a}_i (\bar{b}_i - 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overline{D}_2\left(g \prod_{i=1}^I [g, \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}]^{z_i}\right) = -(\bar{g} - 1) \sum_{i=1}^I z_i \bar{a}_i (\bar{b}_i - 1) = \overline{D}_2(\alpha_M(g)).$$

Поскольку

$$\overline{g \prod_{i=1}^I [g, \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}]^{z_i}} = \bar{g},$$

мы имеем

$$\overline{D}_1(\alpha_M(g)) = \overline{D}_1\left(g \prod_{i=1}^I [g, \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}]^{z_i}\right),$$

откуда вытекает

$$\alpha_M(g) = g \prod_{i=1}^I [g, \tilde{b}_i^{-1} \tilde{a}_i^{-1}]^{z_i}.$$

Аналогично, при $g \in G_2$ справедливо

$$\alpha_M(g) = g \prod_{j=1}^J [g, \tilde{a}_j^{-1} \tilde{c}_j^{-1}]^{t_j}.$$

Лемма доказана.

4. Метабелево произведение бесконечных абелевых групп.

ЛЕММА 3. *Предположим, что A_1, A_2 – бесконечные абелевы группы. Допустим, что $\alpha_{M_1} = \alpha_{M_2}$ для некоторых $M_1, M_2 \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$. Тогда $M_1 = M_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 + s_1 & -s_1 \\ -s_2 & 1 + s_2 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 + c_1 & -c_1 \\ -c_2 & 1 + c_2 \end{vmatrix}.$$

Для каждого $g \in G_1$ выполнено $\overline{D}_1(g) = \bar{g} - 1$, $\overline{D}_2(g) = 0$. Поскольку для всех $g \in G_1$ выполнено $\alpha_{M_1}(g) = \alpha_{M_2}(g)$, мы имеем $(h-1)(s_1 - c_1) = 0$ для всех $h \in H_1$. Ввиду бесконечности подгруппы H_1 получим, что $s_1 = c_1$. Аналогично, ввиду бесконечности H_2 имеем $s_2 = c_2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $a \in \mathbb{Z}H$, $\varepsilon(a) = 1$, где ε – гомоморфизм тривиализации. Тогда $a = 1 + b + c$, где $b \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1)$, $c \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем записать $a = 1 + d$, $\varepsilon(d) = 0$. Далее, $d = \sum_{i=1}^I \varepsilon_i u_i v_i$, $u_i \in H_1$, $v_i \in H_2$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $I \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^I \varepsilon_i u_i v_i = \sum_{i=1}^I \varepsilon_i u_i (v_i - 1) + \sum_{i=1}^I \varepsilon_i u_i.$$

Легко видеть, что $\varepsilon(\sum_{i=1}^I \varepsilon_i u_i) = 0$, откуда следует, что $\sum_{i=1}^I \varepsilon_i u_i \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$. Возьмем $b = \sum_{i=1}^I \varepsilon_i u_i (v_i - 1)$ и $c = \sum_{i=1}^I \varepsilon_i (u_i - 1) = \sum_{i=1}^I \varepsilon_i u_i$. Они удовлетворяют формулировке леммы. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Допустим, что $\mathbb{Z}H$ имеет некоторую нетривиальную единицу $u \in \mathbb{Z}H$. Без ограничения общности можно предположить, что $\varepsilon(u) = 1$. Тогда по лемме 4 существуют $b \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$, $a \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1)$ такие, что $u = 1 + a + b$. Возьмем в качестве искомого автоморфизма

$$\alpha_M, M = \begin{vmatrix} 1 + a & -a \\ -b & 1 + b \end{vmatrix} \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H).$$

Эндоморфизм α_M является автоморфизмом, поскольку u – обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}H$. С другой стороны, если бы этот автоморфизм являлся внутренним, то по лемме 1 этот автоморфизм задавался бы матрицей $M' \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$, $\det M' \in H$. По лемме 3 $M = M'$. Но это противоречит выбору элемента u . Теорема доказана.

Отметим, что “почти каждое” кольцо $\mathbb{Z}H$ с элементами конечного порядка содержит нетривиальные единицы. В действительности, Г. Хигман [4] доказал, что если K – конечная абелева группа, то $\mathbb{Z}K$ не содержит нетривиальных единиц тогда и только тогда, когда либо K – прямое произведение нескольких циклических групп порядков 2 и 3, либо K – прямое произведение нескольких циклических групп порядков 2 и 4.

Завершим раздел примером. Пусть A_2, A_1 – бесконечные абелевы группы. Допустим, что $t \in A_1$, $t^5 = 1$. Тогда

$$(1 - t + t^2)(t + t^2 - t^4) = t - t^2 + t^3 + t^2 - t^3 + t^4 - t^4 + t^5 - t^6 = t^5 = 1.$$

Построим автоморфизм, указанный в доказательстве теоремы 2. Положим

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ (\bar{t} - 1) - (\bar{t}^2 - 1) & 1 + (\bar{t}^2 - 1) - (\bar{t} - 1) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -(\bar{t}-1) - (\bar{t}^2-1) + (\bar{t}^2-1) & 1 + (\bar{t}-1) + (\bar{t}^2-1) - (\bar{t}^2-1) \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$\alpha_M: \begin{cases} g \rightarrow g, & g \in G_1, \\ g \rightarrow g[g, \bar{t}^4]^{-1}[g, \bar{t}^3], & g \in G_2, \end{cases} \quad \text{и} \quad \alpha_{M^{-1}}: \begin{cases} g \rightarrow g, & g \in G_1, \\ g \rightarrow g[g, \bar{t}^4][g, \bar{t}^3][g, \bar{t}]^{-1}, & g \in G_2. \end{cases}$$

5. Метабелево произведение конечных абелевых групп. В этом разделе мы докажем теорему 1. Мы предполагаем, что A_1, A_2 – конечные абелевы группы и их порядки не являются взаимно простыми. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $A_1 = C \times D, A_2 = E \times F$, где C, E – конечные абелевы, а D, F – циклические группы не взаимно простых порядков.

Пусть $|C| = n_1, |D| = n_2, |E| = k_1, |F| = k_2, (k_2, n_2) \neq 1$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ идеал кольца $\mathbb{Z}H$, порожденный элементом

$$\acute{a} = \left(\sum_{a \in A_1} \bar{a} \right) = \left(\sum_{c \in C} \bar{c} \right) \left(\sum_{d \in D} \bar{d} \right).$$

Аналогично, обозначим через $\mathcal{B}$ идеал кольца $\mathbb{Z}H$, порожденный элементом

$$\acute{b} = \left(\sum_{b \in A_2} \bar{b} \right) = \left(\sum_{e \in E} \bar{e} \right) \left(\sum_{f \in F} \bar{f} \right).$$

Отметим, что если $a_0 \in \mathbb{Z}H_1$ и для всех $a \in H_1$ выполнено $(a-1)a_0 = 0$, то $a_0 = \acute{a}$, $\acute{a} \in \mathbb{Z}$. Аналогично, если $b_0 \in \mathbb{Z}H_2$ и для всех $b \in H_2$ выполнено $(b-1)b_0 = 0$, то $b_0 = \acute{b}$, $\acute{b} \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\mathcal{A}(H_2 - 1) = \mathcal{A} \cap \mathbb{Z}H(H_2 - 1), \mathcal{B}(H_1 - 1) = \mathcal{B} \cap \mathbb{Z}H(H_1 - 1)$. Обозначим также $\hat{a} = (\sum_{c \in C} \bar{c})$ и $\hat{b} = (\sum_{e \in E} \bar{e})$.

Матрицы из $\tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$ определяют IА-эндоморфизмы группы G . Справедлива

ЛЕММА 5. Пусть

$$\begin{vmatrix} 1-s_1 & s_1 \\ s_2 & 1-s_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1-s'_1 & s'_1 \\ s'_2 & 1-s'_2 \end{vmatrix} \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H).$$

Эти матрицы определяют один и тот же IА-эндоморфизм тогда и только тогда, когда $s_1 - s'_1 \in \mathcal{A}(H_2 - 1), s_2 - s'_2 \in \mathcal{B}(H_1 - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $s_1 - s'_1 \in \mathcal{A}(H_2 - 1)$ и $s_2 - s'_2 \in \mathcal{B}(H_1 - 1)$, то для всякого $a \in H_1$ справедливо $(a-1)s_1 = (a-1)s'_1$ и для каждого $b \in H_2$ справедливо $(b-1)s_2 = (b-1)s'_2$, откуда следует, что матрицы определяют один и тот же IА-эндоморфизм.

Обратно, пусть матрицы определяют один и тот же IА-автоморфизм. Тогда для всех $a \in H_1$ справедливо $(a-1)s_1 = (a-1)s'_1$ и для каждого $b \in H_2$ справедливо $(b-1)s_2 = (b-1)s'_2$.

Очевидно, что

$$(s_1 - s'_1) = h_1(g_1 - 1) + h_2(g_2 - 1) + \dots + h_m(g_m - 1), \quad g_i \in H_2, \quad h_i \in \mathbb{Z}H_1.$$

Из того, что $(a-1)(s_1 - s'_1) = 0$ для всех $a \in H_1$, следует, что $(a-1)h_i = 0, i = \overline{1, m}, a \in H_1$. Следовательно, $h_i = \acute{a}$, $\acute{a} \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, m}$. Таким образом, $s_1 - s'_1 \in \mathcal{A}(H_2 - 1)$. Аналогично, $s_2 - s'_2 \in \mathcal{B}(H_1 - 1)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Предположим, что матрицы*

$$K_1 = \begin{vmatrix} 1 - s_1 & s_1 \\ s_2 & 1 - s_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad K_2 = \begin{vmatrix} 1 - c_1 & c_1 \\ c_2 & 1 - c_2 \end{vmatrix}$$

принадлежат множеству $\tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$, причем

$$K_1 K_2 = \begin{vmatrix} 1 - d_1 & d_1 \\ d_2 & 1 - d_2 \end{vmatrix},$$

где $d_1 \in \mathcal{A}(H_2 - 1)$, $d_2 \in \mathcal{B}(H_1 - 1)$, и

$$K_2 K_1 = \begin{vmatrix} 1 - d_3 & d_3 \\ d_4 & 1 - d_4 \end{vmatrix},$$

где $d_3 \in \mathcal{A}(H_2 - 1)$, $d_4 \in \mathcal{B}(H_1 - 1)$. Тогда определяемые матрицами K_1 , K_2 ΓA -эндоморфизмы α_{K_1} и α_{K_2} являются взаимнообратными ΓA -автоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма является непосредственным следствием леммы 5.

Обозначим

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \hat{a}\hat{b} - k_2\hat{a}\hat{b} \in \mathbb{Z}H(H_2 - 1), \quad p \stackrel{\text{def}}{=} \hat{a}\hat{b} - n_2\hat{a}\hat{b} \in \mathbb{Z}H(H_1 - 1).$$

Ввиду того, что

$$\hat{a}\hat{b}\hat{a}\hat{b} = n_1 k_1 k_2 \hat{a}\hat{b}, \quad \hat{a}\hat{b}\hat{a}\hat{b} = n_1 k_1 \hat{a}\hat{b}, \quad \hat{a}\hat{b}\hat{a}\hat{b} = n_1 k_1 \hat{a}\hat{b}, \quad \hat{a}\hat{b}\hat{a}\hat{b} = n_1 k_1 \hat{a}\hat{b},$$

справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} rr &= -n_1 k_1 k_2 r, & pp &= -n_1 k_1 n_2 p, & rp &= -n_1 k_1 n_2 r + \theta_1, & \theta_1 &\in \mathcal{A}(H_2 - 1), \\ pr &= -n_1 k_1 k_2 p + \theta_2, & \theta_2 &\in \mathcal{B}(H_1 - 1). \end{aligned}$$

Рассмотрим матрицы

$$K_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 1 - m_1 r & m_1 r \\ l_1 p & 1 - l_1 p \end{vmatrix}, \quad K_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 1 - m_2 r & m_2 r \\ l_2 p & 1 - l_2 p \end{vmatrix},$$

где $m_1, m_2, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$. Очевидно, $K_1, K_2 \in \tilde{M}_2(\mathbb{Z}H)$. Покажем, что можно выбрать m_1, m_2, l_1, l_2 так, чтобы $K_1 K_2$ и $K_2 K_1$ удовлетворяли условиям леммы 6. Получаем

$$K_1 K_2 = \begin{vmatrix} 1 - (m_1 r + m_2 r - m_1 m_2 r r - m_1 l_2 r p) & m_1 r + m_2 r - m_1 m_2 r r - m_1 l_2 r p \\ l_1 p + l_2 p - m_2 l_1 p r - l_1 l_2 p p & 1 - (l_1 p + l_2 p - m_2 l_1 p r - l_1 l_2 p p) \end{vmatrix}.$$

Аналогично,

$$K_2 K_1 = \begin{vmatrix} 1 - (m_2 r + m_1 r - m_2 m_1 r r - m_2 l_1 r p) & m_2 r + m_1 r - m_2 m_1 r r - m_2 l_1 r p \\ l_2 p + l_1 p - m_1 l_2 p r - l_2 l_1 p p & 1 - (l_2 p + l_1 p - m_1 l_2 p r - l_2 l_1 p p) \end{vmatrix}.$$

Положим

$$\begin{aligned}\omega_1 &\stackrel{\text{def}}{=} (m_1 + m_2 + m_1 m_2 k_2 n_1 k_1 + m_1 l_2 n_2 n_1 k_1) r, \\ \omega_2 &\stackrel{\text{def}}{=} (l_1 + l_2 + m_2 l_1 k_2 n_1 k_1 + l_1 l_2 n_2 n_1 k_1) p, \\ \omega_3 &\stackrel{\text{def}}{=} (m_2 + m_1 + m_2 m_1 k_2 n_1 k_1 + m_2 l_1 n_2 n_1 k_1) r, \\ \omega_4 &\stackrel{\text{def}}{=} (l_2 + l_1 + m_1 l_2 k_2 n_1 k_1 + l_2 l_1 n_2 n_1 k_1) p.\end{aligned}$$

Тогда получим

$$K_1 K_2 = \left\| \begin{array}{cc} 1 - \omega_1 + \theta_3 & \omega_1 - \theta_3 \\ \omega_2 - \theta_4 & 1 - \omega_2 + \theta_4 \end{array} \right\|, \quad \theta_3 \in \mathcal{A}(H_2 - 1), \quad \theta_4 \in \mathcal{B}(H_1 - 1),$$

и

$$K_2 K_1 = \left\| \begin{array}{cc} 1 - \omega_3 + \theta_5 & \omega_3 - \theta_5 \\ \omega_4 - \theta_6 & 1 - \omega_4 + \theta_6 \end{array} \right\|, \quad \theta_5 \in \mathcal{A}(H_2 - 1), \quad \theta_6 \in \mathcal{B}(H_1 - 1).$$

Выберем

$$m_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_2}{(n_2, k_2)}, \quad m_2 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{n_2}{(n_2, k_2)}, \quad l_1 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{k_2}{(n_2, k_2)}, \quad l_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_2}{(n_2, k_2)}.$$

Тогда $l_1 = -l_2, m_2 = -m_1, m_2 k_2 = -l_2 n_2, m_1 k_2 = -l_1 n_2$. Таким образом, при данном выборе l_1, l_2, m_1, m_2 мы имеем $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0$ и условия леммы 6 удовлетворены. Из этого следует, что α_{K_1} и α_{K_2} — 1A-автоморфизмы, $\alpha_{K_1} = \alpha_{K_2}^{-1}$.

ЛЕММА 7. *Допустим, что $|A_1| \neq 2$ или $|A_2| \neq 2$. Тогда не существуют $a \in \mathcal{A}(H_2 - 1), b \in \mathcal{B}(H_1 - 1), u \in H$ такие, что $1 - m_1 r - l_1 p + a + b = u$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют a, b, u , указанные в формулировке леммы. По определению r и p мы имеем

$$\begin{aligned}1 - m_1 r - l_1 p + a + b &= 1 - m_1 \hat{a} \hat{b} \left(\sum_{f \in F} \bar{f} - k_2 \right) - l_1 \hat{a} \hat{b} \left(\sum_{d \in D} \bar{d} - n_2 \right) \\ &\quad + \hat{a} \left(\sum_{i=1}^{d_1} \pm (f_i - 1) \right) + \hat{b} \left(\sum_{j=1}^{d_2} \pm (e_j - 1) \right),\end{aligned}$$

где $e_j \in H_1, f_i \in H_2; d_1, d_2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим гомоморфизм $\mathcal{P}: \mathbb{Z}H \rightarrow \mathbb{Z}H$, который отображает $\bar{a}_i \rightarrow 1, \bar{a}_i \in H_1$, и $\bar{b}_j \rightarrow \bar{b}_j, \bar{b}_j \in H_2$. Тогда

$$\mathcal{P}(u) = \mathcal{P}(1 - m_1 r - l_1 p + a + b) = 1 - m_1 n_1 \hat{b} \left(\sum_{f \in F} \bar{f} - k_2 \right) + n_1 n_2 \left(\sum_{i=1}^{d_1} \pm (f_i - 1) \right).$$

Заметим, что

$$-m_1 n_1 \hat{b} \left(\sum_{f \in F} \bar{f} - k_2 \right) + n_1 n_2 \left(\sum_{i=1}^{d_1} \pm (f_i - 1) \right) \neq 0$$

ввиду выбора m_1 . Если $n_1 \geq 1$, то

$$\mathcal{P}(u) - 1 \neq -m_1 n_1 \hat{b} \left(\sum_{f \in F} \bar{f} - k_2 \right) + n_1 n_2 \left(\sum_{i=1}^{d_1} \pm (f_i - 1) \right).$$

Следовательно, $n_1 = 1$. Аналогично, $k_1 = 1$. Мы видим, что $\hat{a} = 1$, $\hat{b} = 1$. Предположим, что $k_2 > 2$ и $F = \langle c \rangle_{k_2}$. Тогда

$$-m_1 \left(\sum_{f \in F} \bar{f} - k_2 \right) + n_2 \left(\sum_{i=1}^{d_1} \pm (f_i - 1) \right) = \sum_{i=1}^{k_2-1} d'_i \bar{c}^i + d', \quad 0 \neq d'_i \in \mathbb{Z}, \quad d' \in \mathbb{Z}.$$

Если $d' \neq 0$, то мощность носителя элемента

$$-m_1 \left(\sum_{f \in F} \bar{f} - k_2 \right) + n_2 \left(\sum_{i=1}^{d_1} \pm (f_i - 1) \right)$$

больше двух. Если $d' = 0$, то при некотором $1 \leq i \leq k_2$ $\bar{c}^i = 1$. И то, и другое невозможно. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В качестве автоморфизма, фигурирующего в формулировке данной теоремы, мы возьмем α_{K_1} . Мы должны доказать, что этот автоморфизм не является внутренним. По лемме 1 если бы этот автоморфизм был внутренним, он бы задавался матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 + \overline{D}_2(\bar{u}) & -\overline{D}_2(\bar{u}) \\ -\overline{D}_1(\bar{u}) & 1 + \overline{D}_1(\bar{u}) \end{pmatrix},$$

где $u \in G$ — элемент, при помощи которого α_{K_1} действовал бы сопряжением. Ввиду леммы 5 мы получим

$$\overline{D}_1(\bar{u}) = -l_1 p + b, \quad b \in \mathcal{B}(H_1 - 1), \quad \overline{D}_2(\bar{u}) = -m_1 r + a, \quad a \in \mathcal{A}(H_2 - 1).$$

Поскольку $\overline{D}_2(\bar{u}) + \overline{D}_1(\bar{u}) = u - 1$, мы имеем $-l_1 p + b - m_1 r + a + 1 = u$, что невозможно по лемме 7. Теорема доказана.

Необходимо отметить, что если $A_1 = \mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle_2$, $A_2 = \mathbb{Z}_2 = \langle b \rangle_2$, то $A/A'' \cong A$ и все автоморфизмы группы A/A'' индуцируются автоморфизмами группы A . (A' является циклической подгруппой, порожденной $[a, b]$.)

Полезно заметить, что мы не требуем наличия у кольца $\mathbb{Z}H$ нетривиальных единиц. Например, в следующем примере $\mathbb{Z}H$ не имеет нетривиальных единиц (это следует из теоремы Хигмана), однако невнутренние IA-автоморфизмы имеются в наличии.

Возьмем $A_1 \cong \mathbb{Z}_2$, $A_1 = \langle a_1 \rangle_2$, $A_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $A_2 = \langle b_1 \rangle_2 \times \langle b_2 \rangle_2$. Мы имеем $\hat{a} = 1$, $\hat{b} = (\bar{b}_1 + 1)$, $r = \hat{b}(\bar{b}_2 - 1) = (\bar{b}_1 + 1)(\bar{b}_2 - 1)$, $p = \hat{b}(\bar{a}_1 - 1) = (\bar{b}_1 + 1)(\bar{a}_1 - 1)$. При этом

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 - (\bar{b}_1 + 1)(\bar{b}_2 - 1) & (\bar{b}_1 + 1)(\bar{b}_2 - 1) \\ -(\bar{b}_1 + 1)(\bar{a}_1 - 1) & 1 + (\bar{b}_1 + 1)(\bar{a}_1 - 1) \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 + (\bar{b}_1 + 1)(\bar{b}_2 - 1) & -(\bar{b}_1 + 1)(\bar{b}_2 - 1) \\ (\bar{b}_1 + 1)(\bar{a}_1 - 1) & 1 - (\bar{b}_1 + 1)(\bar{a}_1 - 1) \end{pmatrix}.$$

Соответственно получим

$$\alpha_{K_1}: g \rightarrow \begin{cases} g[g, \tilde{b}_1 \tilde{b}_2]^{-1}[g, \tilde{b}_2]^{-1}[g, \tilde{b}_1], & g \in G_1, \\ g[g, \tilde{a}_1 \tilde{b}_1][g, \tilde{a}_1], & g \in G_2, \end{cases}$$

и

$$\alpha_{K_2}: g \rightarrow \begin{cases} g[g, \tilde{b}_1 \tilde{b}_2][g, \tilde{b}_2][g, \tilde{b}_1]^{-1}, & g \in G_1, \\ g[g, \tilde{a}_1 \tilde{b}_1]^{-1}[g, \tilde{a}_1]^{-1}, & g \in G_2. \end{cases}$$

Автор благодарен А. Л. Шмелькину за поддержку и внимательное отношение к данной работе.

Автор признателен рецензенту за сделанные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bachmuth S., Formanek E., Mochizuki H. Y. IA-automorphisms of certain two-generator torsion-free groups // J. Algebra. 1976. V. 40. P. 19–30.
- [2] Шмелькин А. Л. О свободных произведениях групп // Матем. сб. 1969. Т. 79 (121). № 4 (8).
- [3] Шмелькин А. Л. О некоторых факторгруппах свободного произведения // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1979. Т. 5.
- [4] Higman G. The units of group-rings // Proc. London Math. Soc. (2). 1940. V. 46. № 3. P. 231–248.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: pvushakov@mtu-net.ru

Поступило

27.09.1999

Исправленный вариант

28.03.2001