Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дубровский, Обратные задачи спектрального анализа и интерполяция по Л. Карлесону, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 468–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm758>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:57:26

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПО Л. КАРЛЕСОНУ

В. В. Дубровский

Нашей задачей будет восстановление потенциала в псевдодифференциальном эллиптическом уравнении с частными производными с помощью интерполяционной теоремы Л. Карлесона и принципа С. Банаха сжимающих отображений.

Обозначим

$$\Pi = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b\}, \quad \Pi_4 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{2} \right\},$$

где $a > 0, b > 0$.

Рассмотрим в $H = L_2(\Pi)$ оператор T , который задается краевой задачей

$$\Delta \varphi = \lambda \varphi, \quad \varphi|_{\delta\Pi} = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа, $\delta\Pi$ – граница прямоугольника Π .

Введем оператор $T_\beta = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$ – спектральное разложение единицы оператора T , $\beta > 0$ и $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Пусть

$$\nu_{m,n}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi mn}{a} \sin \frac{\pi ny}{b}$$

– собственные ортонормированные в H функции оператора T_β , отвечающие собственным значениям

$$\lambda_{m,n}^\beta = \left(\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right)^\beta, \quad m, n = 1, \dots, \infty,$$

а $\sigma(T_\beta) = \bigcup_{m,n=1}^\infty \lambda_{m,n}^\beta$ – спектр оператора T_β . Собственные числа $\lambda_{m,n}^\beta$ оператора T_β будем нумеровать в порядке возрастания их величин с учетом кратности с помощью натурального индекса l :

$$0 < \lambda_1^\beta < \lambda_2^\beta \leq \dots \leq \lambda_l^\beta \leq \lambda_{l+1}^\beta \leq \dots$$

Обозначим через d_n^β расстояние от собственного числа λ_n^β до остальной части спектра $\sigma(T_\beta)$ оператора T_β .

По лемме 1 из работы [1] существует такая подпоследовательность натуральных чисел $\{n_t\}_{t=1}^\infty$, что

$$d_{n_t}^\beta \leq C_1 n_t^{\beta-1},$$

где $C_1 > 0$ не зависит от индекса t . Пусть P – оператор умножения на, вообще говоря, комплексную, измеримую по Лебегу, существенно ограниченную по модулю функцию $p(x, y)$, $(x, y) \in \Pi$;

μ_l^β – собственные значения оператора $T_\beta + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Заметим, что если a^2/b^2 иррациональное число, то спектр оператора T_β однократный. Пусть $\lambda_{n_k}^\beta$ – интерполяционная в смысле Карлесона (см. [2]) последовательность спектра $\sigma(T_\beta)$ оператора T_β в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Тогда существует такое число $\delta = \delta(\{\lambda_{n_k}^\beta\}) > 0$, что

$$\prod_{j=1, j \neq k}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{n_k} - \lambda_{n_j}}{\lambda_{n_k} + \lambda_{n_j}} \right| \geq \delta$$

для любого $k = 1, \dots, \infty$. Тогда по лемме Карлесона (см. [2]) существуют такие аналитические, ограниченные в совокупности в правой полуплоскости функции, что

$$f_{n_k}(\lambda_{n_j}^\beta) = \delta_{jk}, \quad \|f_{n_k}\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} |f_{n_k}(\lambda)| \leq 2\delta^{-5}(1 - 2\ln \delta),$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Пусть

$$\varphi_{n_k}(\lambda) = \int_0^\lambda f_{n_k}(z) dz.$$

Обозначим

$$\psi_l(x, y) = \frac{1}{ab} \cos \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi ny}{b}, \quad m, n = 1, \dots, \infty,$$

где $\lambda_l^\beta = \lambda_{m,n}^\beta$. Пусть $\Gamma_l = \{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda = (\lambda_l^\beta + \lambda_{l+1}^\beta)/2\}$ – вертикальные прямые в правой полуплоскости. Напишем векторное равенство при $n_k \in \{n_{t-1} + 1, \dots, n_t\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_{t-1}+1}^{n_t} \varphi_{n_k}(\mu_j^\beta) &= \sum_{j=n_{t-1}+1}^{n_t} \varphi_{n_k}(\lambda_j^\beta) + (P\nu_{n_k}, \nu_{n_k}) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Sp} \int_{\Gamma_{n_t}} \varphi_{n_k}(\lambda)(T_\beta + P - \lambda E)^{-1}(P(T_\beta - \lambda E))^{-2} d\lambda \\ &= \sum_{j=n_{t-1}+1}^{n_t} \varphi_{n_k}(\lambda_j^\beta) + (P\nu_{n_k}, \nu_{n_k}) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Sp} \int_{\Gamma_{n_t}} \varphi_{n_k}(\lambda)(T_\beta + P - \lambda E)^{-1}(P(T_\beta - \lambda E))^{-2} d\lambda + \dots \\ &= \sum_{j=n_{t-1}+1}^{n_t} \varphi_{n_k}(\lambda_j^\beta) + (P\nu_{n_k}, \nu_{n_k}) \\ &\quad - \frac{1}{6\pi i} \operatorname{Sp} \int_{\Gamma_{n_t}} f_{n_k}(\lambda)(P(T_\beta - \lambda E)^{-1})^{-2} d\lambda + \dots \\ &= \sum_{j=n_{t-1}+1}^{n_t} \varphi_{n_k}(\lambda_j^\beta) + (P\nu_{n_k}, \nu_{n_k}) + \alpha_{n_k}(P). \end{aligned}$$

При выводе этого равенства использовалось тождество (см. [3])

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Sp} \int_{\Gamma} f(\lambda)(T_\beta - \lambda E)^{-1}(P(T_\beta - \lambda E)^{-1})^n d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i n} \operatorname{Sp} \int_{\Gamma} f'(\lambda)(P(T_\beta - \lambda E)^{-1})^n d\lambda, \quad n = 1, \dots, \infty, \end{aligned}$$

где f – голоморфная гамма-функция в правой полуплоскости, причем $|f(\lambda)| \leq |\lambda| \text{const}$ при $\text{Re } \lambda > 0$, а Γ – замкнутый регулярный контур в правой полуплоскости, не содержащий точек спектра оператора T_β . Из работы [4] известна следующая оценка ядерной нормы резольвенты оператора T_β на вертикальных прямых Γ_{n_t} :

$$\|(T_\beta - \lambda E)^{-1}\|_1 \leq C_2(|\rho| + C_3 n_t^{\beta-1})^{-\varepsilon} o(n_t^{-(\beta-1)(1-\varepsilon)+1}),$$

где $\rho = \text{Im } \lambda$, $C_2 > 0$, C_3 , $\lambda \in \Gamma_{n_t}$, а ε – любое число такое, что $0 < \varepsilon < 1$. На вертикальных прямых Γ_{n_t} , очевидно, справедлива оценка равномерной нормы резольвенты оператора T_β :

$$\|(T_\beta - \lambda E)^{-1}\|_1 \leq (|\rho| + C_1 n_t^{\beta-1})^{-1}, \quad \lambda \in \Gamma_{n_t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\alpha_{n_k}(p) - \alpha_{n_k}(\tilde{p})| &\leq 2\delta^{-5}(1 - 2\ln \delta) \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{n_t}} \|(T_\beta - \lambda E)^{-1}\|_1 \\ &\quad \times \|(T_\beta - \lambda E)^{-1}\| \|p - \tilde{p}\|_\infty (\|p\| + \|\tilde{p}\|_\infty) d\rho \\ &\leq \delta^{-5}(1 - 2\ln \delta) \int_{-\infty}^{\infty} (|\rho| + C_5 n_t^{\beta-1})^{-1-\varepsilon} \cdot o(n_t^{-(\beta-1)(1-\varepsilon)+1}) d\rho \\ &= \delta^{-5}(1 - 2\ln \delta) \cdot o(n_t^{2-\beta}), \end{aligned}$$

где $C_5 = \min(C_1, C_3) > 0$.

Возьмем такую последовательность t_q натуральных чисел, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} |o(n_{t_q}^{2-\beta})| < \infty,$$

а это возможно, если $\beta \geq 2$. Обозначим

$$\alpha_0(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_{t_{q-1}}}^{n_{t_q}} (\varphi_{n_k}(\mu_j^\beta) - \varphi_{n_k}(\lambda_j^\beta)) \right) \cdot \psi_{n_k},$$

где $n_k \in \{n_{q-1} + 1, \dots, n_{t_q}\}$, $\alpha(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{n_k}(p) \psi_{n_k}$. Тогда

$$\|\alpha(p) - \alpha(\tilde{p})\|_\infty \leq \text{const } \delta^{-5}(1 - 2\ln \delta) \|p - \tilde{p}\|_\infty (\|p\|_\infty + \|\tilde{p}\|_\infty) \sum_{q=1}^{\infty} |o(n_{t_q}^{2-\beta})| = \gamma \|p - \tilde{p}\|_\infty.$$

Заметим, что $0 < \gamma < 1$ при малых $\|p\|_\infty$ и $\|\tilde{p}\|_\infty$ в зависимости от δ . Но $\alpha(0) = 0$, поэтому существует в $L_2(\Pi_4)$ замкнутый шар $U(0, \varepsilon)$ радиуса $\varepsilon > 0$ (ε зависит от δ), который $\alpha(\cdot)$ отображает в себя и является на этом шаре сжимающим отображением. Следовательно, операторное уравнение

$$\alpha_0 - \alpha(p) = p,$$

где

$$\alpha_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_{t_{q-1}}}^{n_{t_q}} (\varphi_{n_k}(\mu_j^\beta) - \varphi_{n_k}(\lambda_j^\beta)) \right) \cdot \psi_{n_k},$$

имеет одно и только одно решение p при $\alpha_0 \in U(0, \varepsilon)$. При этом p удовлетворяет соотношениям

$$p(x, y) = p(a - x, y) = p(x, b - y) \quad (1)$$

для почти всех $(x, y) \in \Pi$ и

$$\iint_{\Pi} (x, y) \cos \frac{2\pi n x}{a} dx dy = \iint_{\Pi} (x, y) \cos \frac{2\pi n x}{b} dx dy = 0, \quad n = 0, \dots, \infty. \quad (2)$$

Итак, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Если a^2/b^2 – иррациональное число и $\{\lambda_{n_k}^\beta\}$ – интерполяционная последовательность, а $\beta \geq 2$, то существует $\varepsilon > 0$, зависящее только от $\delta = \delta(\{\lambda_{n_k}^\beta\}) > 0$, такое, что в замкнутом шаре $U(0, \varepsilon) \subset L_\infty(\Pi)$ существует один и только один потенциал p , удовлетворяющий условиям (1) и (2), и при условии, что $\alpha_0 \in U(0, \varepsilon)$, выполнено

$$\sum_{j=n_{t_q-1}}^{n_{t_q}} \varphi_{n_k}(\mu_j^\beta) = \sum_{j=n_{t_q-1}}^{n_{t_q}} \varphi_{n_k}(\xi_j^\beta), \quad k = 1, \dots, \infty, \quad n_k \in \{n_{t_q-1} + 1, \dots, n_{t_q}\}, \quad \text{и}$$

$$\iint_{\Pi} (x, y) \psi_n dx dy = 0 \quad \text{при} \quad n \neq n_k, \quad k = 1, \dots, \infty.$$

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 2. Если a^2/b^2 – иррациональное число, $p = \sum_{q=1}^N A_q \psi_q$, $\tilde{p} = \sum_{q=1}^N \tilde{A}_q \psi_q$, $1 \leq N < \infty$, и $\|p\|_\infty, \|\tilde{p}\|_\infty$ малы по сравнению с $\delta^{-5}(1 - 2 \ln \delta)$, где $\delta = \delta(\{\lambda_q^\beta\}_{q=1}^N) > 0$, $\beta > 0$, то из равенства $\mu_j^\beta(p) = \mu_j^\beta(\tilde{p})$, $j = 1, \dots, N$, вытекает, что в Π всюду $p = \tilde{p}$, т.е. $A_q = \tilde{A}_q$, $q = 1, \dots, N$, где $\mu_j^\beta(p)$ и $\mu_j^\beta(\tilde{p})$ – собственные числа операторов $T_\beta + P$ и $T_\beta + \tilde{P}$ соответственно, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубровский В. В., Печенцов А. С. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 5. С. 852–858.
2. Голман К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
3. Дубровский В. В. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 12. С. 1702–1703.
4. Дубровский В. В. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 12. С. 2046–2051.

Магнитогорский государственный университет
E-mail: mgpi@mgpi.mgn.chel.su

Поступило
02.11.1998