Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Одно
из восьми чисел $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(17), \zeta(19)$ иррационально,
Матем. заметки, 2001, том 70, выпуск 3, 472–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm759>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:42:24

ОДНО ИЗ ВОСЬМИ ЧИСЕЛ $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(17), \zeta(19)$ ИРРАЦИОНАЛЬНО

В. В. Зудилин

1. Введение. В 1978 году Р. Апері [1] предъявил последовательность рациональных приближений, доказывающих иррациональность числа $\zeta(3)$. Несмотря на кажущуюся простоту, попытки обобщить результат Апері и доказать иррациональность значений дзета-функции Римана $\zeta(5), \zeta(7), \dots$ так и не увенчались успехом. В 2000 году Т. Ривоалем была предложена конструкция [2], позволяющая строить “хорошие” линейные формы с рациональными коэффициентами от значений дзета-функции $\zeta(s)$ в нечетных положительных точках. Обобщение этой конструкции [3]–[6] приводит к линейным формам от 1 и чисел

$$\zeta(s), \zeta(s+2), \dots, \zeta(s+2m), \quad \text{где } s \geq 3 \text{ нечетно,} \quad (1)$$

и для выбранного надлежащим образом целого $m \geq 1$ удается доказать иррациональность по крайней мере одного из набора (1). Как следствие, получается результат об иррациональности одного из чисел $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(19), \zeta(21)$; в работах [3] и [4] было предложено два различных доказательства этого утверждения. В настоящей заметке мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. По крайней мере одно из восьми чисел

$$\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \zeta(13), \zeta(15), \zeta(17), \zeta(19) \quad (2)$$

иррационально.

Именно *арифметика* является основным отличием приводимой далее конструкции от применявшихся в [4], [3]; *аналитическая часть* – асимптотика линейных форм полностью описана в [4, § 2], поэтому мы ограничимся ссылками на соответствующие утверждения из [4].

Автор искренне благодарен профессору Ю. В. Нестеренко за постоянное внимание к работе.

2. Аналитическая конструкция. Зафиксируем целые положительные параметры a, b, c, d , причем $b \geq 3$ нечетно, $a \geq bd/c$ четно и $d \geq 2c$. Для каждого целого положительного n рассмотрим нечетную рациональную функцию

$$\begin{aligned} R_n(t) &= t \cdot \frac{((t \pm (cn+1)) \cdots (t \pm (cn \pm dn)))^b}{(t(t \pm 1) \cdots (t \pm cn))^a} \cdot \frac{(2cn)!^a}{(dn)!^{2b}} \\ &= t \cdot \frac{\Gamma(t + (c+d)n + 1)^b \Gamma(t - cn)^{a+b}}{\Gamma(t - (c+d)n)^b \Gamma(t + cn + 1)^{a+b}} \cdot \frac{(2cn)!^a}{(dn)!^{2b}} \\ &= (-1)^{(c+d)n} \frac{\sin^b \pi t}{\pi^b} \cdot \frac{t(\pm t + (c+d)n)^b (2cn)^a}{(t+cn)^{a+b} (dn)^{2b}} \cdot \frac{\Gamma(\pm t + (c+d)n)^b \Gamma(t - cn)^{a+b} \Gamma(2cn)^a}{\Gamma(t+cn)^{a+b} \Gamma(dn)^{2b}} \end{aligned} \quad (3)$$

и поставим ей в соответствие число

$$I_n = \frac{1}{(b-1)!} \sum_{t=cn+1}^{\infty} \frac{d^{b-1} R(t)}{dt^{b-1}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \pi^b \operatorname{ctg}_b \pi t \cdot R_n(t) dt,$$

где M – произвольная постоянная из интервала $cn < M < (c+d)n$ и

$$\operatorname{ctg}_b z = \frac{(-1)^{b-1}}{(b-1)!} \frac{d^{b-1} \operatorname{ctg} z}{dz^{b-1}}, \quad b = 1, 2, \dots$$

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № IR-97-1904.

(см. [4, лемма 2.4]). Как несложно убедиться, число I_n является линейной формой от

$$1, \zeta(b+2), \zeta(b+4), \dots, \zeta(a+b-2) \quad (4)$$

с рациональными коэффициентами (см. [4, лемма 1.1]).

Полагая $r = d/(2c)$, заменяя множитель $(dn)!^{2b}$ на $(2cn)!^{bd/c}$ в определении функции $R_n(t)$ и cn на n , мы получаем линейные формы I_n из [4] от чисел (4) (для четного a и нечетного b). Единственное отличие по сравнению с [4] – появление дополнительного множителя t в (3) – дает возможность рассматривать числа a, b различной четности (и этот трюк мы заимствуем из [3]), но не влияет на асимптотику величин I_n при $n \rightarrow \infty$. Поэтому мы можем воспользоваться предложением 2.3 из [4].

ЛЕММА 1. Пусть для вещественного корня $\mu_1 \in (c+d, +\infty)$ многочлена

$$(\tau + c + d)^b (\tau - c)^{a+b} - (\tau - c - d)^b (\tau + c)^{a+b} \quad (5)$$

выполнено неравенство

$$\mu_1 \leq c + d + (2c + d)d \cdot \min \left\{ \frac{b}{8c(a+b)}, \frac{1}{12(c+d)} \right\},$$

а τ_0 – комплексный корень (5) в области $\operatorname{Re} \tau > 0$, $\operatorname{Im} \tau > 0$ с максимально возможной частью $\operatorname{Re} \tau_0$. Пусть, далее, функция

$$f_0(\tau) = b(c+d) \log(\tau + c + d) + b(c+d) \log(-\tau + c + d) - (a+b)c \log(\tau - c) - (a+b)c \log(\tau + c) + 2ac \log(2c) - 2bd \log d$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{Im} f_0(\tau_0) \not\equiv 0 \pmod{\pi \mathbb{Z}}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{\log |I_n|}}{n} = \operatorname{Re} f_0(\tau_0).$$

3. Знаменатели линейных форм. Для изучения арифметических свойств линейных форм I_n представим функцию (3) в виде $R_n(t) = tH_n(t)^a G_n(t)^b$, где

$$H_n(t) = \frac{(2cn)!}{t(t \pm 1) \cdots (t \pm cn)}, \quad G_n(t) = \frac{(t \pm (cn+1)) \cdots (t \pm (cn+dn))}{(dn)!^2}.$$

Следующее утверждение обобщает арифметическую схему Никишина–Ривоаля.

ЛЕММА 2 [4, лемма 4.1]. Пусть для некоторого многочлена $P(t)$, $\deg P(t) < m(n+1)$, рациональная функция

$$R(t) = \frac{P(t)}{((t+s)(t+s+1) \cdots (t+s+n))^m}$$

(в не обязательно несократимом представлении) при каждом $j = 0, 1, \dots, m-1$ удовлетворяет включениям

$$\frac{D_n^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (R(t)(t+k)^m) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = s, s+1, \dots, s+n, \quad (6)$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$. Тогда включения (6) выполнены для всех целых неотрицательных j .

Из леммы 2 следует, что для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\frac{D_{2cn}^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (H_n(t)(t+k)) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm cn. \quad (7)$$

Кроме того, из свойств целозначных многочленов (см., например, [7])

$$\frac{(t + (cn + 1)) \cdots (t + (cn + dn))}{(dn)!}, \quad \frac{(t - (cn + 1)) \cdots (t - (cn + dn))}{(dn)!}$$

и правила Лейбница для дифференцирования произведения вытекают включения

$$\left. \frac{D_{dn}^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} G_n(t) \right|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

ЛЕММА 3 (ср. с [4, лемма 4.5]). Для каждого простого p определим показатели

$$\nu_p = \min_{k=0, \pm 1, \dots, \pm cn} \left\{ \text{ord}_p \frac{((c+d)n+k)! ((c+d)n-k)!}{(cn+k)! (cn-k)! (dn)!^2} \right\} \quad (9)$$

и положим

$$\Pi_n = \prod_{p: \sqrt{(2c+d)n} < p \leq dn} p^{\nu_p}. \quad (10)$$

Тогда для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\Pi_n^{-1} \cdot D_{dn}^j \frac{d^j}{dt^j} G_n(t) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm cn. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$G_n(t) \Big|_{t=-k} = (-1)^{dn} \frac{((c+d)n+k)! ((c+d)n-k)!}{(cn+k)! (cn-k)! (dn)!^2}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm cn,$$

включения (11) при $j = 0$ следуют из (9), (10).

Докажем индукцией по j , что для любого простого p

$$\text{ord}_p \left(\Pi_n^{-1} \cdot D_{dn}^j \frac{d^j}{dt^j} G_n(t) \Big|_{t=-k} \right) \geq 0, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm cn. \quad (12)$$

Покажем оценки (12) для $j+1$, считая их доказанными для всех предыдущих j . Если простое p не делит Π_n , то $\text{ord}_p \Pi_n^{-1} = 0$ и соотношения (12) следуют из (8). Поэтому далее мы считаем p делителем Π_n , откуда, в частности, $p > \sqrt{(2c+d)n}$ и $p \leq dn$. Полагая

$$g_n(t) = \frac{G'_n(t)}{G_n(t)} = \sum_{l=cn+1}^{cn+dn} \frac{1}{t \pm l},$$

получим

$$\frac{d^{j+1} G_n(t)}{dt^{j+1}} = \frac{d^j}{dt^j} (g_n(t) G_n(t)) = \sum_{m=0}^j \binom{m}{j} \cdot \frac{d^{j-m} g_n(t)}{dt^{j-m}} \cdot \frac{d^m G_n(t)}{dt^m}. \quad (13)$$

Для $m \leq j$ имеем

$$\text{ord}_p \left(\frac{d^{j-m} g_n(t)}{dt^{j-m}} \Big|_{t=-k} \right) = \text{ord}_p \left(\sum_{l=cn+1}^{cn+dn} \frac{1}{(l \pm k)^{j-m+1}} \right) \geq -(j-m+1), \quad (14)$$

$$k = 0, \pm 1, \dots, \pm cn,$$

поскольку $p > \sqrt{(2c+d)n}$ и $|l \pm k| \leq (2c+d)n$ для всех знаменателей в (14);

$$\text{ord}_p D_{dn}^{j-m+1} \geq j - m + 1, \quad (15)$$

так как $p \leq dn$; наконец,

$$\text{ord}_p \left(\Pi_n^{-1} \cdot D_{dn}^m \cdot \frac{d^m G_n(t)}{dt^m} \Big|_{t=-k} \right) \geq 0, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm cn, \quad (16)$$

по индукционному предположению. Подставляя $t = -k$ в (13) и применяя оценки (14)–(16), заключаем, что оценки (12) выполнены для $j + 1$. Тем самым, индукционный переход полностью обоснован. Лемма доказана.

Положим $a_0 = [bd/c] \geq bd/c$. Из леммы 3, включений (7) и правила Лейбница ввиду $d \geq 2c$ для всех целых неотрицательных j получаем

$$\Pi_n^{-b} \cdot D_{dn}^j \frac{d^j}{dt^j} (G_n(t)^b \cdot H_n(t)^{a_0} (t+k)^{a_0}) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm cn.$$

Отсюда, в частности, для $j = 0, 1, \dots, a_0 - 1$ выполнено

$$a_0! \Pi_n^{-b} \cdot \left(\frac{D_{dn}}{D_{2cn}} \right)^{a_0-1} \cdot \frac{D_{2cn}^j}{j!} \frac{d^j}{dt^j} (G_n(t)^b \cdot H_n(t)^{a_0} (t+k)^{a_0}) \Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad (17)$$

$$k = 0, \pm 1, \dots, \pm cn.$$

Согласно лемме 2 включения (17) справедливы для всех целых неотрицательных j , поскольку $\deg G_n(t)^b = 2bdn < a_0(2cn+1) = \deg H_n(t)^{a_0}$. Поэтому стандартные рассуждения (см., например, [4, лемма 1.4] или [3, лемма 2]) приводят нас к следующему утверждению.

ЛЕММА 4. Числа

$$\tilde{I}_n = a_0! \Pi_n^{-b} \cdot D_{dn}^{a_0-1} \cdot D_{2cn}^{a+b-a_0} \cdot I_n \quad (18)$$

являются линейными формами от (4) с целыми коэффициентами.

Асимптотика величин D_{dn} и D_{2cn} в (18) при $n \rightarrow \infty$ определяется из асимптотического закона распределения простых чисел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n}{n} = 1. \quad (19)$$

Для вычисления асимптотического поведения величины Π_n при $n \rightarrow \infty$ отметим, что согласно (9) для простых $p > \sqrt{(2b+c)n}$

$$\nu_p \geq \varphi\left(\frac{n}{p}\right) = \varphi\left(\frac{n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor\right), \quad (20)$$

где

$$\varphi(x) = \min_{y \in \mathbb{R}} \{ [(c+d)x + y] + [(c+d)x - y] - [cx + y] - [cx - y] - 2[dx] \}. \quad (21)$$

Функция под знаком минимума в (21) периодична (с периодом 1) по каждому аргументу, поэтому минимум можно считать только для $y \in [0, 1]$. Используя аргументы Чудновского–Хаты, согласно (10), (20), (19) мы в итоге получаем

$$\varpi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \Pi_n}{n} \geq \int_0^1 \varphi(x) d\psi(x) - \int_0^{1/d} \varphi(x) \frac{dx}{x^2} \quad (22)$$

(см. [4, лемма 4.4 и доказательство леммы 4.5]), где $\psi(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции и вычитание в правой части (22) “ликвидирует” простые $p > dn$.

4. Доказательство теоремы 1. Для того чтобы получить объявленный в названии результат, мы полагаем $a = 18$, $b = 3$, $c = 3$ и $d = 7$. Тогда $a_0 = [bd/c] = 7$,

$$\mu_1 \approx 10.305445, \quad \tau_0 \approx 9.856603 + 0.197639i, \quad f_0(\tau_0) \approx -123.071169 - 30.779083i.$$

Функция (21) при $x \in [0, 1]$ в этом случае имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [\frac{1}{10}, \frac{1}{7}) \cup [\frac{1}{4}, \frac{2}{7}) \cup [\frac{2}{5}, \frac{3}{7}) \cup [\frac{11}{20}, \frac{4}{7}) \cup [\frac{13}{20}, \frac{2}{3}) \\ & \cup [\frac{7}{10}, \frac{5}{7}) \cup [\frac{4}{5}, \frac{5}{6}) \cup [\frac{17}{20}, \frac{6}{7}) \cup [\frac{19}{20}, 1), \\ 0 & \text{для остальных } x \in [0, 1]; \end{cases}$$

поэтому $\varpi \geq 1.150969$ в соответствии с (22). Окончательно, для линейных форм (18) с целыми коэффициентами от 1 и чисел (2) согласно леммам 1 и 4 имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\tilde{I}_n|}{n} = -b\varpi + (a_0 - 1)d + 2(a + b - a_0)c + \operatorname{Re} f_0(\tau_0) < -0.524077,$$

так что среди чисел (2) действительно имеется иррациональное.

5. Другие результаты об иррациональности. Описанная в этой заметке конструкция позволяет также доказать иррациональность одного из чисел в (1) для $s = 7$ и $s = 9$ с меньшим значением m , чем в теореме 1 из [4]–[6]. Действительно, полагая

$$a = 32, \quad b = 5, \quad c = 5, \quad d = 12 \quad \text{и} \quad a = 46, \quad b = 7, \quad c = 1, \quad d = 2,$$

мы получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2. По крайней мере одно из пятнадцати чисел

$$\zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \dots, \zeta(33), \zeta(35)$$

иррационально.

ТЕОРЕМА 3. По крайней мере одно из (двадцати двух) чисел

$$\zeta(9), \zeta(11), \zeta(13), \dots, \zeta(49), \zeta(51)$$

иррационально.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Apéry R. // *Astérisque*. 1979. V. 61. P. 11–13.
2. Rivoal T. // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 2000. V. 331. № 4. P. 267–270.
3. Rivoal T. Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$ // *Acta Arith.* 2001 (to appear); // *E-print math.NT/0104221*.
4. Зудилин В. В. Об иррациональности значений дзета-функции Римана // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2002 (в печати).
5. Зудилин В. В. // *УМН*. 2001. Т. 56. № 2. С. 215–216.
6. Зудилин В. В. Об иррациональности значений дзета-функции // *Материалы XXIII конференции молодых ученых (МГУ, 9–14 апреля 2001 г.)*. М.: МГУ, 2001 (в печати); // *E-print math.NT/0104249*.
7. Матвеев Е. М. // *Матем. заметки*. 1993. Т. 54. № 4. С. 76–81.