Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Махмудов, О задаче Коши для эллиптических систем в пространстве $\mathbb{R}^m$, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 6, 849–860

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm76>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 04:03:50

УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^m$

О. И. Махмудов

В статье рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений Ламе в пространственной ограниченной области по ее значениям и значениям ее напряжения на части границы этой области, т.е. задача Коши. Строится приближенное решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. В статье рассматриваются вопросы регуляризации задачи Коши для систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Как известно, задача Коши для эллиптических уравнений некорректна, решение задачи единственно, но неустойчиво (пример Адамара). Для того чтобы постановка задачи была корректной, необходимо сузить класс рассматриваемых решений.

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х годах в работах [1]–[4] и развивалось впоследствии в работах [5]–[16].

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ – точки евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ и D – область в $\mathbb{R}^m$ с кусочно-гладкой границей ∂D , S – часть ∂D , $\Sigma = \partial D \setminus S$. Рассмотрим в области D системы уравнений Ламе в векторной форме:

$$\mu \Delta U(y) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U(y) = 0,$$

здесь $U = (U_1, \dots, U_m)$ – вектор смещения, Δ – оператор Лапласа, λ, μ – постоянные Ламе. Для сокращения изложения удобно пользоваться матричной записью. Введем матричный дифференциальный оператор

$$A(\partial_x) = \|A_{ij}(\partial_x)\|_{m \times m}, \quad \text{где } A_{ij}(\partial_x) = \delta_{ij} \mu \Delta + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Тогда рассматриваемая эллиптическая система уравнений запишется в матричной форме

$$A(\partial_x)U = 0. \tag{1}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Известны данные Коши решения системы на поверхности S :

$$\begin{cases} U(y) = f(y), & y \in S, \\ T(\partial_y, n(y))U(y) = \psi(y), & y \in S, \end{cases} \quad (2)$$

где $f = (f_1, \dots, f_m)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ – заданные непрерывные вектор-функции на S , $T(\partial_y, n(y))$ – оператор напряжения, т.е.

$$T(\partial_y, n(y)) = \|T_{ij}(\partial_y, n(y))\|_{m \times m} = \left\| \lambda n_i \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial y_i} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n} \right\|_{m \times m}, \quad (3)$$

δ_{ij} – символ Кронекера, а $n = (n_1, \dots, n_m)$ – единичный вектор нормали к поверхности S .

Требуется определить функцию $U(y)$ в D , исходя из заданных f и ψ , т.е. решить задачу аналитического продолжения решения системы уравнений в пространственной области по ее значениям f и значениям ее напряжений ψ на гладком куске S границы.

Единственность решения задачи (1), (2) следует из общей теоремы Холмгрена [17]. После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризующих операторов.

Пусть вместо $f(y)$ и $\psi(y)$ заданы их приближения $f_\delta(y)$ и $\psi_\delta(y)$ с точностью δ , $\delta \in (0, 1)$ (в метрике C), которые могут не принадлежать к классу существования решений. В работе строится семейство функций $U(x, f_\delta, \psi_\delta) = U^{\sigma\delta}(x)$, зависящее от параметра σ , и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ семейство $U^{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ задачи (1), (2).

Следуя А. Н. Тихонову, $U^{\sigma\delta}(x)$ назовем *регуляризованным решением* задачи. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи [18].

Существенно используя результаты работ [1], [5] по задаче Коши для уравнения Лапласа, нам удалось построить матрицу Карлемана в явном виде и на ее основе построить регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений (1). Поскольку здесь идет речь о явных формулах, то построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес. При $m = 2, 3$ рассматриваемая задача совпадает с задачей Коши для системы уравнений теории упругости – уравнений статики изотропной упругой среды. В этих случаях задача (1), (2) для специальных классов областей исследована в работах [8]–[11], [14].

Далее задача Коши для системы уравнений установившихся упругих колебаний, для системы уравнений термоупругости и для системы уравнений моментной теории упругости в пространстве исследована в [6], [7], [12]–[14].

Ранее в работах [15], [16] было доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры.

2. Построение матрицы фундаментальных решений специального вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матрица $\Gamma(y, x) = \|\Gamma_{ij}(y, x)\|_{m \times m}$ называется *матрицей фундаментальных решений* системы (1), где

$$r = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2},$$

$$\Gamma_{ij}(y, x) = \frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \left(\delta_{ij}(\lambda + 3\mu)q(y, x) + (\lambda + \mu)(y_j - x_j) \frac{\partial}{\partial x_i} q(y, x) \right), \quad (4)$$

$$q(y, x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-m)\omega_m} \cdot \frac{1}{|y-x|^{m-2}}, & m > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \ln |y-x|, & m = 2, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

ω_m – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^m$.

Матрица $\Gamma(y, x)$ симметричная, и каждый столбец ее, а также строка удовлетворяют уравнению (1) в произвольной точке $x \in \mathbb{R}^m$, кроме $y = x$. Таким образом,

$$A(\partial_x)\Gamma(y, x) = 0, \quad y \neq x.$$

Здесь 0 в правой части обозначает матрицу размера $m \times m$ с нулевыми элементами.

Развивая идею Лаврентьева, который ввел понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа [1], дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Матрицей Карлемана* задачи (1), (2) называется $(m \times m)$ -матрица $\Pi(y, x, \sigma)$, удовлетворяющая следующим двум условиям.

1) Имеет место равенство

$$\Pi(y, x, \sigma) = \Gamma(y, x) + G(y, x, \sigma),$$

где σ – положительный числовой параметр, матрица $G(y, x, \sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области D .

2) Имеет место равенство

$$\int_{\Sigma} (|\Pi(y, x, \sigma)| + T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)) ds_y \leq \varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$ равномерно по x на компактных подмножествах D ; здесь и далее $|\Pi|$ означает евклидову норму матрицы $\Pi = \|\Pi_{kj}\|$, т.е.

$$|\Pi| = \left(\sum_{k,j=1}^m \Pi_{kj}^2 \right)^{1/2};$$

в частности, $|U| = (\sum_{k=1}^m U_k^2)^{1/2}$ для вектора U .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вектор-функция $U(y) = (U_1(y), \dots, U_m(y))$ называется *регулярной* в D , если она непрерывна вместе со своими частными производными второго порядка в D и первого порядка на $\overline{D} = D \cup \partial D$.

В теории уравнений в частных производных важную роль играют представления решений этих уравнений в виде функции типа потенциала. Приведем здесь из этих представлений формулу Сомилиана [19].

ТЕОРЕМА 1. *Всякое регулярное решение $U(y)$ уравнения (1) в области D определяется формулой*

$$U(x) = \int_{\partial D} [\Gamma(y, x) \{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Gamma(y, x)\}' U(y)] d_y S, \quad x \in D. \quad (5)$$

Поскольку матрица Карлемана отличается от матрицы фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то формула Сомилиана остается справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Всякое регулярное решение $U(y)$ уравнения (1) в области D определяется формулой*

$$U(x) = \int_{\partial D} [\Pi(y, x) \{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x)\}' U(y)] d_y S, \quad x \in D, \quad (6)$$

где $\Pi(y, x)$ – матрица Карлемана.

Используя матрицу Карлемана, легко вывести оценку устойчивости решения задачи Коши (1), (2) (многомерный аналог теоремы о двух константах), а также указать метод эффективного решения этой задачи (2).

Пусть $K(w)$, $w = u + iv$ (u, v вещественные), – целая функция, принимающая на вещественной оси вещественные значения и удовлетворяющая условиям

$$K(u) \neq 0, \quad \sup_{\nu \geq 1} |\nu^\nu K^\nu(u)| = M(p, u) < \infty, \quad p = \overline{0, m}, \quad -\infty < u < \infty.$$

Положим

$$S = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_{m-1} - x_{m-1})^2.$$

Функцию $\Phi(y, x)$ при $\alpha > 0$ определим следующими равенствами:

- если $m = 2$, то

$$-2\pi K(x_2)\Phi(y, x) = \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{K(i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2)}{i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2 - x_2} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}; \quad (7)$$

- если $m = 2n + 1$, $n \geq 1$, то

$$c_m K(x_m)\Phi(y, x) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial S^{n-1}} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{K(i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m)}{i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m - x_m} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad (8)$$

где $c_m = (-1)^{n-1} 2^{-n} (m-2) \pi \omega_m (2n-1)$;

- если $m = 2n$, $n \geq 2$, то

$$c_m K(x_m) \Phi(y, x) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial S^{n-2}} \operatorname{Im} \left[\frac{K(\alpha i + y_m)}{\alpha(\alpha i + y_m - x_m)} \right], \quad (9)$$

где $c_m = (-1)^{n-1} (n-1)! (m-2) \omega_m$, ω_m – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^m$.

В [5] доказана следующая

ЛЕММА 1. *Функция $\Phi(y, x)$, определенная формулами (7)–(9), представима в виде*

$$\Phi(y, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + g(y, x), \quad m = 2, \quad \Phi(y, x) = \frac{r^{2-m}}{\omega_m(m-2)} + g(y, x), \quad m \geq 3,$$

где $g(y, x)$ – некоторая функция, определенная для всех значений y, x и гармоническая по переменной y во всем $\mathbb{R}^m$.

С помощью функции $\Phi(y, x)$ построим матрицу

$$\begin{aligned} \Pi(y, x) = \|\Pi_{ij}(y, x)\|_{m \times m} = & \left\| \frac{1}{2\mu(\lambda + 3\mu)} (\delta_{ij}(\lambda + 3\mu) \Phi(y, x) \right. \\ & \left. - (\lambda + \mu)(y_j - x_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(y, x) \right\|_{m \times m}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда на основе леммы 1 нетрудно доказать, что матрица $\Pi(y, x)$, определенная по формуле (10), представима в виде

$$\Pi(y, x) = \Gamma(y, x) + G(y, x), \quad (11)$$

где $G(y, x) = \|G_{ij}(y, x)\|_{m \times m}$ – матрица, определенная для всех значений y, x и по переменной y удовлетворяющая системе (1), т.е. $A(\partial_y)G(y, x) = 0$.

Теперь приведем основные результаты для данной задачи для конкретных областей.

3. Решение задачи (1), (2) для специальных классов областей.

I. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – ограниченная односвязная область, граница которой состоит из куска $\sum$ гиперплоскости $y_m = 0$ и гладкой поверхности S , лежащей в полупространстве $y_m > 0$. Рассмотрим в области D задачу (1), (2), т.е. задачу Коши. Для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) построим матрицу Карлемана в явном виде.

При $\sigma > 0$ в формулах (7)–(9) положим

$$\begin{aligned} K(w) &= \exp(\sigma w), \quad w = y_m + i\nu, \quad \nu = \sqrt{u^2 + \alpha^2}, \\ K(x_m) &= \exp(\sigma x_m), \quad x_m > 0, \quad \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_{m-1} - x_{m-1})^2. \end{aligned}$$

Выделяя мнимую часть подынтегрального выражения в (7)–(9), получим

- если $m = 2n + 1, n \geq 1$, то

$$\begin{aligned} c_m \Phi_\sigma(y, x) &= \varphi_\sigma(y, x) \exp(\sigma y_m - \sigma x_m), \\ \varphi_\sigma(y, x) &= \int_0^\infty \frac{\partial^{n-1}}{\partial S^{n-1}} \left\{ \frac{1}{u^2 + r^2} \left(-\cos(\sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{y_m - x_m}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \sin(\sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}) \right) \right\} du; \end{aligned} \quad (12)$$

- если $m = 2n, n \geq 2$, то

$$\begin{aligned} c_m \Phi_\sigma(y, x) &= \varphi_\sigma(y, x) \exp(\sigma y_m - \sigma x_m), \\ \varphi_\sigma(y, x) &= \frac{\partial^{n-2}}{\partial S^{n-2}} \left[\frac{1}{r^2} \left(\cos \alpha + \frac{y_m - x_m}{\alpha} \sin(\sigma \alpha) \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Из формулы (12) и (13) видно, что на Σ (где $y_m = 0$) функция $\Phi_\sigma(y, x)$, ее градиент $\nabla \Phi_\sigma(y, x)$ и ее вторые частные производные $\partial^2 \Phi_\sigma(y, x) / \partial y_i \partial y_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, при фиксированном $x \in D$ и $\sigma \rightarrow \infty$ экспоненциально стремятся к нулю. Тогда из (3), (7)–(13) получим, что матрица $\Pi_\sigma(y, x)$ и ее напряжения $T(\partial_y, n) \Pi_\sigma(y, x)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ также стремятся к нулю на $y \in \Sigma$. В силу определения 2 и формулы (11) матрица $\Pi_\sigma(y, x)$ является матрицей Карлемана для области D и части Σ .

Если $m = 2n, n \geq 2$, то при $\sigma \geq 1$ имеет место следующая оценка:

$$\int_\Sigma \left\{ |\Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right\} d_y S \leq C(x) \sigma^{n-1} \exp(-\sigma x_m), \quad x \in D. \quad (14)$$

Если $m = 2n + 1, n \geq 1$, то при $\sigma \geq 1$

$$\int_\Sigma \left\{ |\Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right\} d_y S \leq C(x) \sigma^n \exp(-\sigma x_m), \quad x \in D, \quad (15)$$

где $C(x)$ – постоянная, зависящая от x .

В (10) положим $\Phi(y, x) = \Phi_\sigma(y, x)$, т.е.

$$\begin{aligned} \Pi(y, x, \sigma) &= \|\Pi_{ij}(y, x, \sigma)\|_{m \times m} \\ &= \left\| \frac{1}{2\mu(\lambda + 3\mu)} \left(\delta_{ij}(\lambda + \mu) \Phi_\sigma(y, x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\lambda + \mu)(y_j - x_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_\sigma(y, x) \right) \right\|_{m \times m}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим

$$U^\sigma(x) = \int_\Sigma [\Pi(y, x, \sigma) \{T(\partial_y, n) U(y)\} - \{T(\partial_y, n) \Pi(y, x, \sigma)\}' U(y)] d_y S, \quad x \in D. \quad (17)$$

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть $U(y)$ – регулярное решение уравнения (1) в области D , на части Σ удовлетворяющее условию

$$|U(y)| + |T(\partial_y, n)U(y)| \leq 1, \quad y \in \Sigma. \quad (18)$$

Тогда при $\sigma \geq 1$ справедлива оценка

$$|U(x) - U^\sigma(x)| \leq C_1(\lambda, \mu, x)C(\sigma) \exp(-\sigma x_m), \quad x \in D, \quad (19)$$

где

$$C(\sigma) = \begin{cases} \sigma^n, & \text{если } m = 2n, n \geq 2, \\ \sigma^{n+1}, & \text{если } m = 2n + 1, n \geq 1, \end{cases}$$

$C_1(\lambda, \mu, x)$ – постоянная, зависящая от λ, μ, x и размерности пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (3), (12), (13), (16) и оценки (14), (15), нетрудно получить неравенство

$$\int_{\Sigma} [|\Pi(y, x, \sigma)| + |T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)|] d_y S \leq C_1(\lambda, \mu, x)C(\sigma) \exp(-\sigma x_m), \quad x \in D. \quad (20)$$

Из теоремы 2 для регулярного решения в области D системы (1) вытекает справедливость интегральной формулы Соммилиана [19]:

$$U(x) = \int_{\partial D} [\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}'U(y)] d_y S, \quad x \in D.$$

Перепишем это равенство в виде

$$U(x) = \int_S [\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}'U(y)] d_y S + \int_{\Sigma} [\Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}'U(y)] d_y S, \quad x \in D. \quad (21)$$

Теперь неравенство (19) следует из (17), (18), (20) и (21). Теорема доказана.

Приведем результат, который позволяет вычислить $U(x)$ приближенно, когда на поверхности S вместо $U(y)$ и $T(\partial_y, n)U(y)$ заданы их непрерывные приближения $f_\delta(y)$ и $\psi_\delta(y)$, $0 < \delta < 1$,

$$\max_S |U(y) - f_\delta(y)| + \max_S |T(\partial_y, n(y))U(y) - \psi_\delta(y)| < \delta. \quad (22)$$

Функцию $U^{\sigma\delta}(x)$ определим формулой

$$U^{\sigma\delta}(x) = \int [\Pi(y, x, \sigma)\psi_\delta - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}'f_\sigma(y)] d_y S, \quad x \in D, \quad (23)$$

где $x \in D$, $\sigma = (1/x_m^0) \ln(1/\delta)$, $x_m^0 = \max_{x \in \overline{D}} x_m$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Пусть $U(y)$ – регулярное решение системы (1) в области D , удовлетворяющее граничному условию

$$|U(y)| + |T(\partial_y, n)U(y)| \leq 1, \quad y \in \partial D. \quad (24)$$

Тогда справедлива оценка

$$|U(x) - U^{\sigma\delta}(x)| \leq C_2(\lambda, \mu, x) \delta^{x_3/x_3^0} C(\delta), \quad x \in D, \quad (25)$$

где

$$C(\delta) = \begin{cases} \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^n, & \text{если } m = 2n, n \geq 2, \\ \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{n+1}, & \text{если } m = 2n + 1, n \geq 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (6), (21) и (23) имеем

$$\begin{aligned} U(x) - U^{\sigma\delta}(x) &= \int_s [\Pi(y, x, \sigma)(T(\partial_y, n)U(y) - \psi_\delta(y)) \\ &\quad - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}'(U(y) - f_\delta(y))] d_y S \\ &\quad + \int_\Sigma [\Pi(y, x, \sigma)(T(\partial_y, n)U(y)) \\ &\quad - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}'] d_y S, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\Pi(y, x, \sigma)$ определяется из (12), (13) и (16), т.е. $\Pi(y, x, \sigma)$ – матрица Карлемана рассматриваемой задачи Коши. При условиях теоремы и неравенств (20), (21) и (24) выводим неравенство

$$\begin{aligned} &\left| \int_S [\Pi(y, x, \sigma)(T(\partial_y, n)U(y) - \psi_\delta(y)) - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}'(U(y) - f_\delta(y))] d_y S \right| \\ &\leq C_1(\lambda, \mu, x) C(\sigma) \exp(\sigma x_m^0 - \sigma x_m), \quad x \in D. \end{aligned} \quad (27)$$

В силу теоремы 4 и (24) получим

$$\begin{aligned} &\left| \int_S [\Pi(y, x, \sigma)(T(\partial_y, n)U(y)) - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}'(U(y))] d_y S \right| \\ &\leq C_1(\lambda, \mu, x) C(\sigma) \exp(-\sigma x_m), \quad x \in D. \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь из (26)–(28) имеем

$$|U(x) - U^{\sigma\delta}(x)| \leq C_1(\lambda, \mu, x) C(\sigma) (1 + \delta \exp \sigma x_m^0) \exp(-\sigma x_m), \quad x \in D, \quad (29)$$

где

$$C(\sigma) = \begin{cases} \sigma^n, & \text{если } m = 2n, n \geq 2, \\ \sigma^{n+1}, & \text{если } m = 2n + 1, n \geq 1. \end{cases}$$

Так как $\sigma = (1/x_m^0) \ln(1/\delta)$, то из (29) следует (25), а именно, если $m = 2n, n \geq 2$, то

$$\begin{aligned} |U(x) - U^{\sigma\delta}(x)| &\leq 2C_1(\lambda, \mu, x) \left[\frac{1}{x_m^0} \right]^n \delta^{x_m/x_m^0} \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^n \\ &= C_2(\lambda, \mu, x) \delta^{x_m/x_m^0} \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^n, \quad x \in D; \end{aligned}$$

если $m = 2n + 1, n \geq 1$, то

$$\begin{aligned} |U(x) - U^{\sigma\delta}(x)| &\leq 2C_1(\lambda, \mu, x) \left[\frac{1}{x_m^0} \right]^{n+1} \delta^{x_m/x_m^0} \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{n+1} \\ &= C_2^1(\lambda, \mu, x) \delta^{x_m/x_m^0} \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{n+1}, \quad x \in D. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из доказанных теорем вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предельные равенства*

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U^\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} U^{\sigma\delta}(x) = U(x)$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D .

Формула (17) дает в явном виде приближенное решение задачи (1), (2) в точке $x \in D$, а формула (23) представляет приближенное решение, когда данные Коши на поверхности S заданы приближенно. Эти формулы основаны на постановке и методе анализа, предложенных Лаврентьевым (см. [1]).

II. Теперь приведем аналогичные результаты для областей типа конуса. Пусть D_ρ – ограниченная односвязная область из $\mathbb{R}^m$ с границей, состоящей из части Σ поверхности конуса

$$\alpha_1 = \tau y_m, \quad \alpha_1^2 = y_1^2 + \dots + y_{m-1}^2, \quad \tau = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\rho}, \quad y_m > 0, \quad \rho > 1,$$

и гладкого куска поверхности S , лежащего внутри конуса. Будем считать

$$x_0 = (0, 0, \dots, x_m) \in D_\rho.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \beta &= \tau y_m - \alpha_0, \quad \gamma = \tau x_m - \alpha_0, \quad \alpha_0^2 = x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2, \\ \alpha^2 &= (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_{m-1} - x_{m-1})^2, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2}\tau + \beta, \quad w_0 = i\tau\alpha + \beta. \end{aligned}$$

Будем считать, что существует регулярное решение системы (1) в области D_ρ , удовлетворяющее условию Коши на поверхности S , т.е. $U \in C^2(D_\rho) \cap C^1(\overline{D}_\rho)$.

С целью построения приближенного решения задачи Коши (1), (2) в точке $x_0 \in D_\rho$ в формулах (7)–(9) положим

$$K(w) = E_\rho(\sigma^{1/\rho} w), \quad K(x_m) = E_\rho(\sigma^{1/\rho} \gamma), \quad \sigma > 0, \quad (30)$$

где $E_\rho(w)$ – целая функция Миттаг-Леффлера [20].

Возьмем в формулах (7)–(9) $\Phi(y, x) = \Phi_\sigma(y, x)$ и определим матрицу Карлемана по формуле (16).

Здесь

$$\Phi_\sigma(y, x) = \frac{\varphi_\sigma(y, x)}{c_m E_\rho(\sigma^{1/\rho} \gamma)}, \quad y \neq x,$$

где $\varphi_\sigma(y, x)$ определяется следующими равенствами:

- если $m = 2n + 1, n \geq 1$, то

$$\varphi_\sigma(y, x) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial S^{n-1}} \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{E_\rho(\sigma^{1/\rho} w)}{i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m - x_m} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad y \neq x;$$

- если $m = 2n, n \geq 2$, то

$$\varphi_\sigma(y, x) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial S^{n-2}} \operatorname{Im} \frac{E_\rho(\sigma^{1/\rho} w)}{\alpha(i\alpha + y_m - x_m)}, \quad y \neq x.$$

Из свойств $E_\rho(w)$ следует, что при $y \in \Sigma, 0 < u < \infty$ функция $\Phi(y, x)$, определенная формулами (7)–(9), (30), ее градиент и ее вторые частные производные $\partial^2 \Phi_\sigma(y, x) / (\partial y_i \partial y_j), i, j = 1, \dots, m$, при фиксированном $x \in D_\rho$ и $\sigma \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Тогда из (3), (7)–(9), (16) и (30) получим, что матрица $\Pi(y, x, \sigma)$ и ее напряжения $T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$ также стремятся к нулю на $y \in \Sigma$. В силу определения 2 и формулы (11) матрица $\Pi(y, x, \sigma)$ является матрицей Карлемана для области D_ρ и части Σ .

Введем следующие обозначения:

$$U^\sigma(x_0) = \int_S [\Pi(y, x_0, \sigma) \{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x_0, \sigma)\}' U(y)] dy S, \quad (31)$$

$$U^{\sigma\delta}(x_0) = \int_S [\Pi(y, x_0, \sigma) \psi_\delta(y) - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x_0, \sigma)\}' f_\delta(y)] dy S, \quad x_0 \in D_\rho, \quad (32)$$

$$\sigma = \frac{1}{R} \ln \frac{1}{\delta}, \quad R^\rho = \max_{y \in S} \operatorname{Re} w_0^\rho, \quad 0 < \delta < 1.$$

Имеют место следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $U(y)$ – регулярное решение системы (1) в области D_ρ , на части Σ удовлетворяющее условию

$$|U(y)| + |T(\partial_y, n)U(y)| \leq 1, \quad y \in \Sigma = \partial D_\rho \setminus S. \quad (33)$$

Тогда при $x = x_0 \in D_\rho$, $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ справедливы неравенства:

- если $m = 2n + 1$, $n \geq 1$, то

$$|U(x) - U^\sigma(x_0)| \leq C_1(x_0)\sigma^{m+2} \exp(-\sigma\gamma^\rho),$$

- если $m = 2n$, $n \geq 2$, то

$$|U(x) - U^\sigma(x_0)| \leq C_2(x_0)\sigma^{m+1} \exp(-\sigma\gamma^\rho),$$

где

$$C_k(x_0) = C_k(\lambda, \mu, \rho) \int_{\partial D_\rho} \frac{d_y S}{r^m}, \quad r = |y - x_0|, \quad k = 1, 2. \quad (34)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $U(y)$ – регулярное решение системы (1) в области D_ρ , удовлетворяющее (33) на всей границе.

Тогда справедливы следующие неравенства:

- если $m = 2n + 1$, $n \geq 1$, то

$$|U(x_0) - U^{\sigma\delta}(x_0)| \leq C_1(x_0)\delta^{(\gamma/R)^\rho} \ln^{m+2} \frac{1}{\delta}, \quad x_0 \in D_\rho;$$

- если $m = 2n$, $n \geq 2$, то

$$|U(x_0) - U^{\sigma\delta}(x_0)| \leq C_2(x_0)\delta^{(\gamma/R)^\rho} \ln^{m+1} \frac{1}{\delta}, \quad x_0 \in D_\rho,$$

где $C_k(x_0)$ определяется из (34).

СЛЕДСТВИЕ 2. Предельные равенства

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U^\sigma(x_0) = U(x_0), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} U^{\sigma\delta}(x_0) = U(x_0)$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D_ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 5, 6 аналогично доказательству теорем 3, 4.

Формула (31) дает в явном виде приближенное решение задачи (1), (2), а формула (32) изображает приближенное решение, когда данные Коши на S заданы приближенно.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность профессору Ш. Я. Ярмухамедову за постановку задачи и постоянные обсуждения в процессе ее решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
- [2] Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. № 6. С. 819–842.
- [3] Маргелян С. Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // УМН. 1956. Т. 11. № 5. С. 3–26.
- [4] Иванов В. К. Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 1. С. 131–136.
- [5] Ярмухамедов Ш. Я., Ишанкулов Т. И., Махмудов О. И. О задаче Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 2. С. 281–283.
- [6] Ярмухамедов Ш. Я., Ишанкулов Т. И., Махмудов О. И. О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 1. С. 186–190.
- [7] Ишанкулов Т. И., Махмудов О. И. Задача Коши для системы уравнений термоупругости в пространстве // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 2. С. 210–217.
- [8] Махмудов О. И. Задача Коши для системы теории упругости в пространстве // Дисс. . . . к.ф.-м.н. Новосибирск, 1990.
- [9] Махмудов О. И. Задача Коши для системы уравнений пространственной теории упругости в перемещениях // Изв. вузов. Сер. матем. 1994. № 1(380). С. 54–61.
- [10] Махмудов О. И., Ниёзов И. Э. Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений теории упругости в перемещениях // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 2. С. 369–376.
- [11] Махмудов О. И., Ниёзов И. Э. Об одной задаче Коши для системы уравнений теории упругости // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 674–678.
- [12] Махмудов О. И., Ниёзов И. Э. Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 4. С. 548–553.
- [13] Махмудов О. И., Ниёзов И. Э. Задача Коши для системы теории упругости в бесконечной области // Узбекский матем. ж. 1999. № 2. С. 34–39.
- [14] Ишанкулов Т. И., Махмудов О. И. Задача Коши для системы уравнений моментной теории упругости в пространстве // Узбекский матем. ж. 1996. Т. 1. № 1. С. 22–30.
- [15] Айзенберг Л. А., Тарханов Н. Н. Абстрактная формула Карлемана // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 6. С. 1292–1296.
- [16] Тарханов Н. Н. О матрице Карлемана для эллиптических систем // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 294–297.
- [17] Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
- [18] Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
- [19] Купрадзе В. Д., Бурчуладзе Т. В., Гегелия Т. Г. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М.: Наука, 1976.
- [20] Джарбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.