Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, О связи многомерной проблемы делителей Дирихле с границей нулей $\zeta(s)$, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 3, 477–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:43:37

О СВЯЗИ МНОГОМЕРНОЙ ПРОБЛЕМЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ ДИРИХЛЕ С ГРАНИЦЕЙ НУЛЕЙ $\zeta(s)$

А. А. Карацуба

Пусть

$$R_k(x) = \sum_{1 < n \leq x} \tau_k(n) - \operatorname{Res}_{s=1} \left(\zeta^k(s) \frac{x^s}{s} \right),$$

где k – натуральное число, $x \geq 2$, $\tau_k(n)$ – количество решений в натуральных числах $x_1, \dots, x_k$ уравнения $x_1 \cdots x_k = n$, $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, $s = \sigma + it$, $i^2 = -1$, $\sigma = \operatorname{Re} s$, $t = \operatorname{Im} s$. Нахождение правильного порядка роста величины $|R_k(x)|$ при $x \rightarrow +\infty$ и любых $k \geq 2$ называется *многомерной проблемой делителей Дирихле*, так как именно Дирихле поставил эту задачу и доказал, что

$$|R_k(x)| \leq x^{1-1/k} (c \log x)^k, \quad (1)$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная (см., например, [1, с. 309]).

В [2] автор доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\alpha(y)$ – невозрастающая функция, $y \geq 2$, $y^{-1} \leq \alpha(y) \leq 1/2$, и пусть при некотором $c \geq 2$ и всех $k \geq 2$, $x \geq 2$ выполняется неравенство

$$|R_k(x)| \leq x^{1-\alpha(k)} (c \log x)^k.$$

Тогда существует абсолютная постоянная $c_1 > 0$ такая, что в области s -плоскости вида $|t| \geq e^2$,

$$\sigma \geq 1 - c_1 \alpha(\log |t|) (\log \log |t|)^{-1}$$

функция $\zeta(s)$ не имеет нулей.

Теорему А можно немного уточнить, сохраняя схему ее доказательства, но по-другому выбирая в нужном месте параметры. Справедлива

ТЕОРЕМА Б. Пусть выполняются условия теоремы А. Тогда $\zeta(s) \neq 0$ в области s -плоскости вида $|t| \geq e^{10}$,

$$\sigma \geq 1 - c_1 \alpha \left(\frac{\log |t|}{\log \log |t|} \right) (\log \log |t|)^{-1},$$

где $c_1 > 0$ – абсолютная постоянная.

Для доказательства теоремы Б нужны две леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha(y)$ – произвольная вещественная функция вещественного аргумента $y \geq 2$, причем $y^{-1} \leq \alpha(y) \leq 1/2$. Пусть при некотором $c \geq 2$ для некоторого натурального числа $k \geq 2$ и любых $x \geq 2$ выполняется оценка

$$|R_k(x)| \leq x^{1-\alpha(k)} (c \log x)^{-1}.$$

Тогда при любых $t \geq 2$ и σ с условием $1 - \alpha(k) < \sigma < 3/2$ справедливо следующее неравенство:

$$|\zeta(\sigma + it)| < 8ct^{1/k} (\sigma + \alpha(k) - 1)^{-1-1/k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2].

ЛЕММА 2. Пусть при $t \rightarrow +\infty$ в области

$$t \geq e^2, \quad 1 - \theta(t) \leq \sigma \leq 2,$$

выполняется оценка

$$\zeta(s) = O(e^{\varphi(t)}),$$

где $\varphi(t)$ и $\theta^{-1}(t)$ — положительные неубывающие функции, причем $\theta(t) \leq 1$, $\varphi(t) \rightarrow +\infty$ и, кроме того,

$$\frac{\varphi(t)}{\theta(t)} = o(e^{\varphi(t)}).$$

Тогда $\zeta(s) \neq 0$ в области $t \geq e^2$,

$$\sigma \geq 1 - c_2 \frac{\theta(2t+1)}{\varphi(2t+1)},$$

где $c_2 > 0$ — абсолютная постоянная.

Это есть теорема Валле-Пуссена (см. [1, с. 62]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Б. Возьмем в лемме 1

$$k = \left\lceil \frac{\log t}{\log \log t} \right\rceil, \quad t \geq e^{10}, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{2}\alpha(k).$$

Пользуясь условиями, находим неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\log t}{\log \log t} &\geq k \geq \frac{\log t}{\log \log t} - 1 > \frac{1}{2} \frac{\log t}{\log \log t}, \\ \sigma + \alpha(k) - 1 &\geq \frac{1}{2}\alpha(k) \geq \frac{1}{2k} \geq \frac{\log \log t}{2 \log t} > \frac{1}{\log t}, \\ (\sigma + \alpha(k) - 1)^{-1-1/k} &< (\sigma + \alpha(k) - 1)^{-2} < (\log t)^2, \\ t^{1/k} &< t^{2(\log \log t)/\log t} = (\log t)^2. \end{aligned}$$

Поэтому при $t \geq e^{10}$ и

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\log t}{\log \log t}\right)$$

для $|\zeta(\sigma + it)|$ получаем оценку

$$|\zeta(\sigma + it)| < 8c(\log t)^4. \quad (2)$$

Возьмем теперь в лемме 2

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\log t}{\log \log t}\right), \quad \varphi(t) = 4 \log \log t.$$

Тогда

$$e^{\varphi(t)} = (\log t)^4$$

и, следовательно, по (2)

$$\zeta(\sigma + it) = O(e^{\varphi(t)}).$$

Кроме того, так как $\alpha(y) \geq y^{-1}$, то

$$0 < \frac{\varphi(t)}{\theta(t)} = \frac{8 \log \log t}{\alpha(\log t / \log \log t)} \leq 8 \log t = o(\log^4 t) = o(e^{\varphi(t)}).$$

Итак, все условия леммы 2 выполнены. Поэтому получаем, что $\zeta(s) \neq 0$ в области s -плоскости вида $t \geq e^{10}$,

$$\sigma \geq 1 - c_2 \frac{\theta(2t+1)}{\varphi(2t+1)} \geq 1 - c_1 \alpha\left(\frac{\log t}{\log \log t}\right)(\log \log t)^{-1},$$

где $c_1 > 0$ — некоторая абсолютная постоянная. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из оценки Дирихле (1) и теоремы Б следует, что $\zeta(s) \neq 0$ в области $|t| \geq e^{10}$,

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log |t|}.$$

Это есть известная граница нулей $\zeta(s)$, полученная Валле-Пуссенном (см., например, [4, с. 33]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из оценки автора [3] вида

$$|R_k(x)| \leq x^{1-ak^{-2/3}} (c \log x)^k$$

следует, что $\zeta(s) \neq 0$ в области $|t| \geq e^{10}$,

$$\sigma \geq 1 - c_1 (\log |t|)^{-2/3} (\log \log |t|)^{-1/3}.$$

Это есть известная граница нулей $\zeta(s)$, полученная И. М. Виноградовым (см., например, [4, с. 116]).

Таким же образом уточняется теорема 3 из [2].

ТЕОРЕМА В. Пусть выполняются условия теоремы А, $10 < a \leq t$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\left| \sum_{n \leq a} n^{it} \right| \leq c_1 a^{1-\beta} \log^3 t,$$

где $\beta = 0.5 \alpha (\log t / \log \log t)$, $c_1 > 0$ – абсолютная постоянная.

Теорема Г дает количественную характеристику стремления к нулю при $y \rightarrow +\infty$ функции $\alpha(y)$.

ТЕОРЕМА Г. Пусть выполняются условия теоремы А. Тогда для бесконечной последовательности $y \rightarrow +\infty$ выполняется неравенство

$$\alpha(y) \leq 8 \frac{\log \log y}{\log y}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в лемме 1

$$k = \left\lfloor \frac{\log t}{\log \log t} \right\rfloor, \quad t \geq e^{10}, \quad \sigma = 1 - 0.5\alpha, \quad \alpha = \alpha \left(\frac{\log t}{\log \log t} \right).$$

Для $|\zeta(\sigma + it)|$ при $t \geq t_1$ находим оценку

$$|\zeta(\sigma + it)| < \alpha^{-1} (\log t)^3. \quad (3)$$

По известной омега-теореме (см., например, [4, с. 285]) имеет место соотношение

$$\zeta(\sigma + it) = \Omega \left(\exp \left(c_3 \frac{(\log t)^{1-\sigma}}{\log \log t} \right) \right),$$

где $c_3 > 0$ – абсолютная постоянная.

Это означает, что существует бесконечная последовательность чисел t , $t \rightarrow +\infty$, таких, что

$$|\zeta(\sigma + it)| > \exp \left(c_3 \frac{(\log t)^{1-\sigma}}{\log \log t} \right) = \exp \left(c_3 \frac{(\log t)^{0.5\alpha}}{\log \log t} \right). \quad (4)$$

Из (3) и (4) находим

$$\begin{aligned} (\log t)^3 \alpha^{-1} &> \exp \left(c_3 \frac{(\log t)^{0.5\alpha}}{\log \log t} \right), \\ 3 \log \log t + \log \beta &> c_3 \frac{(\log t)^{1/(2\beta)}}{\log \log t}, \quad \beta = \frac{1}{\alpha} \geq 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как по условию на $\alpha(y)$ $\alpha(y) \geq y^{-1}$, то

$$\alpha = \alpha \left(\frac{\log t}{\log \log t} \right) \geq \frac{\log \log t}{\log t}, \quad \beta = \frac{1}{\alpha} < \log t.$$

Следовательно, из (5) получаем при $t \geq t_2$

$$\begin{aligned} 4 \log \log t &\geq c_3 \frac{(\log t)^{1/(2\beta)}}{\log \log t}, & (\log t)^{1/(2\beta)} &\leq (\log \log t)^3, \\ \frac{1}{2\beta} &\leq 3 \frac{\log \log \log t}{\log \log t}, & \alpha &\leq 6 \frac{\log \log \log t}{\log \log t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Определим параметр y равенством $y = (\log t)/(\log \log t)$. Тогда (6) можно заменить еще более грубым соотношением:

$$\alpha = \alpha(y) < 8 \frac{\log \log y}{\log y}. \quad (7)$$

Таким образом, существует бесконечная последовательность чисел y , $y \rightarrow +\infty$, таких, что выполняется (7). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953. 2. Karatsuba A. A. // Functiones et Approximato. 2000. V. XXVIII. P. 131–140. 3. Карацуба А. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 3. С. 475–483. 4. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
31.03.2001