Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Амберг, Л. С. Казарин, О размерности нильпотентной алгебры, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 483–490

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:37:50

УДК 512.54

О РАЗМЕРНОСТИ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ

В. Амберг, Л. С. Казарин

Гипотеза Эггерта утверждает, что конечная коммутативная алгебра R над полем простой характеристики p обладает свойством $\dim R \geq p \dim R^{(1)}$, где $R^{(1)}$ – подпространство R , порожденное всеми p -ми степенями элементов из R . Получены результаты, связанные с этой гипотезой, и результаты о нильпотентных алгебрах, имеющих относительно большой класс нильпотентности.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Ассоциативная нильпотентная алгебра над полем простой характеристики p называется p -алгеброй. Теорема Эггерта утверждает, что если коммутативная нильпотентная алгебра R над совершенным полем характеристики p содержит такие два элемента a и b , что a^p и b^p линейно независимы, то $\dim R \geq 2p$ (см. [1, теорема 2.2]). Это побудило Эггерта выдвинуть гипотезу, что для всякой коммутативной нильпотентной p -алгебры R справедливо соотношение $\dim R \geq p \dim R^{(1)}$, где $R^{(1)}$ – подпространство R , порожденное всеми p -ми степенями элементов R . Справедливость гипотезы дала бы дополнительную информацию о строении нильпотентных алгебр и конечных групп с факторизацией (см. [2]).

Гипотеза Эггерта, как видно из сказанного, сформулирована для коммутативных нильпотентных алгебр. Однако Стак доказала [3], что соотношение $\dim R \geq p \dim R^{(1)}$ верно и для некоммутативной p -алгебры R при условии, что размерность $R^{(1)}$ не превышает 2. В [4] она подтвердила справедливость гипотезы Эггерта для коммутативной нильпотентной алгебры R над совершенным полем характеристики $p > 0$ такой, что $\dim R^{(1)} = 3$. В конце статьи приведен пример нильпотентной 2-алгебры размерности 5, показывающий, что в некоммутативном случае гипотеза Эггерта неверна. Это дает ответ на вопрос, сформулированный Стак.

Наша первая теорема является обобщением результатов Эггерта и Стак на случай произвольных полей (коммутативность алгебр не предполагается).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть R – нильпотентная алгебра над произвольным полем F , содержащая такие два элемента x, y , что система $\{x^k, y^k\}$ линейно независима для некоторого $k \geq 1$. Тогда $\dim R \geq 2k$.

Второй автор благодарен DFG и Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 97-01-00547) за финансовую поддержку во время подготовки этой статьи.

Оценка, даваемая теоремой 1.1, достигается, например, для нильпотентной алгебры размерности $2k$, порожденной элементом x , где $y = x^2$, а также для алгебры $R = L_1 \oplus L_2$, являющейся прямой суммой подалгебр L_1 и L_2 размерности k , порожденных элементами x и y соответственно.

Пример в конце статьи показывает, что соответствующее утверждение для трех элементов уже неверно. Однако для коммутативных нильпотентных алгебр справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть R – коммутативная нильпотентная алгебра над произвольным полем F , содержащая такие элементы x, y, z , что система $\{x^k, y^k, z^k\}$ линейно независима для некоторого k . Если для любой тройки элементов a, b, c алгебры R , удовлетворяющей условиям $a^k = x^k, b^k = y^k, c^k = z^k$, подалгебра, порожденная этими элементами, не может быть порождена двумя элементами, то $\dim R \geq 3k$.

Из теоремы 1.2 вытекает следующий результат, содержащий теорему Стак из [4] как частный случай, справедливый для любого поля простой характеристики.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть R – коммутативная нильпотентная p -алгебра, содержащая такие три элемента x, y, z , что система $\{x^{p^m}, y^{p^m}, z^{p^m}\}$ линейно независима для некоторого целого числа $m \geq 1$. Тогда $\dim R \geq 3p^m$.

Наши методы отличны от [1] и основаны на признаках существования “больших” однопорожденных подалгебр. Следующая теорема, представляющая независимый интерес, дает критерии существования таких подалгебр. Заметим, что она справедлива и для некоммутативных нильпотентных алгебр. Частные случаи этой теоремы имеются также в [3], [4].

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть R – конечно-порожденная нильпотентная алгебра класса нильпотентности $n(R)$ над произвольным полем F . Подалгебра L алгебры R , порожденная одним элементом и такая, что $\dim L = n(R)$, существует, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (i) $\dim R^i / R^{i+1} = 1$ для некоторого $i < n(R)$,
- (ii) $n(R) > \lceil (1/2)(\dim R + 1) \rceil$,
- (iii) $n(R) \geq \dim R - k$ для некоторого $k \geq 0$ и $\dim R \geq 2k + 2$.

Любая коммутативная нильпотентная p -алгебра R является абелевой p -группой относительно “цикленного умножения” $x \circ y = x + y + xy$ для любых двух элементов $x, y \in R$ (см., к примеру, [2]). Эта группа называется *присоединенной группой* R° алгебры R . Если гипотеза Эггерта верна, то строение присоединенной группы любой конечной коммутативной нильпотентной p -алгебры будет легко описать (см. замечания). Из теоремы 1.1 следует также, что присоединенная группа конечной коммутативной нильпотентной 2-алгебры, содержащая подгруппу, изоморфную прямому произведению двух циклических групп порядка 32, имеет порядок не меньше 2^{32} .

Введем следующие обозначения. Алгебра L над полем F называется *однопорожденной алгеброй*, если существует такой элемент $a \in L$, что L состоит из всех элементов вида $af(a)$ для многочленов $f \in F[x]$. Подалгебра алгебры R , порожденная произведениями $x_1 x_2 \cdots x_k$, где $k \geq n$ и $x_1, x_2, \dots, x_k \in R$, обозначается через R^n . В

частности, $R^1 = R$. Алгебра R называется *нильпотентной*, если $R^m = 0$ для некоторого натурального числа m . Наибольшее натуральное число n такое, что $R^n \neq 0$, называется в этом случае *классом нильпотентности* алгебры R . Подалгебра алгебры R , порожденная элементами $x_1, x_2, \dots, x_s$, будет обозначаться $\langle\langle x_1, x_2, \dots, x_s \rangle\rangle$, тогда как подпространство алгебры R , натянутое на эти элементы, обозначается через $\langle x_1, x_2, \dots, x_s \rangle$. Коразмерность подалгебры L алгебры R определяется как $\text{codim } L = \dim R - \dim L$.

Будут рассматриваться также следующие полезные подмножества R : $T(R) = \{x \in R \mid x^p = 0\}$ и $R^{(1)}$ – подпространство в R , натянутое на все элементы вида x^p , где $x \in R$. Если R коммутативна, то $R^{(1)} = \{x^p \mid x \in R\}$. Аннулятор R есть $\text{Ann}(R) = \{x \in R \mid xy = yx = 0 \text{ для всех } y \in R\}$. Центр R – подалгебра $Z(R) = \{x \in R \mid yx = xy \text{ для всех } y \in R\}$. Далее, ${}^l\text{Ann}(S) = \{x \in R \mid xy = 0 \text{ для всех } y \in S\}$, ${}^r\text{Ann}(S) = \{x \in R \mid yx = 0 \text{ для всех } y \in S\}$. Следуя [4], будем всегда обозначать $\dim R^i / R^{i+1}$ через d_i . Легко видеть, что $d_i \geq 1$ при $i \leq n(R)$.

2. Некоторые леммы. Нам потребуется следующий результат, принадлежащий Крузу (см. [5, лемма 1.6.10]).

ЛЕММА 2.1. Пусть R – нильпотентная алгебра класса нильпотентности n над произвольным полем F . Если $d_{n-1} = \dim R^{n-1} / R^n = 1$, где $n \geq 2$, то $R^{n-1} \subseteq Z(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично лемме 1.6.10 в [5] с заменой выражений типа $y \neq 0 \pmod{p}$ на $y \in F \setminus \{0\}$ и т.п., если необходимо.

ЛЕММА 2.2. Пусть R – нильпотентная алгебра класса нильпотентности n над произвольным полем F . Если $d_i = 1$ для некоторого целого числа $i \geq 1$, то $d_j = \dim R^j / R^{j+1} = 1$ для любого $i \leq j \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $i = 1$, то R/R^2 размерности 1 и R будет однопорожденной алгеброй. Значит $i > 1$. Если $i = n$, то $R^{i+1} = 0$ и доказывать нечего. Поэтому $R^{i+1} \neq 0$ и $R^i / R^{i+2} \subseteq Z(R / R^{i+2})$ по лемме 2.1. Достаточно показать, что $d_{i+1} = 1$. Поэтому мы можем считать, что $R^{i+2} = 0$ и $n = i + 1$. Теперь $R^{n-1} = \langle w \rangle \oplus R^n$ для некоторого $w \in R^{n-1}$ и $yw = wy \in R^n$ для любого $y \in R$. Если $xR^{n-2} \subseteq R^n$ и $R^{n-2}x \subseteq R^n$ для любого $x \in R$, то $R^n \subseteq R^{n-1}$, что неверно. Следовательно, мы можем предполагать, что найдется элемент $u_0 \in R^{n-2}$ такой, что $w = xu_0 \in R^{n-1} \setminus R^n$. Отсюда для любого $y \in R$ имеем $yw = yxu_0 = wy = x(u_0y)$, где $u_0y \in R^{n-1} = \langle w \rangle \oplus R^n$. Следовательно, $yw = x(u_0y) = \lambda xw$, где $\lambda \in F$, и потому $R^n = \langle xw \rangle$ имеет размерность 1, что и дает требуемый результат.

ЛЕММА 2.3. Пусть R – коммутативная нильпотентная алгебра класса нильпотентности n над произвольным полем F и $d_i = 2$ для некоторого целого $i \geq 2$. Тогда $d_j \leq 2$ для любого $i \leq j \leq n$ и существует такой элемент $u \in R$, что $R^i = R^{i-1}u + R^{i+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть, касающаяся неравенств $d_j \leq 2$, доказана в [4, лемма 2].

Допустим, что $R^{i-1}x + R^{i+1} = \langle w \rangle \oplus R^{i+1}$ и $R^{i-1}y + R^{i+1} = \langle u \rangle \oplus R^{i+1}$, где $R^i = \langle u, w \rangle \oplus R^{i+1}$ для некоторых $x, y \in R$ и $u, w \in R^i$. Можно предполагать, что

$xa = u, yb = w$ для некоторых $a, b \in R^{i-1}$. Допустим, что не существует $z \in R$ со свойством $R^i = R^{i-1}z + R^{i+1}$. Тогда $xb = \lambda u + h, ya = \mu a + g$, где $\lambda, \mu \in R^{i-1}$ и $h, g \in R^{i+1}$. Так как $(x+y)a = u + \mu w + g$ и $(x+y)b = \lambda u + w + h$ и система $\{(x+y)a, (x+y)b\}$ линейно зависима по модулю R^{i+1} , то $\lambda\mu = 1$. Отсюда $R^i = \langle xu, yu \rangle + R^{i+1}$, а так как $i > 1$, то найдется такой $u_0 \in R$, что $R^i = R^{i-1}u_0 + R^{i+1}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть R – нильпотентная алгебра над произвольным полем F , имеющая собственную однопорожжденную подалгебру $L = \langle\langle a \rangle\rangle$ коразмерности k . Тогда существует идеал $S = {}^l\text{Ann}(a^k)$ алгебры R такой, что

$$\dim S - \dim L \cap S \leq k \quad \text{и} \quad R = L + S.$$

Если $\dim L \geq k + 1$, то

$$S_0 = (L \cap S) + (L \cap S)S$$

– идеал S , причем $\dim S/S_0 \leq k$, $n(R) = \dim L$ и $y^{k+2} = 0$ для любого $y \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = \langle\langle a \rangle\rangle$, где $a^{n+1} = 0 \neq a^n$ для некоторого целого положительного числа n . Если $k = 1$, то $R = L + \langle b \rangle$ для некоторого $b \in R \setminus L$. Так как $ab \in L$, то $ab = \sum_{i=1}^n \lambda_i a^i$, где $\lambda_i \in F$ и $i = 1, 2, \dots, n$. Отсюда $a(b - \sum_{i=1}^n \lambda_i a^{i-1}) = 0$. Если $\lambda_1 \neq 0$, то $z = b - \lambda_1 \cdot 1 - \sum_{i=2}^n \lambda_i a^{i-1} \in R + 1.F$ – обратимый элемент и из $az = 0$ следует, что $a = 0$. В этом случае лемма, очевидно, верна.

Предположим, что $a \neq 0$. Тогда $z \in R \setminus L$ и мы можем заменить b на z . Следовательно, можно предполагать далее, что $ab = 0$. Так как $ba, b^2 \in L$, то $ba = \sum_{i=1}^n \gamma_i a^i$, $b^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i a^i$ для некоторых $\gamma_i, \beta_i \in F$, $i = 1, 2, \dots, n$. Из $aba = b^2 a = 0$ следует, что $\gamma_i = \beta_i = 0$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$. В этом случае $\langle\langle a^n \rangle\rangle \subseteq \text{Ann}(R)$ и $\langle\langle a^n, b \rangle\rangle$ будет идеалом в R , $R = L + S$ и в случае $k = 1$ лемма доказана. Заметим, что она верна и при $\dim R \leq 2k$. Поэтому мы можем считать, что $\dim R > 2k$. Пусть $S = {}^l\text{Ann}(a^k)$. Рассматривая a как нильпотентный линейный оператор на $R + 1.F$ и на R , мы получим жорданово разложение R в виде $R = L \oplus L_1 \oplus \dots \oplus L_s$, где L_i – подпространства вида $L_i = \langle b_i, b_i a, \dots, b_i a^{n_i-1} \rangle$ и $n_i \leq n+1$, $b_i a^{n_i} = 0$, $k = \sum_{i=1}^s n_i$. Отсюда $L_i a^k = 0$ для любого $1 \leq i \leq s$. Таким образом, $L_i \subseteq {}^l\text{Ann}(a^k) = S$. Отсюда следует разложение $R = L + S$, где S – левый идеал R . Для всякого $x \in R$ имеем $x = u + s$, где $u \in L$, $s \in S$. Поэтому $Sx = S(u+s)$. Так как $Sua^k = Sa^k u = 0$, то $Su \subseteq S$ и ясно, что $Ss \subseteq S$. Отсюда следует, что S – также и правый идеал R . Ясно, что $\dim R = \dim L + \dim S - \dim L \cap S$ и $k = \dim S - \dim L \cap S$. Так как $L \cap S = \text{Ann}(a^k) \cap L$, то $L \cap S = \langle a^{n-k+1}, \dots, a^n \rangle$ и $\dim L \cap S \leq k$. Предположим теперь, что $\dim L \geq k+1$. Очевидно, что $R^{k+1} \geq L^{k+1}$. Если $\dim R/R^{k+1} \geq 2k$, то $\dim R^{k+1} \geq \dim L - k$, и потому $\dim R \geq 2k + \dim L - k$. Равенство выполнено в случае $R^{k+1} = L^{k+1}$. Теперь ясно, что $R^{k+i} = L^{k+i}$ для каждого $i \geq 1$, и потому $n(R) = \dim L$. Так как $y^{k+1} \in L^{k+1}$, то $y^{k+1} = \alpha x^k$ для некоторого $\alpha \in L$. Так как $yx^{k-1} = 0$, то $y^{k+2} = 0$, что завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2.5. Пусть R – коммутативная нильпотентная алгебра такая, что $d_i = d_{i+1} = d \leq 2$ для $1 < i < n$ и $R^i = R^{i-1}u + R^{i+1}$ для некоторого $u \in R$. Тогда $R^i = L^i = Lu^{i-1}$ для подалгебры L , порожденной не более чем d элементами, один из которых есть u . Кроме того, $R = L + S$, где $S = \text{Ann}(u^{i-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d = 1$, то, очевидно, $R = L^i = Lu^{i-1}$ для некоторой подалгебры $L = \langle\langle u \rangle\rangle$. Пусть $d = 2$. По лемме 2.3 имеем $R^i = R^{i-1}u + R^{i+1}$ для некоторого $u \in R$. По лемме 3 в [4] получаем $R^i = \langle u^i, \dots, u^n, yu^{i-1}, \dots, yu^n \rangle = L^i = Lu^{i-1}$ для некоторого $y \in R$ и $L = \langle\langle u, y \rangle\rangle$.

Допустим, что $h \in R$. Так как $hu^{i-1} \in R^i = Lu^{i-1}$, то отсюда следует, что $hu^{i-1} = lu^{i-1}$ для некоторого $l \in L$. Поэтому $(h - l)u^{i-1} = 0$ и $h - l \in S = \text{Ann}(u^{i-1})$. Отсюда $R = L + S$, что и утверждалось.

3. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Предположим, что теорема 1.1 неверна и алгебра R – контрпример наименьшей размерности. Пусть нильпотентная алгебра R содержит элементы x и y такие, что x^k и y^k линейно независимы для некоторого целого числа $k \geq 1$. Тогда $R = \langle\langle x, y \rangle\rangle$ и $\dim R \leq 2k - 1$. Если $\dim R^i / R^{i+1} \geq 2$ для всех $i < k - 1$, то $\dim R / R^{k-1} \geq 2(k - 1)$ и $x^k, y^k \in R^k$ линейно зависимы. Поэтому $d_{k-1} = 1$ и по лемме 2.2 $d_i \leq 1$ для любого $i \geq k - 1$. По лемме 2.4 существует такая подалгебра $L = \langle\langle u \rangle\rangle$ для некоторого $u \in R$, что $\dim L = n(R)$. Из леммы 2.5 следует, что $R = L + S$, где $S = \text{Ann}(u^{k-2})$, а так как $\dim R \leq 2(k - 2) + n(R) - (k - 2) = k - 2 + \dim L$, то $\text{codim } L \leq k - 2$. По лемме 2.4 имеем $s^k = 0$ для всякого $s \in S$. Докажем, что $w^k = l^k$ для всякого w в R и подходящего l в L . Действительно, можно предполагать, что $w = l + s$ для некоторого l в L и s в S . Тогда

$$(l + s)^k = l^k + s^k + \sum l^{\varepsilon_1} s^{1-\varepsilon_1} \dots l^{\varepsilon_k} s^{1-\varepsilon_k},$$

где $\varepsilon_i \in \{1, 0\}$ для любого $1 \leq i \leq k$, причем $z^\varepsilon = z$ при $\varepsilon = 1$ и $z^\varepsilon = 1$ при $\varepsilon = 0$, а суммирование ведется по всем наборам $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, отличным от $(1, 1, \dots, 1)$ и $(0, 0, \dots, 0)$. Так как $l \in L$ перестановочен с любым слагаемым вида $x_1 x_2 \dots x_{k-1}$, то можно считать, что любое слагаемое нашей суммы имеет вид $s x_1 x_2 \dots x_{k-1}$. Но R^{k-1} аннигилируется элементом s , и потому сумма, выписанная выше, равна нулю. Отсюда $(l + s)^k = l^k + s^k = l^k$. Итак, если x^k и y^k – линейно независимые элементы R , то $x^k = l_1^k$, $y^k = l_2^k$ для подходящих $l_1, l_2 \in L$. Так как L – однопорожденная подалгебра R , это означает, что $\dim L \geq 2k$. Это последнее противоречие доказывает теорему 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Пусть R – коммутативная нильпотентная p -алгебра, содержащая три таких элемента x, y, z , что $U = \langle x^k, y^k, z^k \rangle$ имеет размерность 3. Допустим, что $d_i \geq 3$ для всех $i \leq k - 1$. Тогда $\dim R = \dim R / R^k + \dim R^k \geq 3(k - 1) = 3 = 3k$. Поэтому найдется такое целое число $1 < s < k - 1$, что $d_s \leq 2$. Если $d_k = 1$, то по леммам 2.2 и 2.5 существует такой $u \in R$, что $R^k = L^k = Lu^{k-1}$, где $L = \langle\langle u \rangle\rangle$. По лемме 2.5 имеем $R = L + S$, где $S = \text{Ann}(u^{k-1})$. Из леммы 2.4 следует, что $s^k \in L$ и $s^k u = s(s^{k-1} u) = su^{k-1} = 0$. Поэтому $s^k = \lambda u^n$, где $\lambda \in F$ и $u^n \neq 0 = u^{n+1}$. Так как $R = L + S$, то $x = u_1 + s_1, y = u_2 + s_2, z = u_3 + s_3$ для некоторых $u_1, u_2, u_3 \in L$ и $s_1, s_2, s_3 \in S$. Отсюда

$$x^k = u_1^k + s_1^k + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{i}{k} u_1^i s_1^{k-i}.$$

Очевидно, $u_1^i s_1^{k-i} \in R^k = Lu^{k-1}$. Поэтому $(x^k - u_1^k)u = 0$. По тем же причинам $(y^k - u_2^k)u = (z^k - u_3^k)u = 0$. Теперь $x^k = u_1^k + \lambda_1 u^n$, $y^k = u_2^k + \lambda_2 u^n$, $z^k = u_3^k + \lambda_3 u^n$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$. Если $n \geq 3k$, то $\dim R \geq 3k$ и доказывать нечего. Если $n \leq 2k$, то $U \subseteq \langle u^k, u^n \rangle$ и имеет размерность не выше двух. Это противоречие. Итак, $2k < n < 3k$. Отсюда следует, что $\text{codim } L \leq k - 2$. По лемме 2.4 $s^k = 0$ для всякого $s \in S$. Следовательно, $x^k = u_1^k$, $y^k = u_2^k$, $z^k = u_3^k$ — линейно независимые элементы L . Это невозможно, ибо $\dim L < 3k$.

Теперь мы можем предполагать, что $d_k = 2$, и по сказанному выше и по лемме 2.3 имеем $d_{k-1} = 2$. Из леммы 2.5 следует, что $R^{k-1} = L^{k-1} = Lu^{k-2}$ для некоторого $u \in R$, где L — подалгебра R с двумя образующими. Кроме того, $R = L + S$, где $S = \text{Ann}(u^{k-2})$. Если $s \in S$, то $su^{k-2} = 0$ и $s^{k-1} \in R^{k-1} = Lu^{k-2}$. Отсюда $s^k = 0$. Итак, $x = a + s_1$, $y = b + s_2$, $z = c + s_3$ для некоторых $a, b, c \in L$ и $s_1, s_2, s_3 \in S$. Так как $x^k = a^k$, $y^k = b^k$, $z^k = c^k$ и $a, b, c \in L$, то мы получили противоречие. Теорема 1.2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Пусть $k = p^m$. Если R является однопорожденной алгеброй, то результат очевиден. Допустим, что $\dim R < 3k$ и R имеет два образующих. Не ограничивая общности, можно считать, что $R = \langle \langle x, y \rangle \rangle$ и $z = \alpha x + \beta y + t$, где $t \in R^2$, $\alpha, \beta \in F$. Так как k есть степень числа p , то $z^k = \lambda x^k + \mu y^k + t^k$ для некоторых $\lambda, \mu \in F$. Если $t^k = 0$, то $z^k = \lambda x^k + \mu y^k$, что дает противоречие. Итак, $t^k \neq 0$. Отсюда класс нильпотентности R не меньше $2k$. По теореме 1.4 R имеет такую однопорожденную подалгебру $L = \langle \langle u \rangle \rangle$, что $\dim L = n(R)$. По лемме 2.4 $R = L + S$, где $S = \text{Ann}(u^{k-1})$. По лемме 2.5 $R^k = L^k$. Если $R^{k-1} = L^{k-1}$, то по лемме 2.5 $S = \text{Ann}(u^{k-2})$ и $s^k = 0$ для всякого $s \in S$. Следовательно, можно предполагать, что $x^k = a^k$, $y^k = b^k$, $z^k = c^k$ для некоторых $a, b, c \in L$. Отсюда $\dim L \geq 3k$, противоречие.

Итак, $R^k = L^k$ и $\dim L = 2k$. Так как $su^{k-1} = 0$ для всякого $s \in S$, то $s^k u = s(su^{k-1}) = 0$ и $s^k \in L$. Отсюда следует, что $s^k = \lambda u^{2k}$, где $\lambda \in F$. Рассуждая, как выше, легко видеть, что $x = a + s_1$, $y = b + s_2$, $z = c + s_3$ для некоторых $a, b, c \in L$ и $s_1, s_2, s_3 \in S$. Так как k является степенью p , то отсюда следует, что $x^k = a^k + s_1^k$, $y^k = b^k + s_2^k$, $z^k = c^k + s_3^k$. Ясно, что $x^k, y^k, z^k \in \langle \langle u^k, u^{2k} \rangle \rangle$, а последнее имеет размерность не более двух, что приводит к противоречию.

Итак, подалгебра $\langle \langle a, b, c \rangle \rangle$, где $a^k = x^k$, $b^k = y^k$, $z^k = c^k$, не может быть порождена менее чем тремя элементами. По теореме 1.2 имеем $\dim R \geq 3k$, что и утверждалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Пусть R — конечно-порожденная нильпотентная алгебра над полем F класса нильпотентности $n = n(R)$, удовлетворяющая одному из условий (i), (ii) или (iii).

Допустим, что выполнено условие (i). По лемме 2.2 имеем $d_{n-1} = 1$, а по лемме 2.1 $R^{n-1} \subseteq Z(R)$. Докажем, что найдется такая однопорожденная подалгебра L алгебры R , что $\dim L = n$. Пусть $b \in R^{n-1} \setminus R^n$. Так как R^n порождена элементами вида $x_1 x_2 \cdots x_n$, где $x_i \in R$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то найдутся элементы $a, y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in R$ такие, что $y_1 y_2 \cdots y_{n-2} y_{n-1} = b \in R^{n-1} \setminus R^n$ и $ab = ba \neq 0$. Так как $b = y_1 y_2 \cdots y_{n-2} y_{n-1} \in Z(R)$, то $ab \neq 0$ влечет $y_2 \cdots y_{n-1} a \in R^{n-1} \setminus R^n$. Напомним, что $\dim R^{n-1}/R^n = 1$. Следовательно, $y_2 \cdots y_{n-1} a \equiv \lambda b \pmod{R^n}$ для некоторого $\lambda \in F \setminus \{0\}$. Отсюда $a(y_2 \cdots y_{n-1} a) = \lambda ab \neq 0$ и $a(y_2 \cdots y_{n-1} a) = (y_2 \cdots y_{n-1} a)^2 \neq 0$. Повторяя этот процесс и используя индукцию, получим $a^{n-1} \equiv \mu b \pmod{R^n}$ для некоторого $\mu \in F \setminus \{0\}$.

Так как $ab \neq 0$, то $\mu a^n = ab \neq 0$ и $\dim \langle a \rangle = n$.

Предположим теперь, что алгебра R является контрпримером для (ii). По (i) имеем $\dim R^i / R^{i+1} \geq 2$ для любого $i < n$. Отсюда $\dim R \geq 2n(R) - 1$, т.е.

$$n(R) \leq \left\lceil \frac{1}{2}(\dim R + 1) \right\rceil.$$

Наконец, пусть $n(R) \geq \dim R - k$ и $\dim R \geq 2k + 2$. По (ii) можно предполагать, что $\dim R \geq 2n(R) - 1 \geq 2(\dim R - k) - 1$. Отсюда $\dim R \leq 2k + 1$, что неверно.

4. Примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть A – алгебра над полем F характеристики p , порожденная элементом x и имеющая размерность $\dim A = n = lp - 1$, и пусть $M = 1.F + A$ – алгебра с единицей, содержащая A в качестве подалгебры коразмерности 1, рассматриваемая как естественный A -модуль. Определим алгебру

$$R = (M, A) = \{(m, a) \mid m \in M, a \in A\}$$

с равенством $(m, a) = (m', a')$ тогда и только тогда, когда $m = m'$ и $a = a'$. Операции на R определяются следующим образом: $(m, a) + (m', a') = (m + m', a + a')$, $(m, a)(m', a') = (ma' + m'a, aa')$ для любых $(m, a), (m', a') \in R$. Легко видеть, что R – нильпотентная алгебра над полем F и $(1, 0)(0, x)^n = (1, 0)(0, x^n) = (x^n, 0) \neq (0, 0)$. Ясно, что произведение любых $n + 2$ элементов в R равно нулю. Если $r = (m, a) \in R$, то $r^l = (m_1, a^l)$ для некоторого $m_1 \in M$ и $r^{n+1} = r^{lp} = (m_1, a^l)^p = (pm_1, a^{lp}) = (0, 0)$. Следовательно, $n(R) = n + 1$ и в R не существует однопорожденных подалгебр размерности $n + 1$. Очевидно, $\dim R = 2n + 1 = 2n(R) - 1$. Этот пример показывает, что оценки, полученные в теореме 1.4, – наилучшие возможные.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь элементы $a = (0, x)$, $b = (1, x)$ и $c = (x, x)$ в алгебре R из предыдущего примера. Подалгебра $S = \langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ алгебры R коммутативна и имеет размерность $2n + 1$. Легко убедиться, что система a^n, b^n, c^n линейно независима. Однако $\dim S = 2n + 1 < 3n$ при $n > 1$. Этот пример показывает, что условия, наложенные на алгебру R в теоремах 1.2 и 1.1, существенны.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим 2-алгебру $R = \langle\langle x, y \rangle\rangle$ с $xy = x^3 = y^3 = 0$, $y^2 = yx^2$. Тогда R – некоммутативная 2-алгебра с двумя образующими x, y размерности 5. Ясно, что $\dim R^{(1)} = 3$. Этот пример показывает, что гипотеза Эггерта для некоммутативных алгебр в общем случае неверна.

5. Замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Справедливость гипотезы Эггерта $\dim R \geq p \dim R^{(1)}$ для конечной коммутативной нильпотентной p -алгебры R эквивалентна существованию таких однопорожденных алгебр $L_1, L_2, \dots, L_k$, что присоединенная группа R изоморфна $L_1^o \times L_2^o \times \dots \times L_k^o$. Заметим, что вовсе не предполагается, что L_i являются подалгебрами R .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1.4 может рассматриваться как аналог теоремы Шалева, доказавшего в [6], что каждая p -группа класса нильпотентности $n - r$ и порядка p^n имеет нильпотентную нормальную подгруппу класса ≤ 2 и индекса, зависящего только от p и r .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, наконец, что коммутативные нильпотентные алгебры R класса нильпотентности $n(R) = \dim R - 1$ или $\dim R - 2$ изучались Супруненко и Тышкевич в [7]. Нильпотентные матричные алгебры $M_n(F)$ с $n \leq 5$ изучены Брауном в [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Eggert N. H. Quasi-regular groups of finite commutative nilpotent algebras // Pacific J. Math. 1971. V. 36. P. 631–634.
- [2] Amberg B., Kazarin L. On the rank of a product of two finite p -groups and nilpotent p -algebras // Comm. Algebra. 1999. V. 27. № 8. P. 3895–3907.
- [3] Stack C. Dimensions of nilpotent algebras over fields of prime characteristic // Pacific J. Math. 1996. V. 176. P. 263–266.
- [4] Stack C. Some results on the structure of finite nilpotent algebras over fields of prime characteristic // J. Combin. Math. Combin. Comput. 1998. V. 28. P. 327–335.
- [5] Kruse R. L., Price T. Nilpotent Rings. New York: Gordon and Breach, 1969.
- [6] Shalev A. The structure of finite p -groups: effective proof of the coclass conjectures // Invent. Math. 1994. V. 115. P. 315–345.
- [7] Suprunenko D. A., Tyškevič R. I. Commutative Matrices. New York–London: Acad. Press, 1968.
- [8] Brown W. C. Constructing maximal commutative subalgebras of matrix rings in small dimensions // Comm. Algebra. 1997. V. 25. № 12. P. 3923–3946.

(Б. Амберг) Universität Mainz (Германия)

Поступило

(Л. С. Казарин) Ярославский государственный университет

28.11.2000

E-mail: amberg@mathematik.uni-mainz.de, kazarin@uniyar.ac.ru