Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Белошапка, Кубическая модель вещественного многообразия, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 503–519

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm763>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:06:57

УДК 517

КУБИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕЩЕСТВЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ

В. К. Белошапка

В работе строится кубическая модель роста вещественного подмногообразия комплексного пространства. Показано, что эта модель в своем диапазоне размерностей обладает полным спектром свойств, аналогичным хорошо известным свойствам касательных квадрик.

Библиография: 10 названий.

Со времен А. Пуанкаре известно, что условие конечномерности группы биголоморфных автоморфизмов роста вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ можно сформулировать в терминах 2-струи роста. Позже было показано [1], [2], что так же обстоят дела и для гиперповерхности в комплексном пространстве произвольной размерности не меньшей 2. Это условие есть условие невырожденности формы Леви роста. Точнее, верно следующее: если форма невырождена, то группа конечномерна; если вырождена, то можно указать гиперповерхность с этой формой (гиперквадрика), группа которой бесконечномерна. При этом ясно, что в терминах 1-струи такое условие сформулировать нельзя.

Пусть гиперповерхность в $\mathbb{C}^{n+1}$ с координатами $(z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^k)$ задана уравнением $\text{Im } w = F(z, \bar{z}, \text{Re } w)$. Введем градуировку условиями $[z] = 1$, $[\bar{z}] = 1$, $[\text{Re } w] = 2$. Эрмитову часть компоненты веса 2 обозначим через $\langle z, \bar{z} \rangle$. Это форма Леви данного роста в начале координат. После квадратичной замены уравнение роста примет вид

$$\text{Im } w = \langle z, \bar{z} \rangle + \text{члены веса не меньше 3.} \quad (1)$$

Таким образом, условие конечномерности группы роста – это условие невырожденности эрмитовой формы $\langle z, \bar{z} \rangle$. Гиперповерхность $Q = \{\text{Im } w = \langle z, \bar{z} \rangle\}$ называется *касательной гиперквадрикой*.

Мы говорим, что гиперквадрика является хорошей моделью роста невырожденной гиперповерхности, и в развернутой форме это означает, что справедливы следующие утверждения:

- 1) росток любой гиперповерхности эквивалентен ростку вида (1) (универсальность);

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 99-01-00969.

- 2) гиперквадрика – это алгебраическая поверхность, заданная уравнениями степени $d = 2$; любая гиперповерхность, заданная уравнениями меньшей степени, имеет бесконечномерную группу;
- 3) голоморфная эквивалентность гиперквадрик совпадает с их линейной эквивалентностью;
- 4) размерность группы гиперповерхности не превосходит размерности группы касательной гиперквадрики (экстремальность);
- 5) гиперквадрика однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно; на самом деле, однородность обеспечивается аффинными автоморфизмами (однородность);
- 6) имеется простой критерий конечномерности группы гиперквадрики (условие невырожденности эрмитовой формы – формы Леви), причем условие невырожденности является условием общего положения (конечномерность);
- 7) алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной гиперквадрике – это некоторая алгебра полиномиальных векторных полей ограниченной степени; степени коэффициентов не превосходят 2 (полиномиальность алгебры);
- 8) группа автоморфизмов невырожденной гиперквадрики – это подгруппа группы дробно-линейных преобразований $\mathbb{C}^{n+1}$ (рациональность группы).

Для ростков порождающих поверхностей коразмерности $k \geq 1$ можно повторить все почти дословно. Только уравнение ростка надо писать в $\mathbb{C}^{n+k}$ с координатами $(z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^k)$. Тогда пара параметров (n, k) , где n – размерность комплексной касательной, а k – коразмерность, определяет тип ростка. Эрмитова форма $\langle z, \bar{z} \rangle$ принимает значения в $\mathbb{R}^k$. Критерий конечномерности квадрики типа (n, k) , который естественно взять за определение невырожденности векторнозначной эрмитовой формы и который обобщает условие невырожденности скалярной эрмитовой формы [3], состоит из двух частей:

- 1) координатные скалярные формы $\langle z, \bar{z} \rangle_1, \dots, \langle z, \bar{z} \rangle_k$ линейно независимы;
- 2) не существует ненулевого вектора e , ортогонального всем векторам относительно всех координатных форм, т.е. из того, что $\langle e, \bar{z} \rangle = 0$ для всех z , следует, что $e = 0$.

Невырожденная касательная квадрика является столь же хорошей модельной поверхностью, как и гиперквадрика для поверхности типа $(n, 1)$, т.е. [3] выполнены условия:

- 1) любой росток порождающей поверхности эквивалентен ростку вида (1) (универсальность);
- 2) квадрика – это алгебраическая поверхность, заданная уравнениями степени $d = 2$; любая поверхность, заданная уравнениями меньшей степени, имеет бесконечномерную группу;
- 3) голоморфная эквивалентность квадрик совпадает с их линейной эквивалентностью;
- 4) размерность группы поверхности не превосходит размерности группы касательной квадрики (экстремальность);
- 5) квадрика однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно; на самом деле, однородность обеспечивается аффинными автоморфизмами (однородность);
- 6) имеется простой критерий конечномерности группы квадрики (условие невырож-

- денности эрмитовой формы – формы Леви), причем условие невырожденности является условием общего положения (конечномерность);
- 7) алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной квадрике – это некоторая алгебра полиномиальных векторных полей ограниченной степени; степени коэффициентов не превосходят 2 (полиномиальность алгебры);
  - 8) группа автоморфизмов невырожденной квадрики – это некая подгруппа группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+k}$, чьи степени (числителей и знаменателей в несократимом представлении) ограничены константой, зависящей лишь от n и k ([4], см. также замечание 2 после предложения 7) (рациональность группы).

При этом отметим, что требования универсальности и однородности, с одной стороны, и требование конечномерности являются в определенном смысле антагонистами. Первая пара требований стремится понизить степень d , тогда как требование конечномерности ведет к ее повышению. Поэтому существование объекта, для которого конечномерность уже есть, а универсальность и однородность еще не исчезли, следует рассматривать как большую удачу.

Однако при росте коразмерности возникает некоторое осложнение. Дело в том, что размерность пространства эрмитовых матриц размера n конечна и равна n^2 . Если коразмерность превзойдет этот рубеж, то первая часть условия конечномерности становится невыполнима. Это приводит к тому, что все квадрики такого типа оказываются вырожденными, а их группы бесконечномерными. Таким образом, при $k > n^2$ невозможно сформулировать критерий конечномерности группы ростка типа (n, k) в терминах 2-струи.

В работе [5] была рассмотрена самая маломерная ситуация с нарушением условия $k \leq n^2$. А именно, для поверхности типа $(1, 2)$, т.е. для поверхности коразмерности 2 в $\mathbb{C}^3$ была предложена модельная поверхность третьей степени, удовлетворяющая свойствам 1)–8). Вот эта поверхность:

$$Q = \{ \operatorname{Im} w_1 = |z|^2, \quad \operatorname{Im} w_2 = |z|^2 2 \operatorname{Re} z \}.$$

В работе [6] аналогичные построения были осуществлены для ростков типа $(1, k)$ при $k = 3, 4, 5, 6, 7$. В данной работе строится кубика для поверхности с произвольной размерностью комплексной касательной и доказывается, что при выполнении естественных ограничений на коразмерность K , а именно $n^2 < K \leq n^2(n+2)$, кубика является хорошей моделью (в смысле выполнения требований 1)–8)) ростка вещественной поверхности типа (n, k) (теорема 8).

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{n^2} \oplus \mathbb{C}^k$ с координатами $(z \in \mathbb{C}^n, w_2 \in \mathbb{C}^{n^2}, w_3 \in \mathbb{C}^k)$, $n > 0, k > 0$, росток поверхности типа $(n, K = n^2 + k)$, заданный в нуле уравнениями

$$\operatorname{Im} w_2 = F(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Re} w_3), \quad \operatorname{Im} w_3 = G(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Re} w_3), \quad (2)$$

где F и G – гладкие отображения без постоянных и линейных членов. Обозначим $\operatorname{Re} w_2$ через x и $\operatorname{Re} w_3$ через y ; введем градуировку, назначая веса следующим образом: $[z] = [\bar{z}] = 1, [w_2] = [x] = 2, [w_3] = [y] = 3$. Тогда (2) примет вид

$$\operatorname{Im} w_2 = F_2 + \dots, \quad \operatorname{Im} w_3 = G_2 + \dots. \quad (3)$$

Координаты F_2 и G_2 – это однородные многочлены второй степени, зависящие только от z и $\bar{z}$, содержащие слагаемые бистепеней $(2, 0)$, $(1, 1)$ и $(0, 2)$. Бистепени $(2, 0)$ и $(0, 2)$ уберем квадратичной заменой. Эрмитову компоненту F_2 обозначим $\langle z, \bar{z} \rangle$. Это – форма Леви нашего ростка. Будем предполагать, что она невырождена. Невырожденность эрмитовой формы со значениями в $\mathbb{R}^{n^2}$ есть не что иное, как линейная независимость координатных форм. Таким образом, координаты нашей формы – это базис пространства эрмитовых форм размерности n . Это означает, что две любые такие формы эквивалентны, а также то, что любая эрмитова форма есть их линейная комбинация. Поэтому, вычитая из второго соотношения линейную комбинацию координат первого, эрмитову часть G_2 можно сделать равной нулю. В результате (3) принимает вид

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \bar{z} \rangle + F_3 + \dots, \quad \operatorname{Im} w_3 = G_3 + \dots.$$

При этом $G_3 = 2 \operatorname{Re}(G_{2,1,0}(z, z, \bar{z}) + G_{1,0,1}(z, x))$, поэтому после замены $z \rightarrow z, w_2 \rightarrow w_2, w_3 \rightarrow w_3 + 2iG_{1,0,1}(z, \zeta)$ получаем

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \bar{z} \rangle + F_3 + \dots, \quad \operatorname{Im} w_3 = 2 \operatorname{Re} \Phi(z, z, \bar{z}) + G_4 + \dots, \quad (4)$$

где кубическая форма с векторными значениями Φ линейна по всем трем переменным, а по первым двум симметрична.

Пусть поверхность Q задана уравнениями

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \bar{z} \rangle, \quad \operatorname{Im} w_3 = 2 \operatorname{Re} \Phi(z, z, \bar{z}). \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вещественно алгебраическую поверхность Q вида (5) будем называть *касательной кубикой* ростка M_0 вида (4). Поверхность и росток будем называть *невыврожденными*, если форма $\langle z, \bar{z} \rangle$ невырождена и координатные кубические формы $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ линейно независимы.

Условие невырожденности включает в себе естественное ограничение на значения параметра k . Вещественная размерность пространства многочленов бистепени $(2, 1)$ от n -мерного комплексного переменного равна $n^2(n+1)$. Это означает, что невырожденные кубики возможны лишь при выполнении условия $n^2 < K \leq n^2(n+2)$.

Эрмитова форма $\langle z, \bar{z} \rangle$ связана с коммутаторами векторных полей на поверхности [7]. Для кубической формы $\Phi(z, z, \bar{z})$ также можно указать эту связь.

Уравнения касательной к кубике имеют вид

$$\operatorname{Im} dw_2 = 2 \operatorname{Re} \langle dz, \bar{z} \rangle, \quad \operatorname{Im} dw_3 = 2 \operatorname{Re} (2\Phi(dz, z, \bar{z}) + \bar{\Phi}(\bar{z}, \bar{z}, dz)).$$

Поэтому уравнения комплексной касательной имеют вид

$$dw_2 = 2i \langle dz, \bar{z} \rangle, \quad dw_3 = 4i \Phi(dz, z, \bar{z}) + 2i \bar{\Phi}(\bar{z}, \bar{z}, dz).$$

Каждому вектору $\alpha \in \mathbb{C}^n$ поставим в соответствие векторные поля $\mathcal{X}_\alpha \in T^{(1,0)}(Q)$, заданные в виде

$$\mathcal{X}_\alpha = \alpha \frac{\partial}{\partial z} + 2i \langle \alpha, \bar{z} \rangle \frac{\partial}{\partial \zeta} + 2i (2\Phi(\alpha, z, \bar{z}) + \bar{\Phi}(\bar{z}, \bar{z}, \alpha)) \frac{\partial}{\partial w},$$

и $\Theta_\alpha = \mathcal{X}_\alpha + \overline{Z}_\alpha \in T(Q)$. Вычисляя коммутаторы, получаем

$$\begin{aligned} [\mathcal{X}_\alpha, \overline{\mathcal{F}}_\beta] &= -2i\langle \alpha, \bar{\beta} \rangle \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) - 4i(\Phi(\alpha, z, \bar{\beta}) + \overline{\Phi}(\bar{\beta}, \bar{z}, \alpha)) \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right), \\ [\mathcal{X}_\alpha, [\mathcal{X}_\beta, \overline{\mathcal{F}}_\gamma]] &= -4i \Phi(\alpha, \beta, \bar{\gamma}) \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right), \\ [\overline{\mathcal{F}}_\alpha, [\mathcal{X}_\beta, \overline{\mathcal{F}}_\gamma]] &= -4i \overline{\Phi}(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \beta) \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right), \\ [[\mathcal{X}_\alpha, \overline{\mathcal{F}}_\beta], \mathcal{X}_\gamma] &= 4i \Phi(\alpha, \gamma, \bar{\beta}) \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right), \\ [[\mathcal{X}_\alpha, \overline{\mathcal{F}}_\beta], \overline{\mathcal{F}}_\gamma] &= 4i \overline{\Phi}(\bar{\gamma}, \bar{\beta}, \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right), \\ [\Theta_\alpha, \Theta_\beta] &= 2 \operatorname{Re}[\mathcal{X}_\alpha, \overline{\mathcal{F}}_\beta], \\ [[\Theta_\alpha, \Theta_\beta], \Theta_\gamma] &= 2 \operatorname{Re}[[\mathcal{X}_\alpha, \overline{\mathcal{F}}_\beta], \mathcal{X}_\gamma] = -16 \operatorname{Im}(\Phi(\alpha, \gamma, \bar{\beta}) + \overline{\Phi}(\bar{\gamma}, \bar{\beta}, \alpha)) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Ясно, что коммутаторы более высоких порядков равны нулю.

Градуированная алгебра Леви–Танаки индуктивно определяется соотношениями

$$D^1 = T^c(Q), \quad D^{j+1} = [D^j, D^1] + D^j.$$

Из наших вычислений следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Градуированная алгебра Леви–Танаки кубики имеет вид $D^1 \subset D^2 \subset D^3$.*

Отметим, что для кубики ее длина равна двум, так как линейные комбинации первых скобок дают все касательное пространство. Если вычисления коммутаторов проводить не для кубики, а для произвольного ростка вида (4), то формулы для двойных скобок остаются в силе, однако их следует понимать как равенство значений полей в центре ростка.

В терминологии [7] речь идет о формах Леви высших порядков; при этом невырожденная кубика, как и невырожденный росток вида (4), характеризуются как поверхности, имеющие тип 3 в каждой своей точке. Пользуясь терминологией, предложенной в [8], можно сказать, что эти поверхности являются 2-невырожденными, тогда как невырожденность формы Леви – это тип 2 или 1-невырожденность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любой точки кубики*

$$\xi = (p, q + i\langle p, \bar{p} \rangle, r + 2i \operatorname{Re} \Phi(p, p, \bar{p}))$$

существует треугольный квадратично-полиномиальный автоморфизм, переводящий начало координат в эту точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Автоморфизм можно вычислить следующим образом. Подвергнем переменную z сдвигу $z \rightarrow z + p$ и подставим ее в уравнение кубики. Приведем простыми квадратичными преобразованиями полученное уравнение к исходному виду. При этом воспользуемся тем, что любую эрмитову форму, в том числе и $\operatorname{Re} \Phi(z, p, \bar{z})$, можно записать в виде $s\langle z, \bar{z} \rangle$, где s – некоторая вещественная матрица. В результате получаем следующий явный вид искомого преобразования:

$$\begin{aligned} z &\rightarrow p + z, & w_2 &\rightarrow (q + i\langle p, \bar{p} \rangle) + 2i\langle z, \bar{p} \rangle + w_2, \\ w_3 &\rightarrow (r + 2i \operatorname{Re} \Phi(p, p, \bar{p})) + 4i\Phi(z, p, \bar{p}) + 2i\Phi(z, z, \bar{p}) + 2i\bar{\Phi}(\bar{p}, \bar{p}, z) + sw_2 + w_3. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Рассмотрим вопрос о действии голоморфных отображений на касательную кубику. Пусть имеется два ростка: M_0 , заданный уравнениями (4), и росток того же вида $\widetilde{M}_0$ с уравнениями

$$\operatorname{Im} w_2 = \langle z, \bar{z} \rangle + \widetilde{F}_3 + \dots, \quad \operatorname{Im} w_3 = 2 \operatorname{Re} \tilde{\Phi}(z, z, \bar{z}) + \widetilde{G}_4 + \dots; \quad (6)$$

пусть отображение

$$(z \rightarrow f(z, w_2, w_3), \quad w_2 \rightarrow g(z, w_2, w_3), \quad w_3 \rightarrow h(z, w_2, w_3))$$

переводит первый росток во второй, т.е. при $w_2 = x + i\langle z, \bar{z} \rangle + \dots$ и $w_3 = y + 2i \operatorname{Re} \Phi(z, z, \bar{z}) + \dots$ имеют место соотношения

$$\operatorname{Im} g = \langle f, \bar{f} \rangle + \widetilde{F}_3 + \dots, \quad \operatorname{Im} h = 2 \operatorname{Re} \tilde{\Phi}(f, f, \bar{f}) + \widetilde{G}_4 + \dots.$$

Используя весовые разложения компонент отображения, будем выделять в этих соотношениях компоненты одинаковых весов. При этом считаем, что отображение оставляет нуль на месте, т.е. $f_0 = 0$, $g_0 = 0$, $h_0 = 0$. Получаем

- 1) $\operatorname{Im} g_1 = 0$, т.е. $g_1 = 0$;
- 2) $\operatorname{Im} h_1 = 0$, откуда следует, что $h_1 = 0$;
- 3) пусть $f_1 = \Lambda z$, $g_2 = g_{2,0} + \rho w_2$, тогда из $\operatorname{Im} g_2 = \langle f_1, \bar{f}_1 \rangle$ получаем $g_{2,0} = 0$, $\operatorname{Im} \rho = 0$, $\langle \Lambda z, \bar{\Lambda} z \rangle = \rho \langle z, \bar{z} \rangle$;
- 4) $\operatorname{Im} h_2 = 0$, откуда $h_2 = 0$;
- 5) пусть $h_3 = A(z, z, z) + B(z, \zeta) + \nu w$, тогда из $\operatorname{Im} h_3 = 2 \operatorname{Re} \tilde{\Phi}(f_1, f_1, \bar{f}_1)$ следует, что $A = 0$, $B = 0$, $\tilde{\Phi}(\Lambda z, \Lambda z, \bar{\Lambda} z) = \nu \tilde{\Phi}(z, z, \bar{z})$.

Многочисленные следствия из этого простого вычисления сформулируем в виде следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеют место следующие утверждения:*

- (а) если (f, g, h) – отображение ростка (4) в росток (6), то $f = \Lambda z + f_2 + \dots$, $g = \rho w_2 + g_3 + \dots$, $h = \nu w_3 + h_4 + \dots$, причем $\langle \Lambda z, \bar{\Lambda} z \rangle = \rho \langle z, \bar{z} \rangle$ и $\tilde{\Phi}(z, \Lambda z, \bar{\Lambda} z) = \nu \tilde{\Phi}(z, z, \bar{z})$;

(b) линейная часть отображения имеет следующий блочный вид:

$$\begin{pmatrix} \Lambda & * & * \\ 0 & \rho & * \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix};$$

(c) линейное отображение

$$z \rightarrow \Lambda z, \quad w_2 \rightarrow \rho w_2, \quad w_3 \rightarrow \nu w_3$$

является отображением между касательными кубиками;

(d) если две кубики голоморфно эквивалентны, то они эквивалентны линейно;

(e) действие голоморфного отображения на росток поверхности порождает следующее действие группы $GL(n, \mathbb{C}) \oplus GL(k, \mathbb{R})$

$$\Phi(z, z, \bar{z}) \rightarrow \nu \Phi(\Lambda^{-1}z, \Lambda^{-1}z, \overline{\Lambda^{-1}z});$$

(f) линейная подгруппа группы голоморфных автоморфизмов кубики – это группа вида $z \rightarrow \Lambda z, w_2 \rightarrow \rho w_2, w_3 \rightarrow \nu w_3$, где $\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z} \rangle = \rho \langle z, \bar{z} \rangle$ и $\Phi(\Lambda z, \Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \nu \Phi(z, z, \bar{z})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Имеют место следующие утверждения:

- (a) линейная независимость координат формы $\Phi(z, z, \bar{z})$ является необходимым и достаточным условием конечномерности группы автоморфизмов кубики;
- (b) если линейная независимость имеется, то алгебра инфинитезимальных автоморфизмов кубики состоит из векторных полей, чьи коэффициенты являются полиномами степени не выше, чем 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наличие линейной зависимости позволяет линейной заменой по w сделать одну из координат Φ равной нулю. Тогда при сохранении остальных координат к этой координате можно применять любое локально обратимое преобразование, задающееся степенным рядом с вещественными коэффициентами. Это доказывает необходимость в п. (a).

Для того чтобы доказать достаточность, будем доказывать конечномерность алгебры голоморфных векторных полей на кубике, т.е. полей, порождающих локальные однопараметрические группы голоморфных автоморфизмов Q . Это вещественные поля вида

$$X = 2 \operatorname{Re} \left(f \frac{\partial}{\partial z} + g \frac{\partial}{\partial w_2} + h \frac{\partial}{\partial w_3} \right),$$

где коэффициенты голоморфны в окрестности нуля, а на Q они удовлетворяют условию касания

$$\operatorname{Im} g = 2 \operatorname{Re} \langle f, \bar{z} \rangle, \quad \operatorname{Im} h = 2 \operatorname{Re} (2\Phi(f, z, \bar{z}) + \Phi(z, z, \bar{f})). \quad (7)$$

В этих соотношениях будем отделять компоненты фиксированных бистепеней. При этом будем использовать разложения вида $f(z, w_2, w_3) = \sum f_m(z, w_2, w_3)$, где m – это степень по z , и обозначения $\Delta f = \partial_x f(\langle z, \bar{z} \rangle)$ и $\square f = \partial_y f(\Phi(z, z, \bar{z}))$. Для различных весов получаем следующие результаты.

Вес $(0, 0)$:

$$\operatorname{Im} g_0(x, y) = 0; \text{ обозначим } g_0 \text{ через } a;$$

$$\operatorname{Im} h_0(x, y) = 0; \text{ обозначим } h_0 \text{ через } b.$$

Вес $(1, 0)$:

$$ig_1 + 2\langle z, \bar{f}_0 \rangle = 0 \text{ и если } f_0 = A, \text{ то } g_1 = 2i\langle z, \bar{A} \rangle;$$

$$ih_1 = 0.$$

Вес $(2, 0)$:

$$ig_2 = 0;$$

$$ih_2 + 2\Phi(z, z, \bar{A}) = 0, \text{ т.е. } h_2 = 2i\Phi(z, z, \bar{A}).$$

Вес $(m, 0)$ при $m \geq 3$:

$$ig_m = 0;$$

$$ih_m = 0.$$

Вес $(1, 1)$:

$$\operatorname{Re}(i^2 \Delta g_0 + 2\langle f_1, \bar{z} \rangle) = 0;$$

$$\operatorname{Re}(i^2 \Delta h_0 + 4\Phi(f_0, z, \bar{z})) = 0,$$

или если обозначить f_1 через Bz , то

$$\Delta a = 2 \operatorname{Re} \langle Bz, \bar{z} \rangle, \quad \Delta b = 4 \operatorname{Re} \Phi(A, z, \bar{z}).$$

Вес $(2, 1)$:

$$i^2 \Delta g_1 + 2i^2 \square g_0 + 2\langle f_2, \bar{z} \rangle + 2\langle z, \overline{i \Delta f_0} \rangle = 0;$$

$$i^2 \Delta h_1 + 2i^2 \square h_0 + 4\Phi(f_1, z, \bar{z}) + 2\Phi(z, z, \bar{f}_1) = 0,$$

или если обозначить f_2 через $C(z, z)$, то

$$\square a = \langle C(z, z), \bar{z} \rangle - 2i \langle z, \Delta \bar{A} \rangle, \quad \square b = 4\Phi(Bz, z, \bar{z}) + 2\Phi(z, z, \overline{Bz}).$$

Вес $(3, 1)$:

$$i^2 \Delta g_2 + i^2 \square g_1 + 2\langle f_3, \bar{z} \rangle + 2\langle z, \overline{i \square f_0} \rangle = 0,$$

или если обозначить f_3 через $D(z, z, z)$, то

$$\langle D(z, z, z), \bar{z} \rangle = 2i \langle z, \square \bar{A} \rangle.$$

Вес $(4, 1)$:

$$2\langle f_4, \bar{z} \rangle = 0, \quad \text{т.е. } f_4 = 0.$$

Вес $(m, 1)$ при $m \geq 5$:

$$2\langle f_m, \bar{z} \rangle = 0, \quad \text{т.е. } f_m = 0.$$

Еще нам понадобятся некоторые соотношения для веса $(m, 2)$.

Вес $(2, 2)$:

$$\text{Im}\langle \Delta Bz, \bar{z} \rangle = 2 \text{Im}\langle z, \square \bar{A} \rangle.$$

Вес $(3, 2)$:

$$4\square \text{Im}\langle Bz, \bar{z} \rangle + 2i\langle \Delta C(z, z), \bar{z} \rangle = 0.$$

Вес $(4, 2)$:

$$\langle \Delta D(z, z, z), \bar{z} \rangle + \langle \square C(z, z), \bar{z} \rangle = 0.$$

Вес $(5, 2)$:

$$\langle \square D(z, z, z), \bar{z} \rangle = 0.$$

Таким образом, получаем, что поле X зависит от следующего набора величин:

$$\mathcal{A}(x, y) = (a(x, y), b(x, y), A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y)).$$

Эти величины связаны следующими соотношениями:

$$\Delta a = 2 \text{Re}\langle Bz, \bar{z} \rangle; \quad (8)$$

$$\Delta b = 4 \text{Re} \Phi(A, z, \bar{z}); \quad (9)$$

$$\square a = \langle C(z, z), \bar{z} \rangle - 2i\langle z, \Delta \bar{A} \rangle; \quad (10)$$

$$\square b = 4\Phi(Bz, z, \bar{z}) + 2\Phi(z, z, \overline{Bz}); \quad (11)$$

$$\langle D(z, z, z), \bar{z} \rangle = 2i\langle z, \square \bar{A} \rangle; \quad (12)$$

$$\text{Im}\langle \Delta Bz, \bar{z} \rangle = 2 \text{Im}\langle z, \square \bar{A} \rangle; \quad (13)$$

$$4\square \text{Im}\langle Bz, \bar{z} \rangle + 2i\langle \Delta C(z, z), \bar{z} \rangle = 0; \quad (14)$$

$$\langle \Delta D(z, z, z), \bar{z} \rangle + \langle \square C(z, z), \bar{z} \rangle = 0; \quad (15)$$

$$\langle \square D(z, z, z), \bar{z} \rangle = 0. \quad (16)$$

Эти равенства суть соотношения на полиномы от z и $\bar{z}$. Если записать их как коэффициенные равенства, то мы получим линейную с постоянными коэффициентами систему дифференциальных уравнений с частными производными на коэффициенты искоемых величин, которые являются функциями x и y . К этой системе применима теорема Эренпрайса–Паламодова об экспоненциальном представлении [9]. С помощью этой теоремы критерий конечномерности пространства решений удобно формулировать в терминах характеристического множества системы. Для конечномерности необходимо и достаточно, чтобы характеристическое множество представляло собой конечный набор

точек. Характеристическое множество – это совокупность показателей $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^K$, являющихся показателями решений системы вида

$$\mathcal{A}(x, y) = \tilde{\mathcal{A}} \exp(\lambda x + \mu y), \quad (17)$$

где $\tilde{\mathcal{A}}$ – постоянный ненулевой вектор. Покажем, что из условия линейной независимости координат кубической формы Φ следует, что характеристическое множество нашей системы состоит из единственной точки – начала координат $(\lambda = 0, \mu = 0)$. Отметим, что

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{\mathcal{A}} \exp(\lambda x + \mu y)) &= (\lambda \langle z, \bar{z} \rangle) \tilde{\mathcal{A}} \exp(\lambda x + \mu y), \\ \square(\tilde{\mathcal{A}} \exp(\lambda x + \mu y)) &= (\mu \Phi(z, z, \bar{z})) \tilde{\mathcal{A}} \exp(\lambda x + \mu y). \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (17) в (8)–(16) и учитывая (18), получаем

$$(\lambda \langle z, \bar{z} \rangle) a = 2 \operatorname{Re} \langle \tilde{B} z, \bar{z} \rangle; \quad (19)$$

$$(\lambda \langle z, \bar{z} \rangle) b = 4 \operatorname{Re} \Phi(\tilde{A}, z, \bar{z}); \quad (20)$$

$$(\mu \Phi(z, z, \bar{z})) a = \langle \tilde{C}(z, z), \bar{z} \rangle - 2i(\lambda \langle z, \bar{z} \rangle) \langle z, \bar{\tilde{A}} \rangle; \quad (21)$$

$$(\mu \Phi(z, z, \bar{z})) b = 4\Phi(\tilde{B} z, z, \bar{z}) + 2\Phi(z, z, \bar{\tilde{B} z}); \quad (22)$$

$$\langle \tilde{D}(z, z, z), \bar{z} \rangle = 2i(\lambda \langle z, \bar{z} \rangle) \langle z, \bar{\tilde{A}} \rangle; \quad (23)$$

$$(\lambda \langle z, \bar{z} \rangle) \operatorname{Im} \langle \tilde{B} z, \bar{z} \rangle = 2 \operatorname{Im}((\mu \Phi(z, z, \bar{z})) \langle \tilde{A}, \bar{z} \rangle); \quad (24)$$

$$4(\mu \Phi(z, z, \bar{z})) \operatorname{Im} \langle \tilde{B} z, \bar{z} \rangle + 2i(\lambda \langle z, \bar{z} \rangle) \langle \tilde{C}(z, z), \bar{z} \rangle = 0; \quad (25)$$

$$(\lambda \langle z, \bar{z} \rangle) \langle \tilde{D}(z, z, z), \bar{z} \rangle + (\mu \Phi(z, z, \bar{z})) \langle \tilde{C}(z, z), \bar{z} \rangle = 0; \quad (26)$$

$$(\mu \Phi(z, z, \bar{z})) \langle \tilde{D}(z, z, z), \bar{z} \rangle = 0. \quad (27)$$

Пусть сначала $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$. Из (27) получаем, что $\tilde{D} = 0$; тогда из (25) следует, что $\tilde{C} = 0$.

Из (25) следует, что $\tilde{B}$ – скалярная матрица. Покажем это. Действительно, (25) принимает вид $\operatorname{Im} \langle \tilde{B} z, \bar{z} \rangle = 0$. То, что любая эрмитова форма может быть записана как линейная комбинация координат формы $\langle z, \bar{z} \rangle$, означает, что для любой эрмитовой матрицы H имеет место соотношение $H\tilde{B} = \tilde{B}^* H$. Подставляя вместо H единичную матрицу E , получаем, что B эрмитова и равенство превращается в условие коммутирования $HB = BH$. Но так как любая матрица может быть записана в виде $M = H_1 + iH_2$, где H_1 и H_2 эрмитовы, то B коммутирует с любой матрицей: $MB = BM$, т.е. B – вещественная скалярная матрица.

Далее из (23) получаем, что $\tilde{A} = 0$; из (21) получаем, что $\tilde{a} = 0$; из (20) получаем, что $\tilde{b} = 0$; из (22) получаем, что $\tilde{B} = 0$; т.е. $\tilde{\mathcal{A}} = 0$. Противоречие.

Пусть теперь $\lambda = 0$, а $\mu \neq 0$. Из (27) опять получаем, что $\tilde{D} = 0$; тогда из (26) следует, что $\tilde{C} = 0$; из (25) и (19) следует $\tilde{B} = 0$; из (23) получаем, что $\tilde{A} = 0$; из (21) получаем, что $\tilde{a} = 0$; из (20) получаем, что $\tilde{b} = 0$; из (22) получаем, что $\tilde{B} = 0$; т.е. $\tilde{\mathcal{A}} = 0$.

Противоречие. Таким образом, при выполнении условия невырожденности единственным характеристическим значением системы является начало координат ($\lambda = 0, \mu = 0$).

Мы применяем теорему об экспоненциальном представлении в ситуации, когда характеристическое множество нульмерно. К такой же ситуации приводит рассмотрение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Как известно, общее решение однородного уравнения есть сумма экспонент с полиномиальными множителями. Каждое слагаемое – это подпространство пространства решений, состоящее из решений, относящихся к одному характеристическому значению. У каждого из этих подпространств можно определить размерность и степень (как высшую степень полиномиального множителя), причем для обыкновенных уравнений степень $+1$ = размерности = кратности данного характеристического значения. Те же характеристики можно рассмотреть и для каждого изолированного характеристического значения произвольной линейной системы с постоянными коэффициентами. И если правильно понимаемая кратность (коразмерность идеала) остается равной размерности подпространства пространства решений, соответствующего данному значению, вопрос о степени является менее ясным. Однако для нашей системы можно получить неплохую оценку степени непосредственно.

Рассмотрим соотношение (16) как систему уравнений на $D(y)$. Покажем, что однородность (в смысле однородности дифференциального полинома) уравнений приводит к тому, что либо старшие (в данном случае первые) производные решения равны нулю, либо пространство решений бесконечномерно, что по теореме об экспоненциальном представлении невозможно. Действительно, пусть $D = \sum D_m$ – разложение на компоненты одинаковой степени. Оператор D является решением в том и только том случае, когда решением является каждая однородная компонента. Условие на $D_m = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} D_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} y_{\alpha_1} \cdots y_{\alpha_m}$ принимает вид

$$m \sum_{\alpha_2, \dots, \alpha_m} \left\langle \sum_{\alpha_1} D_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(z, z, z) \Phi_{\alpha_1}(z, z, \bar{z}), \bar{z} \right\rangle y_{\alpha_2} \cdots y_{\alpha_m} = 0.$$

И если $m \neq 0$, то это означает, что для любого набора $(\alpha_2, \dots, \alpha_m)$

$$\left\langle \sum_{\alpha_1} D_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(z, z, z) \Phi_{\alpha_1}(z, z, \bar{z}), \bar{z} \right\rangle = 0.$$

Но если это уравнение имеет ненулевое решение при $m_0 > 0$, то это позволяет строить ненулевые решения для любых $m > m_0$. Итак, $D_y = 0$.

Применяя оператор $\square$ к (15) и пользуясь коммутативностью Δ и $\square$, получаем

$$\langle \square^2 C(z, z), \bar{z} \rangle = 0,$$

откуда таким же образом получаем, что $C_{yy} = 0$. Аналогично из (12) получаем $A_{yy} = 0$. Применяя $\square$ к (13) и используя то, что $A_{yy} = 0$, получаем $\square \Delta \operatorname{Im} \langle Bz, \bar{z} \rangle = 0$. Пользуясь теоремой об экспоненциальном представлении и доказанным выше утверждением о том,

что решения уравнения $\text{Im}\langle Bz, \bar{z} \rangle = 0$ – скалярные матрицы $B = kE$, получаем, что общее решение $\square \text{Im}\langle B\bar{z}, \bar{z} \rangle = 0$ имеет вид $B = k(x, y)E + B_1(x) + B_2(y) + B_3(x, y)$, где B_3 – полином. Пользуясь однородностью уравнения, получаем, что $(B_3)_{xy} = 0$. Применяя Δ к (14), имеем $C_{xx} = 0$. Применяя Δ^2 к (15), получаем $D_{xxx} = 0$. Исключая a из (8) и (10), имеем

$$\langle \square Bz, \bar{z} \rangle + \langle z, \square \bar{B}z \rangle = \langle \Delta C(z, z), \bar{z} \rangle - 2i\langle z, \Delta^2 \bar{A} \rangle, \quad (28)$$

и применяя Δ , получаем $A_{xxx} = 0$. Исключая b из (9) и (11), получаем

$$2\Phi(\square A, z, \bar{z}) + 2\bar{\Phi}(\square \bar{A}, \bar{z}, z) = 2\Phi(\Delta Bz, z, \bar{z}) + \Phi(z, z, \Delta \bar{B}z), \quad (29)$$

применяя к этому соотношению $\square$, получаем

$$2\Phi(\square \Delta Bz, z, \bar{z}) + \Phi(z, z, \square \Delta \bar{B}z) = 0 \quad \text{или} \quad 3(\square \Delta k)\Phi(z, z, \bar{z}) = 0,$$

откуда $k_{xy} = 0$ и, тем самым, $B_{xy} = 0$. Применяя $\square^2$ к (28), получаем $\square^3 2 \text{Re}\langle Bz, \bar{z} \rangle = 0$; применяя $\square^2$ к (13), получаем $\square^3 2 \text{Im}\langle Bz, \bar{z} \rangle = 0$, откуда $B_{yyy} = 0$. Применяя Δ^3 к (13), имеем $\Delta^4 2 \text{Im}\langle Bz, \bar{z} \rangle = 0$. Откуда, используя уже имеющееся представление B , получаем, что $B = B_1(x) + B_2(y) + k(x)E$, где степень B_1 не превосходит 3, степень B_2 не превосходит 2. Подставляя это выражение в (29) и применяя Δ^3 , получаем $\Delta^4 k = 0$, т.е. степень k не превосходит 3 и, тем самым, $B_{xxx} = 0$. Теперь из (8), (9), (10), (11) получаем оценки степеней a и b . Итак, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A_{xxx} &= 0, & A_{yy} &= 0; \\ B_{xxxx} &= 0, & B_{yyy} &= 0, & B_{xy} &= 0; \\ C_{xx} &= 0, & C_{yy} &= 0; \\ D_{xxx} &= 0, & D_y &= 0; \\ a_{xxxxx} &= 0, & a_{yyy} &= 0; \\ b_{xxxx} &= 0, & b_{yyyy} &= 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание зависимость от z , получаем, что степени коэффициентов векторных полей не превосходят 5. Это завершает доказательство предложения 4.

Теперь доказано, что все наши неизвестные (A, B, C, D, a, b) полиномиально зависят от x и y . Будем изображать компоненту однородной степени d_x по x и d_y по y точкой с координатами (d_x, d_y) на плоскости. Для каждой неизвестной отметим множество потенциально ненулевых компонент (носитель). Тогда информацию о носителях можно изобразить на следующих диаграммах:

Этим 38 точкам соответствует 38 полилинейных векторнозначных форм от x и y , через которые выражается любое голоморфное векторное поле на кубике. Коэффициенты этих форм связаны системой однородных линейных алгебраических уравнений. Чтобы получить эти соотношения, нужно выражения для (f, g, h) через упомянутые 38 форм подставить в основное соотношение (7). Это дает описание алгебры кубики, вполне аналогичное описанию алгебры квадрики, данному в [5]. Итак, вопрос о вычислении алгебры кубики сводится к решению алгебраической системы линейных уравнений. В частности, от ранга этой системы непосредственно зависит размерность алгебры.

Распространим градуировку, введенную выше для пространства рядов от (z, w_2, w_3) , на пространство векторных полей, полагая

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \right] = -1, \quad \left[\frac{\partial}{\partial w_2} \right] = -2, \quad \left[\frac{\partial}{\partial w_3} \right] = -3.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Алгебра $\text{aut } Q$ инфинитезимальных автоморфизмов кубики является градуированной алгеброй Ли вида

$$g = g_{-3} + g_{-2} + g_{-1} + g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6.$$

Подалгебра $g_- = g_{-3} + g_{-2} + g_{-1}$ — нильпотентная алгебра Ли, $(g_-)^4 = 0$. Это алгебра Ли группы из предложения 2, которую мы обозначим $\text{Aut}_- Q$:

$$\begin{aligned} z &\rightarrow p + z, & \zeta &\rightarrow (q + i\langle p, \bar{p} \rangle) + 2i\langle z, \bar{p} \rangle + \zeta, \\ w &\rightarrow (r + 2i \operatorname{Re} \Phi(p, p, \bar{p})) + 4i\Phi(z, p, \bar{p}) + 2i\Phi(z, z, \bar{p}) + 2i\overline{\Phi}(\bar{p}, \bar{p}, z) + s\zeta + w. \end{aligned}$$

Размерность $\text{Aut}_- Q$ равна размерности кубики, т.е. $\dim \text{Aut}_- Q = \dim g_- = n + K$.

Подалгебра g_0 соответствует линейным автоморфизмам кубики

$$z \rightarrow \Lambda z, \quad \zeta \rightarrow \rho \zeta, \quad w \rightarrow \nu w,$$

где $\langle \Lambda z, \overline{\Lambda z} \rangle = \rho \langle z, \bar{z} \rangle$, $\Phi(\Lambda z, \Lambda z, \overline{\Lambda z}) = \nu \Phi(z, z, \bar{z})$. Размерность этой группы может меняться в зависимости от кубической формы Φ . Но, как видно из определяющих соотношений, если фиксировать значение невырожденной матрицы Λ , то значения ρ и ν

определяются однозначно. Поэтому справедлива оценка $\dim \operatorname{Aut}_0 Q \leq 2n^2$, где через $\operatorname{Aut}_0 Q$ обозначена подгруппа линейных автоморфизмов кубики.

Подалгебра $g_+ = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6$ — это нильпотентная алгебра Ли $(g_+)^7 = 0$. Ей соответствует подгруппа нелинейных автоморфизмов кубики, сохраняющих начало координат и имеющих вид

$$z \rightarrow z + f_2 + \dots, \quad \zeta \rightarrow \zeta + g_3 + \dots, \quad w \rightarrow w + h_4 + \dots.$$

Эту группу мы обозначим через $\operatorname{Aut}_+ Q$. Как показывают примеры кубик типа (1, 2) и (1, 3), разобранные в [5] и [6], эта подгруппа может быть тривиальной, что, по-видимому, соответствует ситуации общего положения. Аналогичное явление для квадратик (“жесткость”) хорошо известно [3], [10].

Развивая нашу аналогию с квадратикой, покажем что касательная кубика обладает следующим экстремальным свойством: размерность группы голоморфных автоморфизмов ростка не превосходит размерности группы ее касательной кубики.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть M_0 — росток типа (n, K) , Q — его касательная кубика, тогда $\dim \operatorname{Aut} M_0 \leq \dim \operatorname{Aut} Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если росток вырожден, то неравенство становится верным и бессодержательным: $\dim \operatorname{Aut} Q = \infty$. Поэтому будем предполагать невырожденность. В силу однородности кубики и предложения 2 достаточно доказать, что автоморфизм ростка (4) в росток (6) вида

$$f = z + f_2 + \dots, \quad g = w_2 + g_3 + \dots, \quad h = w_3 + h_4 + \dots \quad (30)$$

определяется числом параметров не большим, чем автоморфизм кубики такого же вида. Доказательство — это некая версия теоремы о неявной функции для формальных рядов с оценкой числа параметров. Записывая в виде соотношения в формальных рядах то, что (30) переводит (4) в (6), и отделяя в этом соотношении компоненту веса $(m+1)$ в первом соотношении и $(m+2)$ во втором, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(ig_{m+1} + 2\langle f_m, \bar{z} \rangle) &= F_{m+1} - \tilde{F}_{m+1} + \dots, \\ \operatorname{Re}(ih_{m+2} + 4\Phi(f_m, z, \bar{z}) + 2\Phi(z, z, \bar{f}_m)) &= G_{m+2} - \tilde{G}_{m+2} + \dots, \end{aligned}$$

где в левых частях $w_2 = x + i\langle z, \bar{z} \rangle$, $w_3 = y + 2i \operatorname{Re} \Phi(z, z, \bar{z})$, а многоточие в правых частях — это члены, зависящие от $f_j, g_{j+1}, h_{j+2}, F_{j+1}, \tilde{F}_{j+1}, G_{j+2}, \tilde{G}_{j+2}$ при $j < m$. Эти соотношения позволяют последовательно вычислять компоненты отображения (f_m, g_{m+1}, h_{m+2}) , решая алгебраическую систему линейных уравнений, правая часть которой зависит от компонент, вычисленных ранее. Размерность множества решений неоднородной системы не превышает размерности пространства решений однородной. Но однородные уравнения — это уравнения (7), определяющие алгебру кубики. Поэтому число свободных параметров, задающих отображение в классе формальных степенных рядов указанного вида, не превосходит размерности подалгебры $\operatorname{aut}_+ Q$ и соответствующей ей группы. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Группа голоморфных преобразований кубики $\text{Aut } Q$ – это подгруппа группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+K}$, чьи степени не превосходят $15(n+K)$.*

Доказательство представляет собой модификацию доказательства Туманова [4] бирациональности автоморфизмов квадратичной модели.

Рассмотрим произвольный автоморфизм кубики

$$\varphi(z, w_2, w_3) = (Z(z, w_2, w_3), W_2(z, w_2, w_3), W_3(z, w_2, w_3)),$$

сохраняющий на месте начало координат. Пусть $X = (A, B, C)$ – инфинитезимальный автоморфизм. Рассмотрим присоединенное действие группы на алгебре $X(p) \rightarrow Y(p) = \varphi_*^{-1} X(\varphi(p)) = (a, b, c)$ или

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial w_2} & \frac{\partial Z}{\partial w_3} \\ \frac{\partial W_2}{\partial z} & \frac{\partial W_2}{\partial w_2} & \frac{\partial W_2}{\partial w_3} \\ \frac{\partial W_3}{\partial z} & \frac{\partial W_3}{\partial w_2} & \frac{\partial W_3}{\partial w_3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A(Z, W_2, W_3) \\ B(Z, W_2, W_3) \\ C(Z, W_2, W_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(z, w_2, w_3) \\ b(z, w_2, w_3) \\ c(z, w_2, w_3) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где a, b и c – полиномы степени не выше 4. Подставляя в полученные соотношения вместо $X = (A, B, C)$ векторные поля из $\text{aut}_- Q$, соответствующие векторам стандартного базиса $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n^2} \oplus \mathbb{C}^n$, получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial w_2} & \frac{\partial Z}{\partial w_3} \\ \frac{\partial W_2}{\partial z} & \frac{\partial W_2}{\partial w_2} & \frac{\partial W_2}{\partial w_3} \\ \frac{\partial W_3}{\partial z} & \frac{\partial W_3}{\partial w_2} & \frac{\partial W_3}{\partial w_3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 2i\langle Z, E_n \rangle & E_{n^2} & 0 \\ L(E_n)W_2 + 2i\Phi(Z^2, E_n) & 0 & E_k \end{pmatrix} = (P),$$

где P представляет собой матрицу, чьи элементы – это полиномы степени не выше 4. Выражая якобиеву матрицу, получаем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial w_2} & \frac{\partial Z}{\partial w_3} \\ \frac{\partial W_2}{\partial z} & \frac{\partial W_2}{\partial w_2} & \frac{\partial W_2}{\partial w_3} \\ \frac{\partial W_3}{\partial z} & \frac{\partial W_3}{\partial w_2} & \frac{\partial W_3}{\partial w_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 2i\langle Z, E_n \rangle & E_{n^2} & 0 \\ L(E_n)W_2 + 2i\Phi(Z^2, E_n) & 0 & E_k \end{pmatrix} P^{-1}. \quad (32)$$

Матрицу P^{-1} , как и остальные матрицы, будем представлять в блочном виде, и пусть R_{ij} – e_i, e_j -й блок. Отметим, что элементы R_{ij} являются рациональными функциями. Первая блок-координата (32), т.е.

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = R_{11}, \quad \frac{\partial Z}{\partial w_2} = R_{12}, \quad \frac{\partial Z}{\partial w_3} = R_{13},$$

означает, что производные Z рациональны. Группа $\text{Aut } Q$ содержит однопараметрическую подгруппу

$$\{z \rightarrow tz, \quad w_2 \rightarrow t^2 w_2, \quad w_3 \rightarrow t^3 w_3\},$$

которой соответствует поле $(A = z, B = 2w_2, C = 3w_3)$. Подставляя его в (31), получаем

$$\begin{pmatrix} Z \\ 2W_2 \\ 3W_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial w_2} & \frac{\partial Z}{\partial w_3} \\ \frac{\partial z}{\partial W_2} & \frac{\partial w_2}{\partial W_2} & \frac{\partial w_3}{\partial W_2} \\ \frac{\partial z}{\partial W_3} & \frac{\partial w_2}{\partial W_3} & \frac{\partial w_3}{\partial W_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Выписывая первую блок-координату этого соотношения и используя рациональность производных Z , получаем рациональность самого отображения Z . Возвращаясь ко второй координате (32), получаем рациональность производных W_2 и затем из второй координаты (33) – рациональность W_2 . И, наконец, из третьих координат (32) и (33) – рациональность W_3 . Если при этом следить за степенями, то получаем требуемую оценку на степени (Z, W_2, W_3) . Предложение доказано.

Сделаем два замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оценка степени по разным координатам разная. Степень Z не превосходит $5(n + K)$, степень $W_2 - 10(n + K)$, а степень $W_3 - 15(n + K)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если проследить за рассуждением Туманова [10] для квадратик типа (n, k) , используя полученную нами в [3] оценку степеней векторных полей (для квадратик эта степень не превосходит 2), то получаем следующую оценку. Если $(z \rightarrow Z(z, w), w \rightarrow W(z, w))$ – автоморфизм невырожденной квадратки, то степень Z не превосходит $2(n + k)$, а степень $W - 4(n + k)$. Однако примеры квадратик с автоморфизмами степени, превосходящей k , неизвестны. По-видимому, и приведенная оценка степени для кубики также является грубой. Если формулировать гипотезу по аналогии с квадратикой, то точной оценкой степени является коразмерность, т.е. K .

Полученные результаты можно резюмировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 8. Кубика типа (n, K) при $n^2 < K \leq n^2(n + 2)$ является хорошей модельной поверхностью, т.е.

- 1) всякий порождающий росток с невырожденной формой Леви эквивалентен ростку вида (6) (универсальность);
- 2) кубика – это алгебраическая поверхность, заданная уравнениями степени 2 и 3, любая поверхность этого типа, заданная уравнениями меньшей степени, имеет бесконечномерную группу;
- 3) голоморфная эквивалентность кубик совпадает с их линейной эквивалентностью (предложение 3);
- 4) размерность группы ростка не превосходит размерности группы касательной кубики (экстремальность, см. предложение 6);
- 5) кубика однородна, т.е. ее голоморфные автоморфизмы действуют на ней транзитивно (на самом деле, транзитивность обеспечивают квадратично-треугольные преобразования (однородность, см. предложение 2);

- 6) группа касательной кубики конечномерна тогда и только тогда, когда кубика невырождена, причем условие невырожденности, т.е. условие линейной независимости координатных форм, является условием общего положения (конечномерность, см. предложение 4);
- 7) алгебра Ли голоморфных векторных полей на невырожденной кубике – это некоторая подалгебра алгебры полиномиальных векторных полей ограниченной степени (степени коэффициентов не превосходят 5) (полиномиальность алгебры, см. предложение 4);
- 8) группа автоморфизмов невырожденной кубики это некая подгруппа группы бирациональных преобразований $\mathbb{C}^{n+K}$, чьи степени (числителей и знаменателей в несократимом представлении) не превосходят $15(n + K)$ (рациональность группы, см. предложение 7).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tanaka N. On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables // J. Math. Soc. Japan. 1962. V. 14. P. 397–429; II. Graded Lie algebras and geometric structures // Proc. US–Japan Seminar in Differential Geometry. 1965. P. 147–150.
- [2] Chern S.S., Moser J.K. Real hypersurfaces in complex manifold // Acta Math. 1974. V. 133. №3–4. P. 219–271.
- [3] Белошапка В. К. О голоморфных преобразованиях квадрики // Матем. сб. 1991. №2. С. 203–219.
- [4] Туманов А. Е. Конечномерность группы CR-автоморфизмов стандартного CR-многообразия и собственные голоморфные отображения областей Зигеля // Изв. АН СССР. 1988. Т. 52. №3. С. 651–659.
- [5] Beloshapka V. K. CR-varieties of the type $(1, 2)$ as varieties of “super-high” codimension // Russian J. Math. Phys. 1998. V. 5. №2. P. 399–404.
- [6] Шананина Е. Н. Модели CR-многообразий типа $(1, k)$ при $3 \leq k \leq 7$ и их автоморфизмы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №3. С. 452–459.
- [7] Чирка Е. М. Введение в геометрию CR-многообразий // УМН. 1991. Т. 46. №1. С. 81–164.
- [8] Baouendi M.S., Ebenfelt P., Rothschild L. P. Local Geometric Properties of Real Submanifolds in Complex Space. Preprint Trita-Mat-1999-20 (November 1999). Stockholm, Sweden: Royal Institute of Technology, 1999.
- [9] Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
- [10] Ezhov V., Schmalz G. Infinitesimale Starrheit hermitescher Quadriken in allgemeiner Lage. Preprint, 1998.