Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, О двухпараметрической асимптотике в одной краевой задаче для лапласиана, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 520–534

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm764>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:33:48

УДК 517.956

О ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИКЕ В ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА

Д. И. Борисов

Рассмотрена модельная краевая задача для лапласиана в единичном круге с часто и периодически чередующимся типом граничных условий в случае, когда предельной является задача Дирихле. Исследована и обоснована двухпараметрическая асимптотика собственного значения возмущенной задачи, сходящегося к простому собственному значению предельной задачи.

Библиография: 5 названий.

1. Постановка задачи и формулировка результатов. Краевые эллиптические задачи с часто чередующимся типом граничных условий возникают в различных приложениях, например, при исследовании собственных значений часто закрепленной мембраны [1], в задачах нефтехимии [2] и в других областях (см. [3]). В настоящей работе рассматривается модельная краевая задача для оператора Лапласа в круге с часто и периодически чередующимся типом граничных условий. Введем обозначения: $\varepsilon = 2N^{-1}$ – малый параметр, $N \gg 1$ – целое число, D – единичный круг с центром в начале координат, (r, θ) – полярные координаты. Через γ_ε обозначим объединение N открытых непересекающихся лежащих на ∂D дуг, длиной $2\varepsilon a$ каждая ($0 < a < \pi/2$), расположенных так, что любая из этих дуг получается из соседней поворотом на $\varepsilon\pi$ относительно начала координат. Определим Γ_ε как дополнение $\bar{\gamma}_\varepsilon$ до ∂D . Под *часто и периодически чередующимся типом граничных условий* мы будем понимать случай, когда на γ_ε задается граничное условие Дирихле, а на Γ_ε – граничное условие Неймана. Известно [2], [3], что если a постоянное или $a = a(\varepsilon)$ стремиться к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ не более чем степенным образом, то для возмущенной задачи на собственные значения

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda^\varepsilon\psi_\varepsilon, \quad x \in D, \quad \psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (1.1)$$

предельной (осредненной) является задача Дирихле.

Для случая постоянного a в [1] были построены асимптотики собственных значений и собственных функций задачи (1.1). В частности, в этой работе показано, что асимптотика собственного значения λ^ε , сходящегося к простому собственному значению λ_0

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01143, и Министерства образования РФ, грант № Е00-1.0-53.

предельной задачи, имеет вид

$$\lambda^\varepsilon(a) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \lambda_n(a), \quad (1.2)$$

$$\lambda_1(a) = 2\lambda_0 \ln \sin a, \quad \lambda_2(a) = 2\lambda_0 \ln^2 \sin a. \quad (1.3)$$

В случае переменного a в [1] была обоснована лишь первая поправка $\varepsilon \lambda_1(a)$. Вопрос же о справедливости асимптотики (1.2) при $a \rightarrow 0$ в [1] остался открытым. Ясно, что нельзя решить этот вопрос, не выяснив характера зависимости коэффициентов $\lambda_n(a)$ от параметра $a \rightarrow 0$. С учетом формул (1.3) можно было бы ожидать, что $\lambda_n(a)$ есть многочлен степени n от $\ln \sin a$ с постоянными коэффициентами. Ниже мы покажем, что это предположение неверно, а именно, имеет место

ТЕОРЕМА 1.1. Коэффициент $\lambda_3(a)$ ряда (1.2) имеет вид

$$\lambda_3(a) = K_3 \ln^3 \sin a + \Phi_1(a) \ln \sin a + \Phi_2(a), \quad K_3 = \lambda_0 \left(-\frac{2}{3} \lambda_0 + \frac{4}{3} \right), \quad (1.4)$$

где $\Phi_1, \Phi_2 \in C^\infty([0, \pi/2])$, $\Phi_1(0) = \Phi_1'(0) = 0$, $\Phi_1''(0) \neq 0$.

Для произвольного n удается получить главные члены асимптотик $\lambda_n(a)$ при $a \rightarrow 0$ и обосновать затем асимптотику (1.2) для случая переменного a . Обозначим: $[\cdot]$ – целая часть числа.

ТЕОРЕМА 1.2. Если $a = a(\varepsilon)$ и $a(\varepsilon)$ стремится к нулю не более чем степенным образом, то асимптотика $\lambda^\varepsilon(a)$ имеет вид (1.2), где

$$\lambda_n(a) = K_n \ln^n a + o(\ln^{n-2} a), \quad a \rightarrow 0, \quad K_n = \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^{[\frac{n-1}{2}]} \Lambda_i^{(n)} \lambda_0^i + \frac{2^n}{n!} \right), \quad (1.5)$$

$\Lambda_i^{(n)} \in \mathbb{Q}$ – некоторые константы, не зависящие от a .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Известно, что собственными значениями оператора $-\Delta$ в единичном круге с граничными условиями Дирихле являются квадраты нулей функции Бесселя нулевого порядка $\mathcal{J}_0$. Для нашего случая это означает, что $\mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_0}) = 0$. Так как нули функции $\mathcal{J}_0$ являются трансцендентными числами (см., например, [4]), то все константы K_n в теоремах 1.1, 1.2 отличны от нуля.

2. Предварительные сведения. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 = \theta \varepsilon^{-1}$, $\xi_2 = (1-r) \varepsilon^{-1}$, $z = \xi_1 + i \xi_2$, $\lambda_{-1} = 0$, $\Pi = \{\xi: -\pi/2 < \xi_1 < \pi/2, \xi_2 > 0\}$, γ^a – объединение интервалов на прямой $\xi_2 = 0$, получающихся из интервала $(-a, a)$ сдвигами, кратными π , Γ^a – дополнение $\bar{\gamma}^a$ до оси $O\xi_1$. Через $\mathcal{V}_\varkappa$ обозначим класс четных, π -периодических по переменной ξ_1 экспоненциально убывающих вместе с производными при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ функций из пространства $W_2^1(\Pi) \cap C^\infty(\{\xi_2 \geq 0\} \setminus \sigma)$, где $\sigma = \sigma(\varkappa) = \{(\pm \varkappa + \pi k, 0), k \in \mathbb{Z}\}$. Рассмотрим рекуррентную систему краевых задач ($n \geq 1$):

$$\Delta_\xi v_n = F_n \equiv \sum_{i=1}^{n-1} \left(\xi_2^{i-1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} - (i+1) \xi_2^i \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \lambda_{i-2} \right) v_{n-i}, \quad \xi_2 > 0, \quad (2.1)$$

$$v_n|_{\gamma^a} = -\lambda_n + f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), \quad \frac{\partial v_n}{\partial \xi_2} \Big|_{\Gamma^a} = g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), \quad (2.2)$$

где граничное условие на γ^a для функции v_n является коэффициентом при ε^n в ряде Тейлора функции $(-c\mathcal{I}_0(\sqrt{\lambda^\varepsilon}))$, граничное условие на Γ^a – коэффициентом при ε^{n-1} в ряде Тейлора функции $c\sqrt{\lambda^\varepsilon}\mathcal{I}_0'(\sqrt{\lambda^\varepsilon})$, а $c = 2\sqrt{\lambda_0}/\mathcal{I}_0'(\sqrt{\lambda_0})$ – нормирующий множитель, введенный для упрощения вычислений. Легко видеть, что, в частности,

$$\begin{aligned} f_1 &= 0, & g_1 &= 2\lambda_0, & f_2 &= \frac{1}{2}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_0}, & g_2 &= 0, \\ f_3 &= \frac{1}{24}\frac{\lambda_1}{\lambda_0^2}(24\lambda_2\lambda_0 - 8\lambda_1^2 + \lambda_1^2\lambda_0), & g_3 &= -\frac{1}{4}\lambda_1^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обозначим: $X(\xi) = \operatorname{Re} \ln(\sin z + (\sin^2 z - \sin^2 a)^{1/2}) - \xi_2$. В силу определения $X \in \mathcal{V}_a$ – гармоническая функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$X = \ln \sin a, \quad \xi \in \gamma^a, \quad \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -1, \quad \xi \in \Gamma^a. \quad (2.4)$$

В [1] было доказано, что коэффициенты $\lambda_n(a)$ однозначно определяются из условий разрешимости задач (2.1), (2.2) в классе $\mathcal{V}_a$, и, в частности, были получены выражения

$$v_1 = -g_1 X(\xi), \quad v_2 = \frac{1}{2}\xi_2^2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} \quad (2.5)$$

для решений (2.1), (2.2) при λ_1, λ_2 из (1.3); в том, что это решения, легко убедиться, подставляя (2.5) в (2.2) и учитывая (2.3), (2.4). В той же работе было показано, что условия разрешимости задач (2.1), (2.2) в $\mathcal{V}_a$ имеют вид

$$\lambda_n = f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) + g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \ln \sin a - \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} Y F_n d\xi, \quad (2.6)$$

где $Y(\xi) = X(\xi) + \xi_2 - \ln \sin a$. Равенства (2.6) несложно проверить: достаточно заменить в них F_n на $\Delta_\xi v_n$ и проинтегрировать по частям, учитывая граничные условия (2.2).

3. Доказательство теоремы 1.1. Подставив (2.5) в (2.1), имеем

$$F_3 = \Delta_\xi u_3 + W_3, \quad \text{где} \quad u_3 = \frac{1}{8}\xi_2^4 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{3}\xi_2^3 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2}, \quad W_3 = -\lambda_0 v_1. \quad (3.1)$$

В силу (2.5) и определения функции X получаем, что функция $u_3 \in \mathcal{V}_a$ удовлетворяет однородным граничным условиям Дирихле и Неймана при $\xi_2 = 0$. Подставляя (3.1), (2.5) в (2.6) и интегрируя по частям, получаем

$$\lambda_3 = f_3 + g_3 \ln \sin a - \frac{\lambda_0 g_1}{\pi} \int_{\Pi} Y X d\xi. \quad (3.2)$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (3.2). По определению функция

$$X_1(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\xi_2}^{+\infty} t X(\xi_1, t) dt \in \mathcal{V}_a$$

является решением уравнения $\Delta_\xi X_1 = X$, удовлетворяющим однородному граничному условию Неймана при $\xi_2 = 0$. В силу определения функции X_1 и гармоничности X имеем

$$\left. \frac{d^2 X_1(\xi_1, 0)}{d\xi_1^2} \right|_{|\xi_1| < a} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(\xi_1, t) dt = \frac{1}{2} \ln \sin a.$$

Из полученного равенства и четности по ξ_1 функции X_1 выводим, что

$$X_1(\xi_1, 0)|_{|\xi_1| < a} = \frac{1}{4} \xi_1^2 \ln \sin a + X_1(0, 0). \quad (3.3)$$

Интегрируя по частям, с учетом (3.3) имеем равенство

$$\int_{\Pi} Y X d\xi = \int_{\Pi} Y \Delta_\xi X_1 d\xi = \frac{1}{2} \ln \sin a \int_0^a \frac{\xi_1^2 \cos \xi_1 d\xi_1}{\sqrt{\sin^2 a - \sin^2 \xi_1}} + \pi X_1(0, 0). \quad (3.4)$$

По определению $\tilde{X}(\xi) = \operatorname{Re}(\ln \sin z + iz + \ln 2) \in \mathcal{V}_0$ – гармоническая функция, удовлетворяющая граничному условию

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \xi_2} = -1 \quad \text{при } \xi_2 = 0, \quad \xi_1 \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

а

$$\tilde{X}_1(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\xi_2}^{+\infty} t \tilde{X}(\xi_1, t) dt \in \mathcal{V}_0$$

– решение уравнения $\Delta_\xi \tilde{X}_1 = \tilde{X}$, удовлетворяющее однородному граничному условию Неймана при $\xi_2 = 0$. Пусть $\tilde{Y} = \tilde{X} + \xi_2 - \ln 2$. Легко видеть, что $\tilde{Y}$ – гармоническая функция, удовлетворяющая однородному граничному условию Неймана при $\xi_2 = 0$, $\xi_1 \neq \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Учитывая приведенные выше свойства $\tilde{X}_1$ и гармоничность $\tilde{X}$, аналогично тому, как было получено (3.3), вычислим вторую производную по ξ_1 от функции $\tilde{X}_1(\xi_1, 0)$, а затем два раза ее проинтегрируем. Тогда получим следующее соотношение:

$$\tilde{X}_1(\xi_1, 0) = \frac{1}{4} \xi_1^2 \ln \sin \xi_1 + \varphi_1(\sin \xi_1), \quad \xi_1 > 0, \quad (3.5)$$

где $\varphi_1 \in C^\infty([0, 1])$. Интегрируя по частям левые части тождеств

$$\int_{\Pi} \xi_2^m \Delta_\xi X d\xi = 0, \quad \int_{\Pi} \xi_2^m \Delta_\xi \tilde{X} d\xi = 0, \quad m = 2, 3,$$

выводим равенства

$$\int_{\Pi} \xi_2^m X d\xi = \int_{\Pi} \xi_2^m \tilde{X} d\xi = 0, \quad m = 0, 1.$$

Используя полученные соотношения и учитывая логарифмическую особенность в нуле у функции $\tilde{Y}$, получаем, что

$$\pi X_1(0, 0) = \int_{\Pi} X \tilde{Y} d\xi = \int_{\Pi} Y \Delta_\xi \tilde{X}_1 d\xi = 2 \int_0^a \frac{\tilde{X}_1(\xi_1, 0) \cos \xi_1 d\xi_1}{\sqrt{\sin^2 a - \sin^2 \xi_1}}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5), (3.6) в (3.4) и делая в интегралах замену $t = \sin \xi_1 / \sin a$, имеем

$$\int_{\Pi} Y X d\xi = \varphi_2(a) \ln \sin a + \varphi_3(a), \quad (3.7)$$

где $\varphi_2, \varphi_3 \in C^\infty([0, \pi/2])$, $\varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = 0$, $\varphi_2''(0) \neq 0$. Подставляя теперь (1.3), (2.3), (3.7) в (3.2), получаем утверждение теоремы 1.1.

Однако вычислить $\lambda_n(a)$ при $n \geq 4$ подобным способом не удастся.

4. Редукция краевых задач (2.1), (2.2). Согласно формулам (2.6) коэффициенты λ_n выражаются через правые части и граничные условия задач (2.1), (2.2). Однако исследование задач (2.1), (2.2) неудобно, что связано с наличием производных в правых частях (2.1). В этом пункте мы сведем краевые задачи (2.1), (2.2) к более простым.

ЛЕММА 4.1. *Для правых частей уравнений (2.1) выполняются равенства*

$$F_n = \sum_{i=0}^1 \xi_2^i \left(\alpha_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \alpha_i^{(2)} \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) v_{n-i-1} + \sum_{i=0}^2 \alpha_i^{(3)} \xi_2^i \sum_{j=0}^{n-i-3} \lambda_j v_{n-i-j-2},$$

где $v_{-1} = v_0 = 0$, $\alpha_0^{(1)} = 1$, $\alpha_0^{(2)} = \alpha_1^{(3)} = 2$, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = \alpha_0^{(3)} = \alpha_2^{(3)} = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1, 2$ утверждение леммы очевидно. Дальнейшее доказательство проводится по индукции путем замены в формулах для F_n выражений $\partial^2 v_{n-j} / \partial \xi_1^2$ на $F_{n-j} - \partial^2 v_{n-j} / \partial \xi_2^2$.

ЛЕММА 4.2. *Решения краевых задач (2.1), (2.2) представляются в виде суммы $v_n(\xi) = u_n(\xi) + w_n(\xi)$, где $w_n \in \mathcal{V}_a$ являются решениями рекуррентной системы краевых задач*

$$\Delta_\xi w_n = W_n \equiv - \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(-2)^i}{i!} \xi_2^i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{n-i-2} \lambda_{n-i-j-2} w_j, \quad \xi_2 > 0, \quad (4.1)$$

$$w_n = v_n, \quad \xi \in \gamma^a, \quad \frac{\partial w_n}{\partial \xi_2} = \frac{\partial v_n}{\partial \xi_2}, \quad \xi \in \Gamma^a. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем по индукции. При $n = 1, 2$ утверждение теоремы следует из (2.1), (2.2), (2.5), определения функции $X(\xi)$ и равенств $w_1 = v_1$, $u_1 = w_2 = 0$, $u_2 = \frac{1}{2} \partial^2 w_1 / \partial \xi_2^2$. Далее будет показано, что функции u_n имеют вид

$$u_n = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \beta_{i,j}^{(n)} \xi_2^{n+j-i} \frac{\partial^j w_i}{\partial \xi_2^j}, \quad \beta_{i,j}^{(n)} = \beta_{1,j}^{(n-i+1)}, \quad (4.3)$$

$$\beta_{1,n}^{(n)} = \beta_{1,0}^{(n)} = 0, \quad \beta_{1,1}^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{1,j}^{(n)} = \beta_{1,j}^{(n-1)} + \frac{\beta_{1,j-1}^{(n-1)} - \beta_{1,j}^{(n-1)}}{n+j-1}.$$

Докажем индукционный переход. Пусть теорема и (4.3) выполнены для всех $n \leq K-1$. Определим функцию u_K по формуле (4.3). Используя индукционное предположение и теоремы о повышении гладкости [5], несложно показать, что $\xi_2^m w_k \in W_2^{m+1}(\Pi)$, $m \geq 0$, $k \leq K-1$. Из этого факта и индукционного предположения следует, что u_K принадлежит $\mathcal{V}_a \cap W_2^2(\Pi)$ и удовлетворяет однородным граничным условиям Неймана и Дирихле при $\xi_2 = 0$, $\xi_1 \neq \pm a + \pi t$, $t \in \mathbb{Z}$. Обозначим $w_K = v_K - u_K$. В силу индукционного предположения и леммы 4.1 верны соотношения

$$F_K = S_1^{(K)} + S_2^{(K)}, \quad \Delta_\xi u_K = S_3^{(K)} + S_4^{(K)}, \quad (4.4)$$

где $S_i^{(K)} = S_i^{(K)}(w)$, $w = (w_1, \dots, w_{K-1})$, и

$$\begin{aligned} S_1^{(K)}(w) &= \sum_{i=0}^1 \xi_2^i \left(\alpha_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \alpha_i^{(2)} \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) (u_{K-i-1} + w_{K-i-1}), \\ S_2^{(K)}(w) &= \sum_{i=0}^2 \alpha_i^{(3)} \xi_2^i \sum_{j=0}^{n-i-3} \lambda_j (u_{K-i-j-2} + w_{K-i-j-2}), \\ S_3^{(K)}(w) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{K-1} \sum_{j=1}^{K-i} \beta_{i,j}^{(K)} \left(2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\xi_2^{K+j-i}) \frac{\partial^{j+1} w_i}{\partial \xi_2^{j+1}} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} (\xi_2^{K+j-i}) \frac{\partial^j w_i}{\partial \xi_2^j} \right), \\ S_4^{(K)}(w) &= \sum_{i=3}^{K-1} \sum_{j=1}^{K-i} \beta_{i,j}^{(K)} \xi_2^{K+j-i} \frac{\partial^j w_i}{\partial \xi_2^j}. \end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями проверяются равенства

$$S_1^{(n)} = S_3^{(n)}, \quad n = 1, \dots, K. \quad (4.5)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_2} S_4^{(K)}(w) - S_4^{(K)} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} \right) &= \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} S_4^{(K-1)}(w) - 2 S_4^{(K-1)}(w) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{K-4} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{K-i-3} \frac{(-2)^i}{i!} \lambda_{K-i-j-3} \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\xi_2^i w_j). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из формулы Лейбница вытекает, что

$$S_4^{(K)}(w) = \sum_{i=0}^{K-4} \lambda_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{K-i-3} \sum_{k=0}^{K-i-j-2} A_{i,j,k}^{(K)} \xi_2^{K-i+k-j-2} \frac{\partial^k w_j}{\partial \xi_2^k}, \quad (4.7)$$

где $A_{i,j,k}^{(K)}$ – некоторые постоянные. В силу индукционного предположения имеем

$$S_4^{(K-1)} = F_{K-1} - W_{K-1} - S_3^{(K-1)}. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.7), (4.8) в (4.6), получаем, что

$$\begin{aligned} A_{i,j,k}^{(K)} &= -\beta_{j,k}^{K-i-4} + 2\beta_{j,k}^{K-i-3} - \beta_{j,k}^{K-i-2}, \\ 0 \leq i \leq K-6, \quad 1 \leq j \leq K-i-5, \quad 1 \leq k \leq K-i-j-4, \\ A_{i,j,0}^{(K)} &= \frac{(-2)^{K-i-j-2}}{(n-i-j-2)!}, \quad 0 \leq i \leq K-6, \quad 1 \leq j \leq K-i-5, \\ A_{i,K-i-4,0}^{(K)} &= 1, \quad A_{i,K-i-3,0}^{(K)} = 0, \quad 0 \leq i \leq K-4, \\ A_{K-5,1,1}^{(K)} &= 2\beta_{1,1}^{(2)} - \beta_{1,1}^{(3)}, \quad A_{K-5,1,2}^{(K)} = -\beta_{1,2}^{(3)}, \quad A_{K-4,1,1}^{(K)} = -\beta_{1,1}^{(2)}. \end{aligned}$$

Учитывая полученные соотношения для $A_{i,j,k}^{(K)}$, (4.5), (4.6), (4.8), выводим равенство

$$\Delta_\xi w_K = \Delta_\xi v_K - \Delta_\xi u_K = W_K,$$

где W_K определяется из (4.1). В силу свойств функций u_K , v_K функция w_K принадлежит $\mathcal{V}_a$ и удовлетворяет граничным условиям (4.2).

ТЕОРЕМА 4.1. *Функции $\lambda_n(a)$ удовлетворяют равенствам*

$$\lambda_n = f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) + g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \ln \sin a - \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} X W_n d\xi. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.2 заменим в (2.6) F_n на $\Delta_\xi u_n + W_n$. Интегрируя затем по частям и учитывая однородные граничные условия для u_n , получаем, что

$$\lambda_n = f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) + g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \ln \sin a - \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} Y W_n d\xi. \quad (4.10)$$

Из очевидных равенств

$$\int_{\Pi} \xi_2^m w_n d\xi = \frac{1}{(m+1)(m+2)} \int_{\Pi} \xi_2^{m+2} W_n d\xi, \quad n \geq 1, \quad m \geq 0,$$

следуют тождества

$$\int_{\Pi} \xi_2^m w_n d\xi = 0. \quad (4.11)$$

Выражая теперь Y через X и подставляя (4.11), (4.1) в (4.10), получаем утверждение теоремы.

Как видно из теоремы 4.1, основной сложностью при доказательстве формул (1.5) являются оценки интегралов в (4.9).

5. Оценки решений краевых задач (2.1), (2.2). В этом пункте будут доказаны следующие априорные оценки:

$$\|\xi_2^m w_n\|_p \leq C_1 |\ln a|^{3/(2q)} (\|\xi_2^s W_n\|_p + |\ln a|^s \|W_n\|_p) + |g_n| \|\xi_2^m X\|_p, \quad (5.1)$$

где $1/p + 1/q = 1$, $1 < p \leq 2$, $m \geq 0$, $s = m + 2 + 1/(2q)$, $a \in [0, a_0]$, a_0 – некоторое достаточно малое положительное число, C_1 – не зависящая от a константа, $\|\cdot\|_p$ – норма в $L_p(\Pi)$. Из леммы 4.2, определения $\mathcal{V}_a$ и теорем вложения [5] следует, что $\xi_2^m w_n \in L_k(\Pi)$ для любых $n \geq 1$, $m \geq 0$, $k \geq 1$. Из этого факта и (4.1) вытекает, что все интегралы в (5.1) сходятся.

Как было сказано в конце предыдущего пункта, для доказательства формул (1.5) достаточно оценить интегралы в (4.9). Неравенства (5.1) позволят нам это сделать.

Условимся в дальнейшем через C_i обозначать различные константы, не зависящие от a . Положим

$$H(z, \zeta) = \ln \left| \frac{\sin((z - \zeta)/2) \cos((z + \bar{\zeta})/2)}{\sin((z - \bar{\zeta})/2) \cos((z + \zeta)/2)} \right|, \quad \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2.$$

Функция H обладает следующими свойствами:

- 1) $H(z, \zeta) = H(\zeta, z)$, $H(z, \zeta) = \ln |z - \zeta| (1 + o(1))$, $z \rightarrow \zeta$;
- 2) $\Delta_\xi H(z, \zeta) = 0$, $z \neq \zeta$, $H = 0$, $\xi_2 = 0$, $\frac{\partial H}{\partial \xi_1} = 0$, $\xi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$;
- 3) $H(z, \zeta) = -2\zeta_2 + O(e^{-\xi_2})$, $\xi_2 \rightarrow +\infty$;
- 4) верны оценки

$$\ln \frac{\operatorname{ch}(\xi_2 - \zeta_2) - 1}{\operatorname{ch}(\xi_2 + \zeta_2) - 1} \leq H(z, \zeta) \leq \ln \frac{\operatorname{ch}(\xi_2 - \zeta_2) + 1}{\operatorname{ch}(\xi_2 + \zeta_2) + 1} \leq 0.$$

Свойства 1), 2) несложно проверить, используя определение функции H . Свойство 3) следует из представления

$$H(z, \zeta) = \frac{1}{2} \ln \frac{(\operatorname{ch}(\xi_2 - \zeta_2) - \cos(\xi_1 - \zeta_1))(\operatorname{ch}(\xi_2 - \zeta_2) + \cos(\xi_1 + \zeta_1))}{(\operatorname{ch}(\xi_2 + \zeta_2) - \cos(\xi_1 - \zeta_1))(\operatorname{ch}(\xi_2 + \zeta_2) + \cos(\xi_1 + \zeta_1))}.$$

Свойство 4) вытекает из того же представления и очевидной оценки

$$\frac{\operatorname{ch}(\xi_2 - \zeta_2) - 1}{\operatorname{ch}(\xi_2 + \zeta_2) - 1} \leq \frac{\operatorname{ch}(\xi_2 - \zeta_2) + \cos t}{\operatorname{ch}(\xi_2 + \zeta_2) + \cos t} \leq \frac{\operatorname{ch}(\xi_2 - \zeta_2) + 1}{\operatorname{ch}(\xi_2 + \zeta_2) + 1} \leq 1, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Рассмотрим отображение $\eta(z) = \arcsin(\sin z / \sin a)$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$. При таком отображении полуплоса Π переходит в себя, γ^a переходит в $\{\eta: -\pi/2 < \eta_1 < \pi/2, \eta_2 = 0\}$, $\Gamma^a \cup \{\xi: \xi_1 = \pm\pi/2, \xi_2 > 0\}$ переходит в $\{\eta: \eta_1 = \pm\pi/2, \eta_2 > 0\}$. Отметим также, что $\operatorname{Im} \eta(z) = Y(\xi)$. Учитывая перечисленные свойства отображения $\eta(z)$ и свойства 1)–3) функции H , (2.2), (2.4) и лемму 4.2, получаем, что при $\xi \in \Pi$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} w_n(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \tilde{w}_n(\xi) - g_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1})X(\xi), \\ \tilde{w}_n(\xi) &= \int_{\Pi} (H(\eta(z), \eta(\zeta)) + 2Y(\zeta))W_n(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Опираясь на представление (5.2), мы получим оценки (5.1). Предварительно докажем несколько вспомогательных лемм.

В силу свойства 4) функции H для любых $k \geq 1$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} |H(z, \zeta) + 2\zeta_2|^k &\leq C_2(H_k^{(1)}(\xi_2, \zeta_2) + H_k^{(2)}(\xi_2, \zeta_2)) = C_2 H_k(\xi_2, \zeta_2), \\ H_k^{(1)} &= \left| \ln \frac{\operatorname{ch}(\xi_2 - \zeta_2) - 1}{\operatorname{ch}(\xi_2 + \zeta_2) - 1} + 2\zeta_2 \right|^k, \quad H_k^{(2)} = \left| \ln \frac{\operatorname{ch}(\xi_2 - \zeta_2) + 1}{\operatorname{ch}(\xi_2 + \zeta_2) + 1} + 2\zeta_2 \right|^k. \end{aligned} \quad (5.3)$$

ЛЕММА 5.1. *Выполняются неравенства*

$$\int_0^{+\infty} \frac{H_{k_1}(\xi_2, \zeta_2)}{(1 + \zeta_2)^{k_2}} d\zeta_2 \leq \frac{C_3}{(1 + \xi_2)^{k_2 - k_1 - 1}}, \quad k_1 \geq 1, \quad k_2 - k_1 > 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что функция $H_{k_1}^{(1)}(\xi_2, \zeta_2)$ монотонно растет при $\zeta_2 \in [0, \xi_2) \cup (\operatorname{arcsch} e^{\xi_2}, +\infty)$, монотонно убывает при $\zeta_2 \in (\xi_2, \operatorname{arcsch} e^{\xi_2})$, причем верна оценка $H_{k_1}^{(1)}(\xi_2, \zeta_2) \leq 2^{k_1} \zeta_2^{k_1}$ при $\zeta_2 \in (\operatorname{arcsch} e^{\xi_2}, +\infty)$. Аналогично, $H_{k_1}^{(2)}(\xi_2, \zeta_2)$ монотонно растет при $\zeta_2 \in [0, +\infty)$ и верна оценка $H_{k_1}^{(2)}(\xi_2, \zeta_2) \leq 2^{k_1} \zeta_2^{k_1}$ при $\zeta_2 \in [0, +\infty)$. Оценим интеграл от $H_{k_1}^{(1)}(\xi_2, \zeta_2)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{H_{k_1}^{(1)}(\xi_2, \zeta_2)}{(1 + \zeta_2)^{k_2}} d\zeta_2 &= \left(\int_0^{\xi_2/2} + \int_{\xi_2/2}^{\xi_2-b} + \int_{\xi_2-b}^{\xi_2} + \int_{\xi_2}^{\varphi(\xi_2)} + \int_{\varphi(\xi_2)}^{+\infty} \right) \frac{H_{k_1}^{(1)}(\xi_2, \zeta_2)}{(1 + \zeta_2)^{k_2}} d\zeta_2 \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5, \end{aligned}$$

где $\varphi(\xi_2) = \operatorname{arcsch} e^{\xi_2}$, а b – достаточно малое число. В силу вышеупомянутых свойств имеем оценки

$$I_1 \leq C_4 e^{-\alpha \xi_2}, \quad \alpha > 0, \quad I_2 \leq C_5 (1 + \xi_2)^{-k_2+1}, \quad I_5 \leq C_6 (1 + \xi_2)^{-k_2+k_1+1}.$$

Делая в I_3 замену $t = \xi_2 - \zeta_2$, в I_4 замену $t = \zeta_2 - \xi_2$, получим неравенства

$$I_3 \leq C_7 (1 + \xi_2)^{-k_2}, \quad I_4 \leq C_8 (1 + \xi_2)^{-k_2}.$$

Собирая полученные оценки вместе, выводим, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{H_{k_1}^{(1)}(\xi_2, \zeta_2)}{(1 + \zeta_2)^{k_2}} d\zeta_2 \leq \frac{C_9}{(1 + \xi_2)^{k_2-k_1-1}}.$$

Аналогично доказываем, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{H_{k_1}^{(2)}(\xi_2, \zeta_2)}{(1 + \zeta_2)^{k_2}} d\zeta_2 \leq \frac{C_{10}}{(1 + \xi_2)^{k_2-k_1-1}}.$$

Суммируя две последние оценки и учитывая (5.3), получаем утверждение леммы.

Обозначим $J(\eta) = |\cos^2 \eta / (A^2 - \sin^2 \eta)|$, $A = \sin^{-1} a$. Легко видеть, что функция $J(\eta)$ является якобианом замены $\eta = \eta(z)$.

ЛЕММА 5.2. *Справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} J(\eta) d\eta_1 &\leq 2 \left(3 + \ln \frac{B + \operatorname{ch} 2\eta_2}{|B - \operatorname{ch} 2\eta_2|} \right) = \tilde{J}(\eta_2), \\ \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{J}(\eta_2)^2}{(1 + \eta_2)^{1+\mu}} d\eta_2 &\leq C_{11} \ln^2 a, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $B = 2A^2 - 1$, $\mu > 0$, $a \in [0, a_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать, что

$$J(\eta) \leq \frac{\operatorname{ch} 2\eta_2 + 1}{(B^2 + 2B \operatorname{ch} 2\eta_2 \cos 2\eta_1 + \operatorname{ch}^2 2\eta_2 + \cos^2 2\eta_1 - 1)^{1/2}}.$$

Интегрируя полученную оценку и делая замену $t = \operatorname{tg} \eta_1$, выводим, что

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} J(\eta) d\eta_1 \leq \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right) \frac{2(\operatorname{ch} 2\eta_2 + 1) dt}{\sqrt{t^4 \mathcal{M}_1^2 + t^2 \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3^2}} = 2(\operatorname{ch} 2\eta_2 + 1)(I_6 + I_7), \quad (5.5)$$

где $\mathcal{M}_{1,3} = B \mp \operatorname{ch} 2\eta_2$, $\mathcal{M}_2 = 2(B^2 + \operatorname{ch}^2 2\eta_2 - 2)$. Очевидно, что

$$I_6 \leq \frac{1}{\mathcal{M}_3}, \quad I_7 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \sqrt{t^2 \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_2}} \ln \frac{\sqrt{\mathcal{M}_2} + \sqrt{\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1^2}}{|\mathcal{M}_1|}. \quad (5.6)$$

Принимая во внимание оценки $(1 + \operatorname{ch} 2\eta_2)^2 \leq \mathcal{M}_2 \leq 2\mathcal{M}_3^2$, $\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2 \leq 3\mathcal{M}_3^2$ и подставляя (5.6) в (5.5), получим (5.4).

Учитывая оценку

$$\frac{1}{(1 + \eta_2)^{1+\mu}} \leq \frac{C_{12}}{(1 + \ln \operatorname{ch} 2\eta_2)^{1+\mu}}$$

и делая замену $t = \operatorname{ch} 2\eta_2$, выводим, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\tilde{J}(\eta_2)^2}{(1 + \eta_2)^{1+\mu}} d\eta_2 &\leq C_{13}(I_8 + I_9 + I_{10} + I_{11} + I_{12}) \\ &= C_{13} \left(\int_1^2 + \int_2^{B-1} + \int_{B-1}^B + \int_B^{B+1} + \int_{B+1}^{+\infty} \right) \frac{(3 + \ln((B+t)/|B-t|))^2 dt}{\sqrt{t^2-1}(1 + \ln t)^{1+\mu}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Произведя в интегралах I_{10} и I_{11} замены $t_1 = B - t$ и $t_2 = t - B$ соответственно и сделав несложные оценки, будем иметь

$$I_8 \leq C_{14}, \quad I_9 \leq C_{15} \ln^2 B, \quad I_{10} \leq C_{16}, \quad I_{11} \leq C_{17}, \quad I_{12} \leq C_{18} \ln^2 B.$$

Подставляя полученные неравенства в (5.7), получаем утверждение леммы.

Из (5.2) следуют неравенства

$$\|\xi_2^m w_n\|_p \leq C_{19} \|(1 + \xi_2)^m \tilde{w}_n\|_p + |g_n| \|\xi_2^m X\|_p. \quad (5.8)$$

В силу (5.3) и неравенств Гёльдера имеем

$$|\tilde{w}_n| \leq C_2 \left(\int_{\Pi} \frac{H_q(Y(\xi), Y(\zeta))}{(1 + Y(\zeta))^{kq}} d\zeta_1 d\zeta_2 \right)^{1/q} \|(1 + Y)^k W_n\|_p, \quad (5.9)$$

где $k > 0$ – некоторое число, которое будет определено в дальнейшем. В дальнейшем через μ_i мы будем обозначать некоторые положительные числа. В (5.9) в интеграле сделаем замену $\eta(\zeta)$, причем новую переменную вновь обозначим через ζ . Применяя лемму 5.2 и неравенство Коши–Буняковского, получаем оценку

$$\begin{aligned} |\tilde{w}_n| &\leq C_{20} \mathcal{M}_4 \|(1 + Y)^k W_n\|_p, \\ \mathcal{M}_4 &= \left(\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{J}(\zeta_2)^2}{(1 + \zeta_2)^{1+\mu_1}} d\zeta_2 \right)^{1/2q} \left(\int_0^{+\infty} \frac{H_{2q}(Y(\xi), \zeta_2)}{(1 + \zeta_2)^{2kq-1-\mu_1}} d\zeta_2 \right)^{1/(2q)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Из неравенств Гёльдера выводим, что

$$\|(1 + \xi_2)^m \tilde{w}_n\|_p \leq C_{21} \|(1 + \xi_2)^{m-3/(2q)+\mu_2} \tilde{w}_n\|_{2q}. \quad (5.11)$$

Из леммы 5.2, (5.10), (5.11) вытекает неравенство

$$\|(1 + \xi_2)^m \tilde{w}_n\|_p \leq C_{22} \mathcal{M}_5 |\ln a|^{1/q} \|(1 + Y)^k W_n\|_p, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{M}_5 = \left(\int_{\Pi} (1 + \xi_2)^{2q(m-3/(2q)+\mu_2)} \left(\int_0^{+\infty} \frac{H_{2q}(Y(\xi), \zeta_2)}{(1 + \zeta_2)^{2kq-1-\mu_1}} d\zeta_2 \right) d\xi_1 d\xi_2 \right)^{1/(2q)}.$$

Используя принцип максимума для гармонических функций и явный вид функции Y , несложно доказать оценки

$$\xi_2 \leq Y(\xi), \quad 1 + Y(\xi) \leq \xi_2 - 2 \ln \sin a. \quad (5.13)$$

Сделав в (5.12) замену $\eta(z)$ (новую переменную вновь обозначим через z) и учтя первую оценку из (5.13), в силу леммы 5.2 и неравенства Коши–Буняковского будем иметь

$$\begin{aligned} \|(1 + \xi_2)^m \tilde{w}_n\|_p &\leq C_{23} \mathcal{M}_6 |\ln a|^{3/(2q)} \|(1 + Y)^k W_n\|_p, \\ \mathcal{M}_6 &= \left(\int_0^{+\infty} (1 + \xi_2)^{4q(m-3/(2q))+1+\mu_3} \left(\int_0^{+\infty} \frac{H_{2q}(\xi_2, \zeta_2)}{(1 + \zeta_2)^{2kq-1-\mu_1}} d\zeta_2 \right)^2 d\xi_2 \right)^{1/(2q)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Согласно лемме 5.1 для сходимости интегралов в (5.9), (5.10), (5.12), (5.14) достаточно выбрать $k = m + 2 + 1/(2q)$, $\mu_1 = \mu_3 = 1/4$, $\mu_2 = q^{-6}$. Подставляя в (5.14) вторую оценку из (5.13), выводим неравенство

$$\|(1 + \xi_2)^m \tilde{w}_n\|_p \leq C_{24} |\ln a|^{3/(2q)} \left(\|\xi_2^{m+2+1/(2q)} W_n\|_p + |\ln a|^{m+2+1/(2q)} \|W_n\|_p \right).$$

Из полученной оценки и (5.8) вытекает (5.1).

6. Асимптотика функций $\lambda_n(a)$. В этом пункте мы исследуем зависимость функций $\lambda_n(a)$, определяемых равенствами (4.9), от малого параметра a . Доказательство того, что эти функции действительно являются коэффициентами асимптотики собственного значения $\lambda^\varepsilon(a)$, будет дано в следующем пункте.

ЛЕММА 6.1. *Для любых $m \geq 0$, $k \geq 1$, $a \in [0, a_0]$ имеют место неравенства*

$$\|\xi_2^m X\|_k \leq C_{25}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Pi_1 = \{\xi \in \Pi: |\sin z| \geq 1/3\}$, $\Pi_2 = \{\xi \in \Pi: |\xi| \leq a\}$, $\Pi_3 = \Pi \setminus \Pi_1 \setminus \Pi_2$. Для любого $k \geq 1$ выполняется оценка

$$\|\xi_2^m X\|_k \leq (\|\xi_2^m X\|_{L_k(\Pi_1)}^k + \|X\|_{L_k(\Pi_2)}^k + \|X\|_{L_k(\Pi_3)}^k)^{1/k}. \quad (6.1)$$

Учитывая, что $X(\xi)$ при $\xi_2 \in \Pi_1$, $a \in [0, a_0]$ – непрерывная по ξ и a функция, экспоненциально убывающая при $\xi_2 \rightarrow +\infty$, получаем, что

$$\|\xi_2^m X\|_{L_k(\Pi_1)} \leq C_{26}. \quad (6.2)$$

Из принципа максимума для гармонических функций и явного вида $X(\xi)$ следует оценка $|X(\xi)| \leq |\ln \sin a|$, из которой и определения множества Π_2 вытекает, что

$$\|X\|_{L_k(\Pi_2)} \leq C_{27}. \quad (6.3)$$

Из принципа максимума для гармонических функций и явного вида $X(\xi)$ следует, что существуют положительные константы C_{28} , C_{29} такие, что при $\xi \in \Pi_3$ выполняются

неравенства $C_{28} \ln |\sin z| - C_{29} \leq X(\xi) \leq 0$. Интегрируя полученную оценку, выводим, что

$$\|X\|_{L_k(\Pi_3)} \leq C_{30}. \quad (6.4)$$

Подстановка (6.2)–(6.4) в (6.1) завершает доказательство леммы.

Используя определение функции $\mathcal{J}_0$ и условие $\mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_0}) = 0$, по индукции несложно проверить, что

$$\mathcal{J}_0^{(n+1)}(\sqrt{\lambda_0}) = \frac{\mathcal{J}_0'(\sqrt{\lambda_0})}{\lambda_0^{n/2}} \left(\sum_{i=1}^{[n/2]} b_i^{(n)} \lambda_0^i + (-1)^n n! \right), \quad \text{где } b_i^{(n)} \in \mathbb{Q}. \quad (6.5)$$

ТЕОРЕМА 6.1. *Функции $\lambda_n(a)$ при $a \rightarrow 0$ имеют вид (1.5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вместе с утверждением теоремы мы покажем, что выполняются следующие равенства:

$$f_n = \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^{[(n-1)/2]} f_i^{(n)} \lambda_0^i + \frac{2^n}{n!} \right) \ln^n a + o(\ln^{n-2} a), \quad a \rightarrow 0, \quad (6.6)$$

$$g_n = \lambda_0^2 \left(\sum_{i=0}^{[(n-3)/2]} g_i^{(n)} \lambda_0^i \right) \ln^{n-1} a + o(\ln^{n-3} a), \quad a \rightarrow 0, \quad (6.7)$$

$$\|\xi_2^m w_n\|_p \leq C_{n,m,p}^{(1)} |\ln a|^{n+m-1+(2/q)[(n-1)/2]}, \quad a \in [0, a_0], \quad (6.8)$$

$$\|W_n\|_p \leq C_{n,p}^{(2)} |\ln a|^{n-3+(2/q)[(n-2)/2]}, \quad a \in [0, a_0], \quad (6.9)$$

где $f_i^{(n)}$, $g_i^{(n)}$, $C_{n,m,p}^{(1)}$, $C_{n,p}^{(2)}$ – некоторые константы, не зависящие от a , причем $f_i^{(n)}$, $g_i^{(n)} \in \mathbb{Q}$, $1/p + 1/q = 1$.

При $n = 2$ утверждение теоремы следует из (1.3), (2.3), (2.5) и лемм 4.2 и 6.1. Дальнейшее доказательство проведем по индукции. Пусть теорема выполнена при всех $n \leq K - 1$. Используя определение функций f_n и g_n , (4.1) и индукционное предположение и проводя несложные вычисления, получаем (6.6), (6.7) и (6.9) для $n = K$. Применяя неравенство Гёльдера, (6.9) и лемму 6.1, выводим неравенство

$$\left| \int_{\Pi} X W_K d\xi \right| \leq \|X\|_q \|W_K\|_p \leq C_{31} |\ln \sin a|^{K-3+(2/q)[(K-2)/q]}. \quad (6.10)$$

Выбирая в (6.10) q достаточно большим и подставляя (6.6), (6.7), (6.10) в (4.9), получаем (1.5). Равенство (6.8) вытекает из (1.5), (5.1) и (6.9).

7. Доказательство теоремы 1.2. Для доказательства теоремы 1.2 нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 7.1. *Для любых $m \geq 0$, $k \geq 1$, $n \geq 1$ выполняются неравенства*

$$\left\| \xi_2^{k+m-1} \frac{\partial^k w_n}{\partial \xi_2^k} \right\|_2 \leq C_{32} |\ln a|^{M(m,k,n)}, \quad a \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (4.11), лемму 4.2 и интегрируя по частям, выводим, что

$$\begin{aligned} - \int_{\Pi} w_n W_n d\xi &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w_n \frac{\partial w_n}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=0} d\xi_1 + \int_{\Pi} |\nabla w_n|^2 d\xi, \\ - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial w_n}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=0} d\xi_1 &= \int_{\Pi} \Delta_{\xi} w_n d\xi = 0 = \int_{\Pi} \xi_2 \Delta_{\xi} w_n d\xi = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w_n \Big|_{\xi_2=0} d\xi_1. \end{aligned}$$

Из полученных равенств, (4.2), (2.2), (6.6)–(6.9) и теоремы 6.1 следует утверждение леммы для $k = 1$, $m = 0$.

Далее будем считать, что $k + m \geq 2$. Обозначим $s = k + m - 1$. Верна оценка

$$\begin{aligned} \left\| \xi_2^s \frac{\partial^k w_n}{\partial \xi_2^k} \right\|_2^2 &\leq 2(\mathcal{M}_7 + s^2 \mathcal{M}_8^2), \\ \mathcal{M}_7 &= \left\| \nabla \left(\xi_2^s \frac{\partial^{k-1} w_n}{\partial \xi_2^{k-1}} \right) \right\|_2^2, \quad \mathcal{M}_8 = \left\| \xi_2^{s-1} \frac{\partial^{k-1} w_n}{\partial \xi_2^{k-1}} \right\|_2. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Интегрируя по частям и применяя неравенство Коши–Буняковского, выводим, что

$$\mathcal{M}_7 \leq \mathcal{M}_8 \left(2s \left\| \xi_2^s \frac{\partial^k w_n}{\partial \xi_2^k} \right\|_2 + \mathcal{M}_9 + s(s-1) \mathcal{M}_8 \right), \quad \mathcal{M}_9 = \left\| \xi_2^{s+1} \frac{\partial^{k-1} W_n}{\partial \xi_2^{k-1}} \right\|_2. \quad (7.2)$$

После подстановки (7.2) в (7.1) получим квадратное неравенство, решение которого имеет вид

$$\left\| \xi_2^s \frac{\partial^k w_n}{\partial \xi_2^k} \right\|_2 \leq 2s \mathcal{M}_8 + \sqrt{2\mathcal{M}_8 \mathcal{M}_9 + 2s(4s-1) \mathcal{M}_8^2}. \quad (7.3)$$

Используя (6.8) и применяя по индукции оценку (7.3), получаем утверждение леммы.

Обозначим $\Pi^{(R)} = \Pi \cap \{\xi : \xi_2 > R\}$.

ЛЕММА 7.2. Для любых целых $n \geq 1$, $s \geq 1$ существуют не зависящие от ε и a константы C_{33} , C_{34} , s_1 такие, что при $R = (2\varepsilon)^{-1}$ имеют место оценки

$$\|v_n\|_{L_2(\Pi^{(R)})} \leq C_{33} \varepsilon^s |\ln a|^{s_1}, \quad \|\nabla v_n\|_{L_2(\Pi^{(R)})} \leq C_{34} \varepsilon^s |\ln a|^{s_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из очевидного равенства

$$v_n(\xi) = - \int_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} v_n(\xi_1, t) dt$$

и неравенства Коши–Буняковского выводим оценку

$$|v_n|^2 \leq (2k-1)^{-1} \xi_2^{-(2k-1)} \int_0^{+\infty} \xi_2^{2k} \left| \frac{\partial v_n}{\partial \xi_2} \right|^2 d\xi_2, \quad (7.4)$$

где $k \geq 1$ – произвольное целое число. Интегрируя (7.4) и применяя лемму 7.1, получаем первое неравенство из утверждения леммы.

Легко видеть, что

$$\int_{\Pi(R)} v_n F_n d\xi = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} v_n(\xi_1, R) \frac{\partial}{\partial \xi_2} v_n(\xi_1, R) d\xi_1 - \int_{\Pi(R)} |\nabla v_n|^2 d\xi. \quad (7.5)$$

Аналогично тому, как было получено (7.4), несложно доказать оценку

$$\left| \frac{\partial v_n}{\partial \xi_2} \right|^2 \leq (2k-1)^{-1} \xi_2^{-(2k-1)} \int_0^{+\infty} \xi_2^{2k} \left| \frac{\partial^2 v_n}{\partial \xi_2^2} \right|^2 d\xi_2. \quad (7.6)$$

Из (7.4)–(7.6), лемм 4.2 и 7.1 следует второе неравенство из утверждения леммы. Лемма доказана.

Положим

$$\lambda_s^\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{n=1}^s \varepsilon^n \lambda_n, \quad \psi_{\varepsilon,s}(x) = c \mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_s^\varepsilon} r) + \chi(r) \sum_{n=1}^s \varepsilon^n v_n(\xi),$$

где $\chi(r)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная нулю при $r < 1/3$ и единице при $r > 1/2$. Пусть также $T_\varepsilon = \{r = 1, \theta = \varepsilon k, k = 0, \dots, N-1\}$, а $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(D)$.

ЛЕММА 7.3. *Для любого целого $s \geq 1$ функция $\psi_{\varepsilon,s} \in W_2^1(D) \cap C^\infty(\overline{D} \setminus T_\varepsilon)$ удовлетворяет равенству $\|\psi_{\varepsilon,s}\| = \|c \mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_0} r)\| (1 + o(1))$, $\varepsilon \rightarrow 0$, и является решением краевой задачи*

$$-\Delta \psi_{\varepsilon,s} = \lambda_s^\varepsilon \psi_{\varepsilon,s} + F_{\varepsilon,s}, \quad x \in D, \quad \psi_{\varepsilon,s} = a_{\varepsilon,s}, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \psi_{\varepsilon,s}}{\partial r} = b_{\varepsilon,s}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

где для постоянных (относительно переменной θ) $a_{\varepsilon,s}$ и $b_{\varepsilon,s}$ и функции $F_{\varepsilon,s}$ имеют место равномерные по ε и a оценки

$$|a_{\varepsilon,s}| \leq C_{35} \varepsilon^{s+1} |\ln a|^{s_1}, \quad |b_{\varepsilon,s}| \leq C_{36} \varepsilon^s |\ln a|^{s_1}, \quad \|F_{\varepsilon,s}\| \leq C_{37} \varepsilon^{s-1} |\ln a|^{s_1}, \quad (7.7)$$

$s_1, C_{35}, C_{36}, C_{37}$ – не зависящие от ε и a константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 4.2 и 7.1 непосредственно следует, что $\psi_{\varepsilon,s} \in W_2^1(D) \cap C^\infty(\overline{D} \setminus T_\varepsilon)$ и удовлетворяет равенству $\|\psi_{\varepsilon,s}\| = \|c \mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_0} r)\| (1 + o(1))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Вычисляя граничные значения функции $\psi_{\varepsilon,s}$ и учитывая (2.2) и теорему 6.1, получаем первые два неравенства из (7.7). Очевидно, что функция $\mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_s^\varepsilon} r)$ удовлетворяет уравнению $-\Delta \mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_s^\varepsilon} r) = \lambda_s^\varepsilon \mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_s^\varepsilon} r)$. Принимая во внимание это уравнение, а также (2.1) и лемму 4.1, выводим, что функция $F_{\varepsilon,s}$ имеет вид

$$F_{\varepsilon,s} = F_{\varepsilon,s}^{(1)} + F_{\varepsilon,s}^{(2)}, \quad \text{где } F_{\varepsilon,s}^{(1)}(x) = \varepsilon^{s-1} \frac{\chi(r)}{r^2} \sum_{n=0}^{s+3} \varepsilon^n V_n(\xi),$$

$$V_n = \sum_{k=s-1}^s \sum_{j=1}^2 C_{s,n,k,j} \xi_2^{s-k+j-1} \frac{\partial^j v_k}{\partial \xi_2^j} + \sum_{m,k=1}^s \sum_{j=0}^2 C_{s,n,m,k,j} \lambda_m \xi_2^j v_k,$$

$$F_{\varepsilon,s}^{(2)}(x) = \Delta \chi(r) \sum_{n=1}^s \varepsilon^n v_n(\xi) + 2 \left(\nabla_x \chi(r), \nabla_x \sum_{n=1}^s \varepsilon^n v_n(\xi) \right).$$

Здесь $C_{s,n,k,j}$, $C_{s,n,m,k,j}$ – константы, не зависящие от ε и a . Из лемм 4.2 и 7.1 и (4.3) следуют оценки $\|V_n\|_2 \leq C_{38} |\ln a|^{s_1}$, где C_{38} – не зависящая от ε и a константа. Учитывая данные оценки, получаем, что $\|F_{\varepsilon,s}^{(1)}\| \leq C_{39} \varepsilon^{s-1} |\ln a|^{s_1}$, где C_{39} – не зависящая от ε и a константа. Применяя лемму 7.3, выводим неравенство $\|F_{\varepsilon,s}^{(2)}\| \leq C_{40} \varepsilon^{s-1} |\ln a|^{s_1}$, где C_{40} – не зависящая от ε и a константа. Лемма доказана.

В [1] было показано, что при λ , близких к λ_0 , для решения задачи

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + F, \quad r < 1, \quad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \quad (7.8)$$

имеет место равномерная оценка

$$\|u_\varepsilon\| \leq \frac{C_{41}}{|\lambda - \lambda_\varepsilon|} \|F\|. \quad (7.9)$$

Подчеркнем, что оценка (7.9) будет равномерной для всех a , для которых предельной для (1.1) является краевая задача Дирихле и, в частности, если $a = a(\varepsilon)$ стремиться к нулю не более чем степенным образом.

Пусть $\psi_\varepsilon^{(s)}(x) = \psi_{\varepsilon,s}(x) - a_{\varepsilon,s} + b_{\varepsilon,s} \chi(r)(r-1)$. В силу леммы 7.2 получаем, что функция $\psi_\varepsilon^{(s)}$ является решением краевой задачи (7.8), где

$$\lambda = \lambda_\varepsilon^s, \quad \|F\| = O(\varepsilon^{s-1} |\ln a|^{s_1}), \quad \|\psi_\varepsilon^{(s)}\| = \|c\mathcal{I}_0(\sqrt{\lambda_0}r)\|(1+o(1)), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Подставляя полученные равенства в (7.9) и учитывая, что для любого s_1 функция

$$\varepsilon |\ln a(\varepsilon)|^{s_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

выводим равенство $|\lambda^\varepsilon - \lambda_\varepsilon^s| = O(\varepsilon^{s-2})$, из которого и произвола в выборе s следует утверждение теоремы 1.2. Теорема 1.2 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гадильшин Р. Р. Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 1. С. 3–19.
- [2] Friedman A., Huang C., Yong J. Effective permeability of the boundary of the domain // Comm. Partial Differential Equations. 1995. V. 20. № 1–2. P. 59–102.
- [3] Чечкин Г. А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.
- [4] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.
- [5] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Башкирский государственный педагогический университет, г. Уфа
E-mail: borisovdi@ic.bashedu.ru

Поступило
20.04.1999
Исправленный вариант
10.04.2001