Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ж. Наурызбаев, Н. Темиргалиев, О порядке discrepan-
панса сетки Смоляка, *Матем. заметки*, 2009, том 85,
выпуск 6, 947–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7661>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:35:10

О порядке дискрепанса сетки Смоляка

Н. Ж. Наурызбаев, Н. Темиргалиев

Квадратурной формулой Смоляка (см. [1]–[4]) 1-периодической по каждой из s переменных функции $f(x_1, \dots, x_s)$ называют сумму $(s = 2, 3, \dots, q = s, s + 1, \dots)$

$$\Lambda_q(f) = \sum_{\ell=0}^{s-1} (-1)^\ell \binom{s-1}{\ell} \sum_{\substack{\nu_j \in \mathbb{Z}: \nu_j \geq 0, j=1, \dots, s, \\ \nu_1 + \dots + \nu_s = q - \ell}} \frac{1}{2^{q-\ell}} \sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}} \dots \sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right). \quad (1)$$

Система узлов (без повторений, в силу 1-периодичности компоненты узлов 0 и 1 отождествлены, из них в качестве компонент оставлено только 1) из (1) образует множество

$$\{t_k\}_{k=1}^N \equiv \left\{ \left(\frac{2\mu_1 - 1}{2^{\nu_1}}, \frac{2\mu_2 - 1}{2^{\nu_2}}, \dots, \frac{2\mu_{s-1} - 1}{2^{\nu_{s-1}}}, \frac{\mu_s}{2^{\nu_s}} \right) : \right. \\ \left. 1 \leq \mu_j \leq \max\{1, 2^{\nu_j-1}\}, \nu_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, s-1, 1 \leq \mu_s \leq 2^{\nu_s}, \sum_{j=1}^s \nu_j = q \right\} \quad (2)$$

мощности $N = N_s(q) \asymp_s 2^q q^{s-1}$. Здесь и всюду ниже через $c(\dots)$ будем обозначать некоторые положительные величины, разные, вообще говоря, в различных формулах и зависящие лишь от указанных в скобках параметров. При положительном A и любом B запись $B \underset{\alpha, \beta, \dots}{\ll} A$ будет означать $|B| \leq c(\alpha, \beta, \dots)A$. При положительных A и B запись $A \underset{\alpha, \beta, \dots}{\asymp} B$ означает $A \underset{\alpha, \beta, \dots}{\ll} B \underset{\alpha, \beta, \dots}{\ll} A$.

Заметим, что в силу (2) квадратурная формула (1) записывается в виде суммы без повторяющихся узлов

$$\Lambda_q(f) = \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{Z}_0^s: \\ \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q}} \sum_{\substack{(\mu_1, \dots, \mu_s) \in \mathbb{Z}_+^s: \\ 1 \leq \mu_j \leq \max\{1, 2^{\nu_j-1}\}, j=1, \dots, s-1, \\ 1 \leq \mu_s \leq \max\{1, 2^{q-(\nu_1 + \dots + \nu_{s-1} + \nu_s)-1}\}}} \sum_{\ell=0}^{s-1} \frac{(-1)^\ell}{2^{q-\ell} \ell!} \\ \times \left(\frac{(s-1+\nu_s-\ell)!}{(s-1-\ell)!(\nu_s-\ell)!} \right)^* f\left(\frac{2\mu_1-1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{2\mu_{s-1}-1}{2^{\nu_{s-1}}}, \frac{2\mu_s-1}{2^{q-(\nu_1 + \dots + \nu_{s-1} + \nu_s)}}\right),$$

где $\mathbb{Z}_0^s$ и $\mathbb{Z}_+^s$ состоят из всех точек целочисленной s -мерной решетки $\mathbb{Z}^s$ с неотрицательными и положительными компонентами соответственно, а

$$\left(\frac{(s-1+\nu_s-\ell)!}{(s-1-\ell)!(\nu_s-\ell)!} \right)^* = \begin{cases} \frac{(s-1+\nu_s-\ell)!}{(s-1-\ell)!(\nu_s-\ell)!}, & \text{если } \nu_s \geq \ell, \\ 0, & \text{если } \nu_s < \ell. \end{cases}$$

В данной работе исследуется задача о степени равномерности распределения сетки Смоляка в единичном кубе.

Количественным показателем свойства равномерности распределения сетки $\xi_1, \dots, \xi_N$ на единичном кубе $[0, 1]^s$ является ее дискрепанс (наибольшее отклонение доли точек сетки, попадающих в произвольный параллелепипед со сторонами, параллельными сторонам единичного куба, от доли объема этого параллелепипеда по отношению к объему

единичного куба)

$$D_s(\xi_1, \dots, \xi_N) = \sup \left\{ \left| \frac{A_J}{N} - \frac{|J|}{1} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_J(\xi_k) - \int_{[0,1]^s} \chi_J(x) dx \right| : \right. \\ \left. J = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_s, b_s] \subset (0, 1]^s \right\}, \quad (3)$$

где $\chi_\Omega(x)$ – характеристическая функция множества Ω , A_J – количество точек $\xi_1, \dots, \xi_N$, содержащихся в J , $|J|$ – объем J .

Из результатов Рота [5] следует, что для всяких s , $s = 1, 2, \dots$, и N , $N = 1, 2, \dots$, всякой конечной последовательности $\xi_1, \dots, \xi_N$ из $[0, 1]^s$ и некоторого положительного $c(s)$ выполняется неравенство

$$D_s(\xi_1, \dots, \xi_N) \geq c(s) \frac{(\ln N)^{(s-1)/2}}{N}.$$

Вместе с тем, существует последовательность сеток $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ с достаточно плотным количеством узлов N такая, что для дискрепанса D_s выполняется неравенство

$$D_s(\xi_1, \dots, \xi_N) \leq \tilde{c}(s) \frac{\ln^\beta N}{N}.$$

Такие сетки называют *равномерно распределенными*.

Известно, что квадратурная формула (1) обладает хорошими аппроксимативными свойствами, близкими к оптимальным (см., например, [1]–[4] и имеющуюся в них библиографию). Вместе с тем, как оказалось, сетка Смоляка на единичном кубе распределена очень плохо. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА. Для сетки Смоляка $B_N = \{t_k\}_{k=1}^N$ из (2) имеет место двусторонняя оценка

$$D_s(\{t_k\}_{k=1}^N) \asymp \log^{-1} N, \quad q \geq s, \quad N = N_s(q) \asymp 2^q q^{s-1}. \quad (4)$$

В связи с соотношением (4) заметим, что по определению (3) дискрепанс $D_s(\{t_k\}_{k=1}^N)$ не может иметь хорошие свойства, поскольку к интегралу $\int_{[0,1]^s} \chi_J(x) dx$ применяется не квадратурная формула Смоляка (1), оптимальная в степенной шкале, а иная – с той же сеткой, но с другими, а именно, равными весами. В данной теореме, по существу, выясняется величина потери от замены весов.

Наметим основные моменты доказательства сформулированной теоремы (краткий анализ развития методов оценок дискрепансов и перспектив темы дан в [6]).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. Ниже через $|B|$ будем обозначать количество точек конечного множества B , через $[x]$ и $\{x\}$ – целую и дробную части действительного числа x .

Оценка сверху. Для любой конечной последовательности $\xi_1, \dots, \xi_N$ из $(0, 1]^s$ верны неравенства (см. [7; с. 101–104])

$$D_s^*(\xi_1, \dots, \xi_N) \leq D_s(\xi_1, \dots, \xi_N) \leq 2^s D_s^*(\xi_1, \dots, \xi_N),$$

где

$$D_s^*(\xi_1, \dots, \xi_N) = \sup_{\substack{J=(\alpha_1, 1] \times \dots \times (\alpha_s, 1] \subset (0, 1]^s, \\ 0 \leq \alpha_1 < 1, \dots, 0 \leq \alpha_s < 1}} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_J(\xi_i) - (1 - \alpha_1) \dots (1 - \alpha_s) \right|.$$

Пусть $s \geq 2$. Пусть даны числа α_j , $0 \leq \alpha_j < 1$, $j = 1, \dots, s$, целое число $q \geq s$. Положим

$$I_s \equiv I_s(\alpha) = I_s(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = (\alpha_1, 1] \times (\alpha_2, 1] \times \dots \times (\alpha_s, 1],$$

тогда

$$|B_N \cap I_s(\alpha)| = \sum_{k=1}^N \chi_{I_s(\alpha)}(t_k) \\ = \sum_{\lambda_1=0}^q \cdots \sum_{\lambda_{s-1}=0}^q \prod_{j=1}^{s-1} \left(\left[2^{q-\lambda_j-1} + \frac{1}{2} \right] - \left[\alpha_j 2^{q-\lambda_j-1} + \frac{1}{2} \right] \right) \\ \times \left[2^{q-\sum_{j=1}^{s-1} (q-\lambda_j)} - [\alpha_s 2^{q-\sum_{j=1}^{s-1} (q-\lambda_j)}] \right].$$

Отсюда, при $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$ получим точное значение количества точек $N = N_s(q)$ сетки B_N :

$$N = N_s(q) = \sum_{\lambda_1=0}^q \cdots \sum_{\lambda_{s-1}=0}^q \prod_{j=1}^{s-1} \left[2^{q-\lambda_j-1} + \frac{1}{2} \right] \left[2^{q-\sum_{l=1}^{s-1} (q-\lambda_l)} \right] \underset{s}{\asymp} 2^q q^{s-1}. \quad (5)$$

Положим

$$g_s(\alpha) = g(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = (1 - \alpha_1) \cdots (1 - \alpha_s) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_{I_s(\alpha)}(t_k)$$

и определим функцию

$$\Phi_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}) = (1 - \alpha_1) \cdots (1 - \alpha_s) \prod_{j=1}^{s-1} \left[2^{q-\lambda_j-1} + \frac{1}{2} \right] \left[2^{q-\sum_{k=1}^{s-1} (q-\lambda_k)} \right] \\ - \prod_{j=1}^{s-1} \left(\left[2^{q-\lambda_j-1} + \frac{1}{2} \right] - \left[\alpha_j 2^{q-\lambda_j-1} + \frac{1}{2} \right] \right) \\ \times \left[2^{q-\sum_{k=1}^{s-1} (q-\lambda_k)} - [\alpha_s 2^{q-\sum_{k=1}^{s-1} (q-\lambda_k)}] \right].$$

Тогда

$$Ng_s(\alpha) = \sum_{\lambda_j=0}^q \cdots \sum_{\lambda_{s-1}=0}^q \Phi_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}).$$

Сначала определяется сумма $A_0(\alpha, q)$:

$$A_0(\alpha, q) = Ng_s(\alpha) - \sum_{\lambda_1=1}^q \cdots \sum_{\lambda_{s-1}=1}^q \Phi_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1})$$

как сумма всех таких $\Phi_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1})$, что по крайней мере одно из λ_j обращается в нуль, и доказывается, что

$$|A_0(\alpha, q)| \ll_s 2^q. \quad (6)$$

Далее, определяется $A_1(\alpha, q)$:

$$A_1(\alpha, q) = (Ng_s(\alpha) - A_0(\alpha, q)) \\ - \sum_{\lambda_1=1}^{q-1} \cdots \sum_{\lambda_{s-1}=1}^{q-1} \left\langle (1 - \alpha_1) \cdots (1 - \alpha_s) \prod_{j=1}^{s-1} \left[2^{q-\lambda_j-1} + \frac{1}{2} \right] \left[2^{q-\sum_{k=1}^{s-1} (q-\lambda_k)} \right] \right. \\ \left. - \prod_{j=1}^{s-1} \left(2^{q-\lambda_j-1} - \left[\alpha_j 2^{q-\lambda_j-1} + \frac{1}{2} \right] \right) \right. \\ \left. \times \left[2^{q-\sum_{k=1}^{s-1} (q-\lambda_k)} - [\alpha_s 2^{q-\sum_{k=1}^{s-1} (q-\lambda_k)}] \right] \right\rangle$$

как сумма, составленная из всех таких слагаемых $\Phi_\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1})$, что по крайней мере одно λ_j равно q , и устанавливается, что

$$|A_1(\alpha, q)| \leq \sum_{l=1}^{s-1} \binom{s-1}{l} N_{s-1}(q) = (2^{s-1} - 1) N_{s-1}(q). \quad (7)$$

И, наконец, для $A_2(\alpha, q) = Ng_s(\alpha) - A_0(\alpha, q) - A_1(\alpha, q)$ имеем

$$|A_2(\alpha, q)| \ll_s 2^q q^{s-2} \asymp_s N_{s-1}(q). \quad (8)$$

В итоге, в силу (6), (7) и (8) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} D_s(\{t_k\}_{k=1}^N) &\leq 2^s \sup_{\alpha \in [0,1]^s} |g_s(\alpha)| \leq 2^s \sup_{\alpha \in [0,1]^s} \frac{|A_0(\alpha, q)| + |A_1(\alpha, q)| + |A_2(\alpha, q)|}{N_s(q)} \\ &\ll_s \frac{N_{s-1}(q)}{N_s(q)} \asymp_s \frac{2^q q^{s-2}}{2^q q^{s-1}} = \frac{1}{q} \asymp_s \frac{1}{\ln N}. \end{aligned}$$

Этим завершим схему доказательства теоремы в части получения оценки сверху.

Оценка снизу. Имеем

$$\sup_{\alpha \in [0,1]^s} |g_s(\alpha)| \geq \sup_{\alpha_1 \in [(2^q-1)/2^q, 1)} |g_s(\alpha_1, 0, \dots, 0)| \geq \left| \frac{N_{s-1}(q)}{N_s(q)} - (1 - \alpha_1) \cdot 1 \cdots 1 \right|,$$

откуда в силу произвольности α_1 и из (5) получаем

$$D_s(\{t_k\}_{k=1}^N) \geq \frac{N_{s-1}(q)}{N_s(q)} \asymp_s \frac{2^q q^{s-2}}{2^q q^{s-1}} = \frac{1}{q} \asymp_s \frac{1}{\ln N}.$$

Оценка снизу, тем самым и теорема, с точностью до промежуточных утверждений, доказана.

В заключение заметим, что результат данного сообщения был анонсирован в [8], где показатель $-(s-1)$ в оценке дисперсанта надлежит заменить на -1 (то же относится и к [9], где в наших обозначениях утверждается, что для сетки Смоляка выполнено неравенство $D_s(\{t_k\}_{k=1}^N) \ll (\ln N)^{-(s-1)}$).

Авторы благодарят рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Смоляк, *Докл. АН СССР*, **148**:5 (1963), 1042–1045. [2] G. W. Wasilkowski, H. Wozniakowski, *J. Complexity*, **11**:1 (1995), 1–56. [3] Н. Темиргалиев, *Докл. РАН*, **393**:5 (2003), 605–608. [4] Н. Темиргалиев, *Вестн. Евразийского нац. ун-та*, 2007, № 2, 19–51. [5] K. F. Roth, *Mathematika*, **1**:2 (1954), 73–79. [6] К. Ф. Рот, *Математика. Границы и перспективы*, ФАЗИС, М., 2005, 375–394. [7] Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер, *Равномерное распределение последовательностей*, Наука, М., 1985. [8] Н. Ж. Наурызбаев, Н. Темиргалиев, *Тезисы Международной научной конференции “Современные проблемы математики, механики, информатики”*, ТулГУ, Тула, 2005, 125–127. [9] Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян, Р. Р. Яфаева, *Тезисы докладов Всероссийской научной конференции “Современные проблемы математики, механики, информатики”*, ТулГУ, Тула, 2002, 18–20.

Н. Ж. Наурызбаев

Евразийский национальный университет, г. Астана

E-mail: nngmath@mail.ru

Поступило

09.11.2008

Н. Темиргалиев

Евразийский национальный университет, г. Астана

E-mail: ntmath@mail.ru