Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шабанов, О хроматическом числе конечных систем подмножеств, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 951–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 04:31:49

О хроматическом числе конечных систем подмножеств

Д. А. Шабанов

1. Введение и история задачи. В работе исследуется классическая экстремальная задача о хроматическом числе гиперграфа. Сначала напомним основные определения. *Гиперграфом* называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ есть некоторое конечное множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ есть совокупность каких-то подмножеств множества V , и эти подмножества называются *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n -равномерным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. *Хроматическим числом* гиперграфа H называется минимальное число цветов, в которые можно так покрасить множество $V(H)$ вершин гиперграфа, что все ребра в $E(H)$ будут неоднородными. Хроматическое число гиперграфа H обозначается $\chi(H)$. Через $m(n, r)$ обозначается минимально возможное количество ребер в n -равномерном гиперграфе с хроматическим числом, большим r , т.е.

$$m(n, r) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-равномерный гиперграф, } \chi(H) > r\}.$$

Задача о нахождении величины $m(n, 2)$ была впервые поставлена в 1961 г. Эрдешем и Хайналом (см. [1]). Позднее Эрдеш (см. [2], [3]) с помощью простого вероятностного метода доказал первые нетривиальные оценки данной величины:

$$2^{n-1} \leq m(n, 2) \leq (1 + o(1)) \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n.$$

Похожие оценки верны и для произвольного r . Применяя метод Эрдеша, несложно показать (см. [4]), что для любых $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполнены неравенства

$$r^{n-1} \leq m(n, r) \leq 20n^2 r^n \ln r. \quad (1)$$

Нижняя оценка величины $m(n, 2)$ была улучшена Беком (см. [5]). Он показал, что для любого $\delta > 0$ существует такая константа $C(\delta)$, что $m(n, 2) \geq C(\delta)n^{1/3-\delta}2^n$. Спенсер (см. [6]) предложил более простой вариант доказательства Бека, основанный на применении рандомизированного алгоритма перекраски вершин гиперграфа. Этот алгоритм был усовершенствован Радхакришнаном и Сринивазаном (см. [7]). Ими была получена наилучшая из известных на сегодняшний день нижняя оценка $m(n, 2)$:

$$m(n, 2) \geq 0.1 \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} 2^n. \quad (2)$$

Дальнейшие исследования поведения величины $m(n, r)$ были проведены Алоном [8]. Он показал, что для произвольных n и r выполняется неравенство

$$m(n, r) > (n-1) \left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor^{n-1}. \quad (3)$$

В случае же, когда число цветов r существенно превышает количество вершин в ребре n (т.е. $r/n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$), Алон доказал соотношение

$$m(n, r) = O\left(C_{r(n-1)+1}^n n^{3/2} \ln n \left(\frac{3}{4}\right)^n\right),$$

которое улучшает верхнюю оценку $m(n, r)$ из (1), если $\ln r \gg (3e/4)^n (\ln n/n)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-691.2008.1).

Сильная нижняя асимптотическая оценка была получена Косточкой (см. [9]), использовавшим многоступенчатый аналог рандомизированного алгоритма Спенсера–Радхакришнана–Сринивазана. Согласно данному результату в случае r , не превосходящего $\sqrt{(1/8) \ln(\ln n/2)}$, величина $m(n, r)$ оценивается снизу следующим образом:

$$m(n, r) \geq r^n \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{m/(m+1)} e^{-4r^2}, \quad (4)$$

где m – произвольное целое число с условием $2^m \leq r$.

2. Формулировка результата. Основным результатом работы является новая нижняя оценка классической величины $m(n, r)$. Точную формулировку дает теорема 1.

ТЕОРЕМА 1. Для всех натуральных $n \geq 2$, $r \geq 2$ выполняется неравенство

$$m(n, r) \geq (\sqrt{3} - 1) \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} r^{n-1}. \quad (5)$$

Сравним результат теоремы 1 с полученными ранее оценками (1)–(4).

1. Ясно, что оценка (5) улучшает нижнюю оценку из (1) при всех значениях n и r .
2. Из работы Радхакришнана и Сринивазана [7] вытекает чуть лучший результат, нежели (2), который совпадает в случае $r = 2$ с нашей оценкой (5) из теоремы 1.
3. Результат Алона (3) лучше (5) только для больших значений r . Действительно, если $r \gg n$, то

$$(n-1) \left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor^{n-1} \sim \frac{1}{e} r^n,$$

что больше правой части соотношения (5), по крайней мере, в $\sqrt{n}$ раз. Если же $r < n$, то

$$(n-1) \left\lceil \frac{r}{n} \right\rceil \left\lfloor \frac{n-1}{n} r \right\rfloor^{n-1} = (n-1)(r-1)^{n-1}.$$

Данное выражение меньше правой части оценки (5) при r , удовлетворяющем условию

$$r \leq \frac{2(n-1)}{\ln(n \ln n) - 2 \ln(\sqrt{3} - 1)} \sim \frac{2n}{\ln n}.$$

4. Оценка (4) Косточки лучше полученной нами, но она выполняется лишь для $r = O(\sqrt{\ln \ln n})$, в то время как (5) верна для всех возможных значений n и r .

Подведем итоги. Наша оценка (5) улучшает все ранее известные результаты, если величина r находится в следующем промежутке

$$\sqrt{\frac{1}{8} \ln \left(\ln \frac{n}{2} \right)} \leq r \leq \frac{2(n-1)}{\ln(n \ln n) - 2 \ln(\sqrt{3} - 1)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что константа $\sqrt{3} - 1$ в неравенстве (5) не является оптимальной асимптотически. Для достаточно больших n ее можно заменить на большую величину.

3. Метод случайной раскраски. Доказательство теоремы 1 основано на применении метода случайной раскраски вершин гиперграфа, который обобщает алгоритм Спенсера–Радхакришнана–Сринивазана на случай произвольного числа цветов r . Для обоснования неравенства (5) достаточно показать, что для любого n -равномерного гиперграфа $H = (V, E)$, имеющего менее $(\sqrt{3} - 1) \sqrt{n / \ln n} r^{n-1}$ ребер, выполнено $\chi(H) \leq r$. По определению хроматическое число гиперграфа не превосходит r , если существует такая r -цветная раскраска множества вершин, в которой все ребра гиперграфа будут неоднотонными. Подобные раскраски гиперграфа называются *правильными*.

Итак, пусть дан n -равномерный гиперграф $H = (V, E)$ с m ребрами (т.е. $|E| = m$). Без ограничения общности можно считать, что $V = \{1, 2, 3, \dots, w\}$. Мы построим некоторую случайную r -цветную раскраску множества V и оценим вероятность того, что эта раскраска является правильной для H .

Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ задан следующий набор независимых в совокупности случайных функций:

- 1) $\xi_1, \dots, \xi_w$ – одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \dots, r$ с равной вероятностью $1/r$;
- 2) $\eta_1, \dots, \eta_w$ – одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, 2, \dots, r$ с одной и той же вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1 - rp$;
- 3) $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_w)$ – случайная перестановка множества V (случайная нумерация вершин гиперграфа H), имеющая равномерное распределение на группе перестановок S_w , т.е. для любой $\tilde{\sigma} \in S_w$

$$P(\sigma = \tilde{\sigma}) = \frac{1}{w!}.$$

Существование такого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ очевидно. Рассмотрим следующий (рандомизированный) алгоритм раскраски вершин гиперграфа, состоящий из двух этапов.

Первый этап. Покрасим вершину $i \in V$ в цвет, соответствующий значению случайной величины ξ_i (т.е. если $\xi_i = j$, то вершину i красим в цвет j). Полученную таким образом раскраску множества V назовем *первой раскраской*. Если в первой раскраске образовались одноцветные ребра, то объединим вершины всех таких ребер в множество *опасных вершин*.

Второй этап. Будем пытаться перекрасить опасные вершины. Рассмотрим их по очереди, согласно случайной нумерации σ . Вершину i будем считать *по-прежнему опасной*, если все еще есть ребро, ее содержащее, являвшееся одноцветным в первой раскраске и ни одна вершина которого не поменяла цвет. В случае, когда i является по-прежнему опасной, рассмотрим случайную величину η_i . Если $\eta_i = 0$, то оставляем вершине изначальный цвет ξ_i , в противном случае покрасим i в цвет, соответствующий значению η_i . Опасные вершины, не являющиеся по-прежнему опасными, перекраске не подвергаются. После рассмотрения всех опасных вершин мы получаем *итоговую раскраску*.

Обозначим через $\mathcal{F}$ событие, заключающееся в том, что в итоговой раскраске есть одноцветные ребра. Имеет место следующая оценка вероятности события $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 2. Введем обозначение $q = (r - 1)p$. Тогда для произвольного n -равномерного гиперграфа H с m ребрами выполнено неравенство

$$P(\mathcal{F}) \leq mr^{1-n}(1 - q)^n + m^2 r^{2-2n} q. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2 во многом схоже с доказательством подобной оценки в случае $r = 2$ из работы Радхакришнана–Сринивазана [7] (также см. теорему 3.5.1 из [10]).

Далее мы выведем утверждение теоремы 1 из неравенства (7).

4. Доказательство теоремы 1. Воспользуемся теоремой 2. Из построения случайной раскраски для произвольного n -равномерного гиперграфа H (см. п. 3) следует, что если вероятность события $\mathcal{F}$ строго меньше единицы, то для H существует правильная r -цветная раскраска. Таким образом, если для некоторых $m > 0$ и $q \leq (r - 1)/r$ выполняется неравенство

$$mr^{1-n}(1 - q)^n + m^2 r^{2-2n} q < 1, \quad (7)$$

тогда $m(n, r) > m$.

Произведем подбор параметров. Положим

$$q = \frac{\ln(n/\ln n)}{2n}, \quad m = c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} r^{n-1},$$

где c – произвольная положительная константа, меньшая $\sqrt{3} - 1$. Тогда

$$mr^{1-n}(1-q)^n + m^2 r^{2-2n} q \leq mr^{1-n} e^{-qn} + m^2 r^{2-2n} \frac{\ln n}{2n} = c + \frac{1}{2} c^2 < 1.$$

Следовательно, при таком подборе параметров выполнено условие (7), и, значит, для любого $c < \sqrt{3} - 1$ выполнена оценка

$$m(n, r) \geq c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} r^{n-1}.$$

Но если данное неравенство верно для всех $c < \sqrt{3} - 1$, то оно же верно и для $c = \sqrt{3} - 1$. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, A. Hajnal, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **12**:1–2 (1961), 87–123. [2] P. Erdős, *Nordisk Mat. Tidskr.*, **11** (1963), 5–10. [3] P. Erdős, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15**:3–4 (1964), 445–447. [4] A. Kostochka, *More Sets, Graphs and Numbers*, Bolyai Soc. Math. Stud., **15**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 175–197. [5] J. Beck, *Discrete Math.*, **24**:2 (1978), 127–137. [6] J. Spencer, *J. Combin. Theory Ser. A*, **30**:1 (1981), 112–113. [7] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, *Random Structures Algorithms*, **16**:1 (2000), 4–32. [8] N. Alon, *Graphs Combin.*, **1** (1985), 387–389. [9] A. Kostochka, *Random Structures Algorithms*, **24**:1 (2004), 1–10. [10] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, БИНОМ. Лаборатория знаний, М., 2007.

Д. А. Шабанов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

08.09.2008