Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Васюков, Меры ортогональности для ортогональных матричных многочленов с периодическими коэффициентами рекуррентных соотношений, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 6, 944–946

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:28:28

Меры ортогональности для ортогональных матричных многочленов с периодическими коэффициентами рекуррентных соотношений

Р. Р. Васюков

Рассмотрим положительно определенную матричную меру W размерности $N \times N$ (для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$ $W(A)$ – это положительно полуопределенная числовая матрица), имеющую моменты любого порядка, т.е. матричный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} t^n dW(t)$$

существует для любого $n \geq 0$.

Как известно (см., например, [1]), с матричной мерой $W(A)$ связана последовательность матричных ортогональных многочленов P_n той же размерности, удовлетворяющих условиям

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(t) dW(t) P_m^*(t) = \delta_{n,m} I, \quad n, m \geq 0.$$

Здесь $P_n(t)$ – это матричный многочлен степени n с невырожденным старшим коэффициентом, $P_m^*(t)$ – сопряженный к $P_m(t)$ матричный многочлен, I – единичная матрица соответствующей размерности.

Как и в скалярном случае, последовательность ортонормальных матричных многочленов удовлетворяет трехчленным рекуррентным соотношениям [2]

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \quad n \geq 0, \quad (1)$$

где $P_{-1}(t) = \theta$, $P_0(t) \in \mathbb{C}^{N \times N}$, A_n – невырожденные матрицы, B_n – эрмитовы матрицы, θ обозначает нулевую матрицу.

Матричным аналогом последовательности многочленов Чебышева второго рода [3] называется последовательность ортонормальных матричных многочленов $U_n^{A,B}$, определяемая рекуррентными соотношениями (1) с $A_n = A$, $B_n = B$ и начальными условиями $U_{-1}^{A,B}(t) = \theta$, $U_0^{A,B}(t) = I$.

В работе [1] была найдена мера $W^{A,B}(x)$, относительно которой ортонормальны многочлены $U_n^{A,B}$. В случае положительно определенной матрицы A мера $W^{A,B}(x)$ имеет следующий вид:

$$dW^{A,B}(x) = \frac{1}{2\pi} A^{-1/2} U(x) (D^+(x))^{1/2} U^*(x) A^{-1/2} dx.$$

Здесь матрицы $U(x)$ и $D^+(x)$ определяются диагонализацией матричного преобразования

$$H^{A,B}(z) = A^{-1/2} (zI - B) A^{-1} (zI - B) A^{-1/2} - 4I.$$

Если $H^{A,B}(x) = U(x) D(x) U^*(x)$, где $U(x) U^*(x) = I$, а $D(x)$ – диагональная матрица с элементами $d_{i,i}(x)$, $i = 1, \dots, N$, то $D^+(x)$ – диагональная матрица с элементами

$$d_{i,i}^+(x) = \max\{d_{i,i}(x), 0\}.$$

Носитель меры $W^{A,B}(x)$ – это множество действительных чисел

$$\{x \in \mathbb{R} : \sigma(A^{-1/2}(xI - B)A^{-1/2}) \cap [-2; 2] \neq \emptyset\},$$

где $\sigma(A)$ – множество собственных чисел матрицы A .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00167).

В данной работе решена задача восстановления меры в случае k -периодической последовательности коэффициентов, коммутирующих между собой, т.е. получен матричный аналог теоремы Геронимуса [4]. Оказалось, что здесь носитель меры ортогональности является объединением не более чем kN ограниченных невырожденных непересекающихся отрезков.

Матричные ортогональные многочлены $\hat{P}_n(t)$ с единичным старшим коэффициентом удовлетворяют рекуррентному соотношению [3]

$$\hat{P}_{n+1}(t) = (tI - B_{n+1})\hat{P}_n(t) - A_{n+1}\hat{P}_{n-1}(t), \quad n \geq 0, \quad (2)$$

где A_n – положительно определенные матрицы, B_n эрмитовы, $\hat{P}_{-1}(t) = \theta$, $\hat{P}_0(t) = I$.

Многочлены $R_n(x)$, определяемые соотношением

$$R_n(t) = (tI - B_{n+1})R_{n-1}(t) - A_{n+1}R_{n-2}(t), \quad n \geq 1,$$

где $R_{-2}(t) = \theta$, $R_{-1}(t) = I$, называются *многочленами 2-го рода* для соотношения (2).

Имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть в (2) выполняются следующие условия:

- 1) последовательности коэффициентов A_n , B_n периодические с некоторым периодом k ,
- 2) матрицы, составляющие период $\{A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_k\}$, коммутируют между собой.

Тогда матричная мера W , относительно которой ортогональны матричные многочлены, удовлетворяющие соотношению (2), обладает следующими свойствами:

- 1) $dW(x) = P(x) dx$,

$$P(x) = (2\tilde{P}_{k-1}(x))^{-1}(4\Lambda_A - (\tilde{P}_k(x) - \tilde{R}_{k-2}(x))^2)^{1/2},$$

где $\tilde{P}_n(x) = UP_n(x)$, $\tilde{R}_n(x) = UR_n(x)$, U – унитарная матрица такая, что для любого $i = 1, \dots, k$ справедливы представления $UA_iU^* = \Lambda_{A_i}$, $UB_iU^* = \Lambda_{B_i}$, Λ_{A_i} , Λ_{B_i} – диагональные матрицы, $\Lambda_A = \prod_{i=1}^k \Lambda_{A_i}$;

- 2) носитель меры W представляет собой объединение не более чем kN ограниченных невырожденных непересекающихся отрезков, границами которых являются корни определителя матричного многочлена $4\Lambda_A - (\tilde{P}_k(x) - \tilde{R}_{k-2}(x))^2$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. Рассмотрим матричную непрерывную дробь следующего вида:

$$K(z) = \frac{A_1}{zI - B_1 - \frac{A_2}{zI - B_2 - \dots}},$$

где деление эквивалентно умножению слева на обратную к знаменателю матрицу. Из теоремы Маркова [2] для матричных ортогональных многочленов следует, что эта непрерывная дробь в каждой точке z равна преобразованию Гильберта меры W , т.е.

$$K(z) = \int_C \frac{dW(t)}{z - t}.$$

Из алгебры [5] известно, что коммутирующие между собой матрицы одновременно приводятся к диагональному виду (так как матрицы B_n эрмитовы, то они приводятся некоторым унитарным преобразованием к диагональному виду). Отсюда и следует существование унитарной матрицы U из условия теоремы. Также из положительной определенности матриц A_n и эрмитовости матриц B_n следует то, что матрицы Λ_{A_i} , Λ_{B_i} вещественны [5].

После преобразования матричных многочленов по формуле $\tilde{P}_n(t) = UP_n(t)$, $\tilde{R}_n(t) = UR_n(t)$, получим рекуррентное соотношение с коэффициентами Λ_{A_i} , Λ_{B_i} . При этом дробь $K(z)$ преобразуется в унитарно подобную ей дробь $\tilde{K}(z) = UK(z)U^*$. Для непосредственного вычисления дроби $\tilde{K}(z)$ мы используем свойство ее периодичности

$$\tilde{K}(z) = \frac{\Lambda_{A_1}}{zI - \Lambda_{B_1} - \frac{\cdots}{zI - \Lambda_{B_k} - \tilde{K}(z)}}.$$

Отсюда по свойствам непрерывных дробей получаем уравнение для $\tilde{K}(z)$

$$(\tilde{K}(z))^2 \tilde{P}_{k-1}(z) - \tilde{K}(z)(\tilde{P}_k(z) + \tilde{R}_{k-2}(z)) + \tilde{R}_{k-1} = \theta.$$

В точках, где матрица $\tilde{P}_{k-1}(z)$ обратима, имеем

$$\tilde{K}(z) = \frac{\tilde{P}_k(z) + \tilde{R}_{k-2}(z) - (-4\Lambda_A + (\tilde{P}_k(x) - \tilde{R}_{k-2}(x))^2)^{1/2}}{\tilde{P}_{k-1}(z)}.$$

Знак в числителе перед корнем выбирается из соображения сходимости непрерывной дроби $\tilde{K}(z)$.

Далее, используя формулу обращения для преобразования Гильберта [3], находим носитель меры W .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. J. Duran, *J. Approx. Theory*, **100**:2 (1999), 304–344. [2] A. J. Duran, *Canad. J. Math.*, **48**:6 (1996), 1180–1195. [3] M. J. Zygmunt, *Linear Algebra Appl.*, **340**:1–3 (2002), 155–168. [4] Я. Л. Геронимус, *Записки научно-исследовательского ин-та матем., мех. и Харьковск. матем. об-ва*, **15**:2 (1938), 57–64. [5] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.

Р. Р. Васюков

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: rvasyukov@mail.ru

Поступило
09.11.2008