Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, О приближении наимпростейшими дробями, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 553–559

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm767>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 10:33:55

УДК 517.53

О ПРИБЛИЖЕНИИ НАИПРОСТЕЙШИМИ ДРОБЯМИ

В. И. Данченко, Д. Я. Данченко

В заметке рассматриваются некоторые задачи о равномерной аппроксимации на компактах комплексной плоскости комплекснозначных непрерывных функций $f(z)$ наимпростейшими дробями вида $\Theta_n(z) = \sum_{j=1}^n 1/(z - z_j)$. Показано, например, что наилучшие приближения функции f дробями Θ_n имеют тот же порядок малости, что и наилучшие приближения многочленами степени $\leq n$.

Библиография: 7 названий.

1. В заметке рассматриваются некоторые задачи аппроксимации на множествах K расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ комплекснозначных функций f наимпростейшими дробями (этот термин предложен Долженко) вида

$$\Theta_n(z) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - z_j} = \frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)},$$

где $Q_n(z)$ – некоторый многочлен степени n .

Пусть K – произвольное множество на $\overline{\mathbb{C}}$. Для определенной на K функции f положим

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Через $\rho(\Theta_n, K)$ будем обозначать евклидово расстояние между множеством $\{z_j\}$ полюсов функции Θ_n и K . При $n = 1, 2, \dots$, $0 < r \leq \infty$ для функции $f \in C(K)$ определим наилучшее приближение

$$\Psi_n(f; K; r) = \inf \{ \|f - \Theta_n\|_K : \deg \Theta_n \leq n, \rho(\Theta_n, K) \leq r \}.$$

Указанная аппроксимация в ряде случаев тесно связана с хорошо известной проблемой Горина (см. [1], [2]) о скорости убывания наименьших расстояний

$$\rho_n(K) = \inf \{ \rho(\Theta_n, K) : \|\Theta_n\|_K \leq 1 \}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00119 и № 00-01-00342.

Так, для случая прямой $K = \mathbb{R}^1$ в [3] показано, что $\rho_n(\mathbb{R}^1) = \Psi_n(0; \mathbb{R}^1; 1) \asymp \ln \ln n / \ln n$ (первое равенство, очевидно, следует из того, что при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ функция $\lambda \Theta_n(\lambda z)$ также является наипростейшей дробью от z). Другие результаты по исследованию величин $\rho_n(K)$, $\Psi_n(f; K; r)$ ($0 < r \leq \infty$) для различных множеств $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ см. в работах Горина, Николаева, Гельфонда, Кацнельсона, В. И. Данченко и Д. Я. Данченко, Косухина (см., например, [1]–[7]).

В общей ситуации задачу аппроксимации на K функций $f \in C(K)$ можно ставить как в случае дробей Θ_n со свободными полюсами, так и в случае каких-либо ограничений на их расположение. В первом случае дополнительно возникает задача о связи величин $\rho(\Theta_n, K)$ и $\|f - \Theta_n\|_K$. В [3], [6] показано, например, что если $K = \partial\Delta$ – единичная окружность, то из $\Psi_n(0; \partial\Delta; r) \leq M$ вытекает, что $r \geq \ln n / (3n)$ при $M \geq 1$ и $r \geq \text{const} \cdot M^{-1/n}$ при $M \leq 1$ ($n \geq n_0$). Отметим, что аппроксимацию дробями $\Theta_n(z)$ можно использовать в теории потенциала при распределении зарядов, имеющих на K заданный суммарный комплексный потенциал f , в приближенных вычислениях (см. неравенства (3), (4) и т.д. Кроме того, оценки расстояний $\rho_n(K)$ играют немаловажную роль в вопросах устойчивости динамических систем.

2. Скажем, что некоторое множество $G \subset \mathbb{C}$ принадлежит классу Ω_r , $r > 0$, если оно содержит точку $z_0 = 0$ и любую точку $z \in G$ можно соединить с z_0 лежащей на G спрямляемой кривой длины $\leq r$. Однозначную аналитическую на множестве $G \in \Omega_r$ (т.е. в некоторой окрестности множества G) функцию f будем называть *допустимой на G* , если $\|f\|_G \leq 1$ и интеграл

$$\alpha(f; z) := \int_0^z f(t) dt,$$

взятый по всем кривым, лежащим в G и имеющим концевые точки 0 и z , определяет также однозначную аналитическую функцию от z . Положим

$$q_{1,n}(f; z) = \sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j(f; z)}{j!}, \quad q_{2,n}(f; z) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{\alpha^j(f; z)}{j!}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $r > 0$ и $G \in \Omega_r$. Пусть $f(z)$ – отличная от нуля допустимая на G функция. Тогда при $s = 1, 2$ и $\theta_{s,n}(f; z) := q'_{s,n}(f; z)/q_{s,n}(f; z)$ при $n \geq 5r$ имеем

$$\|f + (-1)^s \theta_{s,n}(f; z)\|_G \leq \frac{2e^r r^n}{n!}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $s = 1$. Очевидно, $|\alpha(f; z)| \leq r$ на G . Далее, для функции $q_{1,n}(f; z)$ находим

$$\delta(z) = f(z) - \theta_{1,n}(f; z) = \frac{1}{n!} \frac{f(z)}{q_{1,n}(f; z)} \alpha^n(f; z). \quad (2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |q_{1,n}(f; z)| &\geq e^{\text{Re } \alpha(f; z)} - \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\alpha^j(f; z)}{j!} \right| \geq e^{-r} - \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{r}{n+2} e^r \right) \\ &\geq e^{-r} - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{n+2+r}{n+2} \left(\frac{re}{n+1} \right)^{n+1} e^r \geq \frac{1}{2} e^{-r} \end{aligned}$$

при $z \in G$ и $n \geq 5r$. Отсюда получается нужная оценка сверху для $|\delta(z)|$ на G . При $s = 2$ доказательство аналогично.

В [6] авторами доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r > 0$ и $G \in \Omega_r$. Далее, пусть $P(z)$ – отличный от тождественного нуля многочлен степени $N \geq 0$ и $\|P\|_G \leq 1$. Тогда при любых натуральных $n \geq 5r$ имеем

$$\Psi_{(N+1)n}(P; G; \infty) \leq e^r \left(\frac{er}{n} \right)^n.$$

Точнее, при $s = 1, 2$ существует наипростейшая дробь $\Theta(z) = Q'(z)/Q(z)$ степени $(N+1)n$ такая, что

$$\|P + (-1)^s \Theta\|_G \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^r n^{-1/2} \left(\frac{er}{n} \right)^n. \quad (3)$$

Теорема 1 есть непосредственное следствие леммы 1 при $f = P$ и $q_s(f; z) = Q(z)$. Аналогично из леммы 1 получается

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r > 0$, $G \in \Omega_r$, $R(z)$ – отличная от тождественного нуля рациональная функция степени $N \geq 0$, $\|R\|_G \leq 1$. Пусть, кроме того, R имеет однозначный интеграл на $\mathbb{C}$ (и, в частности, является допустимой функцией). Тогда при любых натуральных $n \geq 5r$ существуют наипростейшие дроби $\Theta_1(z)$ и $\Theta_2(z)$ степеней $\leq (N+1)n$ такие, что

$$\|R + \Theta_1 - \Theta_2\|_G \leq \frac{2e^r r^n}{n!}.$$

На основании теоремы Мергеляна и теоремы 1 получается

ТЕОРЕМА 3. Пусть K – компакт, имеющий связное дополнение на $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда любая функция f , непрерывная на K и аналитическая во внутренних точках K , может быть равномерно приближена с любой точностью на K наипростейшими дробями вида $\Theta = Q'/Q$, где Q – многочлен. Кроме того, если $K \in \Omega_r$ ($r > 0$), $E_n = E_n(f, K)$ – наилучшее равномерное приближение на K функции $f \in C(K)$ множеством многочленов степени $\leq n$ и $0 < E_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), то

$$\Psi_{n \ln(1/E_n)}(f; K; \infty) < 2E_n, \quad n \geq n_0(r). \quad (4)$$

В частности, если f аналитична на континууме K со связным дополнением, то по теореме Бернштейна–Уолша имеем $E_n < \lambda^n$ ($n \geq n_1(\lambda, f)$) с некоторым $\lambda = \lambda(f) \in (0, 1)$ и из (4) находим

$$\Psi_n(f; K; \infty) < C \lambda_1^{\sqrt{n}}, \quad \lambda_1 = \lambda^{1/\sqrt{-\ln \lambda}}, \quad n \geq n_2(r, \lambda, f).$$

Другие обратные теоремы, основанные на идеях работы [6], см. в работе Косухина [7].

Возникает задача о возможности аналогичной аппроксимации специальными дробями вида

$$\Theta(V, \{z_j\}; z) = \sum_{j=1}^n (z - z_j)^{-1} V(z_j),$$

где вес V зависит лишь от z_j . К примеру, если $V(z) = 1/z$, то теорема 3 остается справедливой и для дробей $\Theta(V, \{z_j\}; z)$, поскольку в этом случае $z\Theta(V, \{z_j\}; z) = \Theta(0) + \Theta(z)$, где $\Theta = Q'/Q$, $Q(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$. Если же $V(z) = z$, то аппроксимация невозможна даже в простейшем случае $f(z) = i$ и $K = \{z : |z| \leq 1\}$ (поскольку на окружности ∂K всегда найдется точка z_0 , в которой значение $\Theta(V, \{z_j\}; z_0)$ вещественно; например, оно вещественно в каждой точке z_0 максимума модуля многочлена $Q(z)$).

3. Как видно из (2), если $P(0) \neq 0$, то дробь $\Theta(z)$, $\deg \Theta \leq (N+1)n$, интерполирует многочлен P в точке $z = 0$ с кратностью n . Можно построить наипростейшую дробь Θ (дробь Паде), интерполирующую P в нуле с той же кратностью n , но при этом имеющую степень $\deg \Theta = n$. Точнее, имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для произвольного набора чисел $\{a_\nu\}$, $\nu = 0, 1, \dots$, при каждом натуральном n существует дробь $\Theta_n = Q'_n/Q_n$ степени n такая, что

$$\Theta_n^{(\nu)}(0) = a_\nu, \quad \nu = \overline{0, n-1}. \quad (5)$$

Кроме того, соответствующие многочлены Q_n могут быть записаны в виде

$$Q_1(z) = 1 + a_0 z, \quad \dots, \quad Q_{n+1}(z) = Q_n(z) + \beta_{n+1} z^{n+1}$$

с некоторыми константами β_{n+1} .

Действительно, пусть среди чисел $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ есть отличные от нуля и $z_1, \dots, z_n$ — корни искомого многочлена $Q_n(z) = 1 + \beta_1 z + \dots + \beta_n z^n$. Из (5) найдем моменты (степенные суммы)

$$S_\nu = S_\nu(Q_n) = \sum_{j=1}^n z_j^{-\nu} = -\frac{\Theta_n^{(\nu-1)}(0)}{\nu!} = -\frac{a_{\nu-1}}{\nu!}, \quad \nu = \overline{1, n}.$$

Коэффициенты β_μ многочлена $P(z) = z^n Q_n(1/z) = z^n + \beta_1 z^{n-1} + \dots + \beta_n$ совпадают с точностью до знака с элементарными симметрическими многочленами от переменных z_j^{-1} и выражаются рекуррентно через указанные моменты по формуле Ньютона

$$\beta_1 = -S_1, \quad \beta_\mu = -\mu^{-1} \left(S_\mu + \sum_{j=1}^{\mu-1} S_{\mu-j} \beta_j \right), \quad \mu = \overline{2, n}. \quad (6)$$

Итак, $Q(z) = z^n P(1/z)$. Из построения видно, что все коэффициенты многочленов Q_n и Q_{n+1} с одинаковыми номерами совпадают.

4. Пусть моменты S_ν вещественны и $S_\nu \leq 1$ при $\nu = \overline{1, n}$. Покажем, что все корни $\{z_j\}$ многочлена Q лежат вне прямолинейного отрезка $[0, 1]$. Легко видеть, что коэффициенты многочлена Q являются однородными функциями от переменных $S_1, \dots, S_n$; точнее, $\beta_\mu = \beta_\mu(S_1, \dots, S_n) = \sum A(k, p; \dots; m, q) S_k^p \dots S_m^q$ с некоторыми действительными коэффициентами $A(k, p; \dots; m, q)$, где суммирование распространяется на все те индексы и степени, для которых $kp + \dots + mq = \mu$. Кроме того, если $S_k \leq 0$ при всех

$k = \overline{1, n}$, то по индукции из (6) получаются неравенства $\beta_\mu \geq 0$ при всех $\mu = \overline{1, n}$. При $\mu = \overline{1, n}$ положим

$$\beta_\mu^{(1)} = \beta_\mu(S_1 - 1, \dots, S_n - 1) = \sum A(k, p; \dots; m, q)(S_l - 1)^p \cdots (S_m - 1)^q.$$

Легко проверяется (по индукции), что из (6) вытекают рекуррентные соотношения $\beta_\mu^{(1)} - \beta_{\mu-1}^{(1)} = \beta_\mu$, где $\mu = \overline{1, n}$ и $\beta_0^{(1)} = 1$. Отсюда с учетом предположения в начале п. 4 имеем

$$Q(z) = (1 - z) \sum_{\mu=0}^{n-1} \beta_\mu^{(1)} z^\mu + \beta_n^{(1)} z^n,$$

где все коэффициенты $\beta_\mu^{(1)}$ неотрицательны. Итак, на $[0, 1]$ нет корней многочлена Q .

ЛЕММА 2. Пусть $Q_n(z) = 1 + \beta_1 z + \dots + \beta_n z^n$ — многочлен с корнями $z_1, \dots, z_n$ и модули всех моментов

$$S_\nu = \sum_{j=1}^n z_j^{-\nu}, \quad \nu = \overline{1, n},$$

не превосходят $1/2$. Тогда все корни $\{z_j\}$ лежат вне единичного круга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из существования корней многочлена $Q(z)$ на некотором фиксированном радиальном отрезке $\rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \rho \leq 1$, следовало бы существование корней многочлена $q(\zeta) = Q(\zeta e^{i\varphi})\overline{Q}(\zeta e^{i\varphi})$ на отрезке $[0, 1]$. Но многочлен q , очевидно, удовлетворяет предположениям начала п. 4 и не имеет корней на $[0, 1]$.

5. Пусть

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{a_\mu z^\mu}{\mu!}$$

— регулярная в окрестности точки $z = 0$ функция. Тогда из (6) и из формул Ньютона

$$S_\mu + \sum_{j=1}^n S_{\mu-j} \beta_j = 0, \quad \mu > n,$$

получаем соотношения, определяющие последовательность многочленов

$$Q_n = 1 + \sum_{\mu=1}^n \beta_\mu z^\mu$$

Паде (см. (5)) для функции f , а также моменты $S_\mu = S_\mu(Q_n)$ с номерами $\mu > n$:

$$\left(1 + \sum_{\mu=1}^n \beta_\mu z^\mu\right) \left(1 - \sum_{\mu=1}^n \frac{a_\mu}{\mu!} z^\mu + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} S_\mu z^\mu\right) = 1 - \beta_2 z^2 - \dots - (n-1)\beta_n z^n.$$

Отсюда находим

$$Q_2(z) = Q_1(z) + \frac{1}{2}(a_1 + a_0^2)z^2, \quad Q_3(z) = Q_2(z) + \frac{1}{6}(2a_2 + 3a_0a_1 + a_0^3)z^3$$

и т.д.

В случае простых различных узлов интерполяции $v_\nu, \nu = \overline{1, n}$, для определения многочлена $Q(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_0$ условия интерполяции $\Theta(v_\nu) = a_\nu$ записываются в виде системы линейных уравнений относительно неизвестных α_j :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(j - a_\nu v_\nu \right) v_\nu^{j-1} \alpha_j = v_\nu^{n-1} (-n + a_\nu v_\nu), \quad \nu = \overline{0, n-1}.$$

На практике при интерполяции некоторых аналитических функций f вопрос о разрешимости системы легко решается, если интерполяцию производить на линии уровня $|v_\nu f(v_\nu)| = \text{const}$.

6. Рассмотрим вопрос об аппроксимации регулярной в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функции

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(f) z^\nu$$

с условием $|\alpha_\nu(f)| \leq M < \infty$ ее наимпростейшими дробями Паде $\Theta_n(z) = Q'_n(z)/Q_n(z)$, построенными в п. 3. Отметим, к примеру, что указанному ограничению удовлетворяют функции класса Харди $H^1(\Delta)$ с нормировкой $\|f\|_{H^1(\Delta)} \leq M$.

Рассмотрим функцию $F(z) = f(z)/(2M)$. Запишем условия интерполяции: $\nu! S_{\nu+1} = -\Theta_n^{(\nu)}(0) = -\nu! \alpha_\nu(F)$, $\nu = \overline{0, n-1}$. Отсюда $|S_\nu| \leq 1/2$ и по лемме 2 все корни многочлена $Q_n(z)$ лежат вне Δ . Итак, при $|z| < 1$ имеем

$$|F(z) - \Theta_n(z)| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) |z|^\nu.$$

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(f) z^\nu$ — регулярная в Δ функция, причем $|\alpha_\nu(f)| \leq M$ ($\nu \in \mathbb{N}$). Тогда наимпростейшие дроби Паде Θ_n функции $F(z) = f(z)/(2M)$ равномерно сходятся к F на любом круге $\Delta_\lambda = \{z : |z| \leq \lambda < 1\}$ и при этом

$$\|F - \Theta_n\|_{\Delta_\lambda} \leq \frac{1+n}{1-\lambda} \lambda^n.$$

Следующий пример показывает, что значительное усиление теоремы 4 невозможно. Для функции $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = 1/(1-z)$ дроби $\theta_n = q'_n/q_n$ с $q_n(z) = \sum_{j=0}^n z^j$ являются дробями Паде и при $|z| < 1$ имеем $|\theta_n(z) - f(z)| = (n+1)|z|^n/|1-z^{n+1}|$.

7. В заключение докажем одно частное утверждение об оценке снизу величины расстояний $\rho(\Theta_m, K)$ в зависимости от $\|f - \Theta_m\|_K$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть P – многочлен степени $n \geq 1$, Q_{nk} – многочлен степени $nk \geq 1$ и при некоторых $\varepsilon \in (0, 1)$ и $a \in (0, k^\varepsilon)$ на единичном круге Δ выполнена оценка

$$\|P - \Theta_{nk}\|_{\Delta} \leq a^k k^{-k}. \quad (7)$$

Тогда при достаточно больших k имеем $\rho(\Theta_{nk}, \partial\Delta) \geq C \cdot k$, где C зависит лишь от $a, \varepsilon, \|P\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из (7) и из теоремы 1 следует, что существует некоторый многочлен $q = T_{nk}Q_{nk}$ степени $2nk$, модуль логарифмической производной которого на $\partial\Delta$ ограничен величиной $A_1(e^k + a^k)/k^k$. Остается использовать результат из [6] (см. п. 1): $\rho(q'/q, \partial\Delta) \geq \text{const} \cdot M^{-1/n}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Горин Е. А. Частично гипоеллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Сиб. матем. ж. 1962. № 4. С. 506–508.
- [2] Гельфонд А. О. Об оценке мнимых частей корней многочленов с ограниченными производными от логарифмов на действительной оси // Матем. сб. 1966. Т. 71(113). С. 289–296.
- [3] Данченко В. И. Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 8. С. 63–80.
- [4] Кацнельсон В. Э. О некоторых операторах, действующих в пространствах, порожденных функциями $\frac{1}{z - z_k}$ // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1967. № 4. С. 58–66.
- [5] Николаев Е. Г. Геометрическое свойство корней многочленов // Вестн. МГУ. Сер. Матем., мех. 1965. № 5. С. 23–26.
- [6] Данченко В. И., Данченко Д. Я. О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Тезисы докл. школы-конференции: Изд-во Казанского университета, 1999. С. 74–77.
- [7] Косухин О. Н. Аналог неравенства Джексона для аппроксимаций наимпростейшими дробями // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тр. 10-й Саратовской зимней школы: Изд-во Саратовского университета, 2000. С. 68–69.

Владимирский государственный университет

Поступило
19.10.2000