Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Доманов, М. М. Маламуд, О решетках инвариантных и гиперинвариантных подпространств операторов $J^\alpha \otimes B$ в соболевских пространствах, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 560–567

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm768>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:35:03

УДК 517

О РЕШЕТКАХ ИНВАРИАНТНЫХ И ГИПЕРИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ОПЕРАТОРОВ $J^\alpha \otimes B$ В СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. Ю. Доманов, М. М. Маламуд

Пусть J_k^α – положительная степень оператора интегрирования J_k , действующего в соболевском пространстве $W_p^k := W_p^k[0, 1]$. В заметке изучается оператор $A_k := J_k^\alpha \otimes B$, определенный на соболевском пространстве вектор-функций $W_p^k[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ и являющийся тензорным произведением оператора J_k^α и невырожденной диагональной $(n \times n)$ -матрицы B . В частности, выясняется, что в отличие от случая оператора $A_0 = J^\alpha \otimes B$, действующего в $L_p[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$, решетка $\text{Lat } A_k$ никогда не распадается при $k \geq 1$. Кроме того, найдены условия распада решетки $\text{Hyplat } A_k$, получены описания коммутанта $\{A_k\}'$, бикоммутанта $\{A_k\}''$ и алгебры $\text{Alg } A_k$ – слабого замыкания полиномов от A_k в алгебре $B(W_p^k \otimes \mathbb{C}^n)$ всех ограниченных линейных операторов в $W_p^k \otimes \mathbb{C}^n$.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Хорошо известно [1], [2], что как оператор интегрирования

$$J: f \rightarrow \int_0^x f(t) dt,$$

так и его положительные степени

$$J^\alpha: f \rightarrow \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt$$

являются одноклеточными операторами в $L_p[0, 1]$ при $p \in [1, \infty)$. Более того, соответствующие решетки инвариантных и гиперинвариантных подпространств имеют вид (см. [1], [2])

$$\text{Lat } J^\alpha = \text{Hyplat } J^\alpha = \{E_a := \chi_{[a,1]} L_p[0, 1] : 0 \leq a \leq 1\}. \quad (1.1)$$

В [3] были изучены решетки $\text{Lat } A$, $\text{Hyplat } A$ и множество $\text{Cyc } A$ циклических подпространств действующего в $L_p^n[0, 1]$ оператора $A = J^\alpha \otimes B$, являющегося тензорным произведением J^α и невырожденной диагональной $(n \times n)$ -матрицы $B = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$, $n = n_1 + \dots + n_r$. В частности, для случая $r = n$ в [3] показано, что при условии

$$\arg \lambda_i \neq \arg \lambda_j, \quad 1 \leq i \neq j \leq r, \quad (1.2)$$

решетки $\text{Lat } A$ и $\text{Hyplat } A$, а также коммутант $\{A\}'$ и бикоммутант $\{A\}''$ распадаются:

$$\text{Lat}(J^\alpha \otimes B) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Lat}(\lambda_i J^\alpha) = \bigoplus_{i=1}^r \{E_{a_i} := \chi_{[a_i, 1]} L_p[0, 1] : 0 \leq a_i \leq 1\}, \quad (1.3)$$

$$\text{Hyplat}(J^\alpha \otimes B) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Hyplat}(\lambda_i J^\alpha) \left(= \bigoplus_{i=1}^r \text{Lat}(\lambda_i J^\alpha) \right), \quad (1.4)$$

$$\{J^\alpha \otimes B\}' = \bigoplus_{i=1}^r \{\lambda_i J^\alpha\}', \quad (1.5)$$

$$\{J^\alpha \otimes B\}'' = \bigoplus_{i=1}^r \{\lambda_i J^\alpha\}''. \quad (1.6)$$

Более того, оказалось, что каждое из равенств (1.3)–(1.6) эквивалентно условию (1.2).

В настоящей заметке основные результаты из [3] распространены на операторы $A_k = J^\alpha \otimes B$, действующие в соболевском пространстве вектор-функций $W_p^k \otimes \mathbb{C}^n$, где $W_p^k := W_p^k[0, 1]$. Отметим, что при выполнении условия (1.2) решетка $\text{Lat } A_k$ в отличие от (1.3) уже не распадается при $k \geq 1$.

В п. 2 получено описание решетки $\text{Lat } A_k$ для оператора $A_k = J_k^\alpha \otimes B$, удовлетворяющего условию (1.2). В отличие от случая $L_2[0, 1] \otimes \mathbb{C}^n$ кроме очевидной “непрерывной” части $\text{Lat}^c A_k$ решетки вида (1.3) добавляется еще и “дискретная” часть $\text{Lat}^d A_k$. Ее описание в существенном опирается на описание решетки $\text{Lat } T$ для конечномерного оператора T в $\mathbb{C}^{n^k}$ (см. [4]).

В п. 3 содержится описание коммутанта $\{A_k\}'$ и алгебры $\text{Alg } A_k$.

В п. 4 получено описание решетки $\text{Hyplat } A_k$. В частности, оказалось, что $\text{Hyplat } J_k^\alpha = \text{Lat } J_k$, $\alpha > 0$, и “непрерывная часть” $\text{Hyplat}^c A_k$ решетки $\text{Hyplat } A_k$ не зависит от α .

Эти результаты новы и для случая $n = 1$, т.е. для оператора J_k^α , действующего в W_p^k . В частности, оказалось, что при $k \geq 2$ оператор J_k^α одноклеточен в точности при $\alpha = 1$. Отметим, что здесь (так же, как и при $n > 1$) плодотворной оказалась идея перехода к факторпространству $W_p^k / W_{p,0}^k \simeq \mathbb{C}^n$, где $W_{p,0}^k := W_{p,0}^k[0, 1] = \{f \in W_p^k[0, 1] : f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0\}$. При этом соответствующий фактороператор $\hat{J}_k^\alpha$ изоморфен прямой сумме жордановых клеток. Оказывается, что $\text{Lat}^d J_k^\alpha = \pi^{-1}(\text{Lat } \hat{J}_k^\alpha)$. Кроме того, явно описаны бикоммутант $\{A_k\}''$, алгебра $\text{Alg } A_k$ и вычислена размерность факторпространства $\{A_k\}'' / \text{Alg } A_k$.

Введем обозначения:

- 1) X_1, X_2 – банаховы пространства;
- 2) $[X_1, X_2]$ – пространство линейных ограниченных операторов из X_1 в X_2 ;
- 3) $[X] = [X, X]$ – пространство ограниченных операторов в банаховом пространстве X ;
- 4) $\text{Alg } T$ обозначает слабо замкнутую подалгебру $[X]$, порожденную T и единицей I ;
- 5) $\text{Lat } T$ и $\text{Hyplat } T$ – решетки инвариантных и гиперинвариантных подпространств оператора $T \in [X]$ соответственно;
- 6) $\ker T = \{x \in X : Tx = 0\}$ – ядро оператора T ;
- 7) $\mathfrak{R}(T) = \{Tx : x \in X\}$ – образ оператора $T \in [X]$;
- 8) $\text{span } E$ – замкнутая линейная оболочка множества $E \subset X$;

- 9) $\text{supp } f$ – носитель функции $f(x)$;
 10) $\mathbb{Z}_+ := \{n : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$;
 11) $r * f$ обозначает свертку функций $r, f \in L_1[0, 1]$: $r * f := \int_0^x r(x-t)f(t) dt$;
 12) I_k обозначает единицу в $\mathbb{C}^k$, $\mathbb{O}_k := 0 \cdot I_k$.

2. Решетка инвариантных подпространств. Начнем с более простого описания решетки $\text{Lat } A_{k,0}$ для оператора $A_{k,0}$, являющегося сужением A_k на подпространство $\oplus W_{p,0}^k$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\text{Re } \alpha > 0$ и оператор $A_0(j) := \bigoplus_{i=1}^{n_j} \lambda_{ij} J_{k,0}^\alpha$ определен на $\bigoplus_{i=1}^{n_j} W_{p,0}^k$ ($1 \leq j \leq r$), $A_{k,0} := \bigoplus_{j=1}^r A_0(j)$. Пусть также $\lambda_{ij} = \lambda_{1j} s_{ij}$, где $1 = s_{1j} \leq s_{2j} \leq \dots \leq s_{n_j j}$ и $\arg \lambda_{1j} \neq \arg \lambda_{1l} \pmod{2\pi}$ для $j \neq l$. Тогда

$$\text{Lat } A_{k,0} = \bigoplus_{j=1}^r \text{Lat } A_{j,0}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $A_{k,0} = \bigoplus_{j=1}^r \lambda_j J_{k,0}^\alpha$ и $\arg \lambda_j \neq \arg \lambda_l$ для $j \neq l$. Тогда решетка $\text{Lat } A_{k,0}$ распадается:

$$\text{Lat } A_{k,0} = \bigoplus_{j=1}^r \text{Lat } J_{k,0}^\alpha = \left\{ \bigoplus_{j=1}^r E_{a_j}^k : 0 \leq a_j \leq 1 \right\}, \quad (2.1)$$

где $E_{a_j}^k = \{f \in W_{p,0}^k[0, 1] : f(x) = 0 \text{ при } x \in [0, a_j]\}$. В частности, решетка $\text{Lat } A_{k,0}$ антиизоморфна единичному кубу $\square_n = \{a \in \mathbb{R}^n : 0 \leq a_j \leq 1\}$.

Для описания решетки $\text{Lat } A_k$ оператора $A_k = \bigoplus_{j=1}^r \lambda_j J_{k_j}^\alpha$ ($k = (k_1, \dots, k_r)$), действующего в $X = \bigoplus_{j=1}^r W_p^{k_j}$, нам понадобятся некоторые обозначения.

Для произвольного непустого подмножества $S \subset \mathbb{Z}_r := \{1, \dots, r\}$ обозначим через P_S и $\hat{P}_S$ проекторы в X на $\bigoplus_{j=1}^r \chi_S(j) W_p^{k_j}$ и в $\bigoplus_{j=1}^r C^{k_j}$ на $\bigoplus_{j=1}^r \chi_S(j) C^{k_j}$ соответственно, где χ_S обозначает характеристическую функцию подмножества S .

Положим также

$$A_{k,S} := \bigoplus_{j=1}^r \chi_S(j) \lambda_j J_{k_j}^\alpha \upharpoonright \mathfrak{R}(P_S),$$

$$\hat{A}_{k,S} := \bigoplus_{j=1}^r \chi_S(j) \lambda_j J(0; k_j)^\alpha \upharpoonright \mathfrak{R}(\hat{P}_S)$$

и обозначим через π_S факторотображение $\mathfrak{R}(P_S)$ на $\mathfrak{R}(\hat{P}_S)$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть либо $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, либо $\alpha > \max_j (k_j - 1/p)$. Пусть также $A_k = \bigoplus_{j=1}^r \lambda_j J_{k_j}^\alpha$ – оператор на $X = \bigoplus_{j=1}^r W_p^{k_j}[0, 1]$ и $\arg \lambda_i \neq \arg \lambda_j$ при $i \neq j$ и $\lambda_j \neq 0$ для $\{1, \dots, r\}$. Тогда

$$\text{Lat } A_k = \bigcup_{S \subset \mathbb{Z}_r} \left(\text{Lat } A_{k,S} \bigoplus_{j=1}^r \chi_{S^c}(j) E_{a_j}^{k_j} \right),$$

где

$$\text{Lat } A_{k,S} = \bigcup_M \pi_S^{-1} \{ [M, (\hat{A}_{k,S})^{-1} M] : M \in \text{Lat } \hat{A}_{k,S} \upharpoonright \hat{A}_{k,S} M \},$$

а S^c – дополнение к S в $\mathbb{Z}_r$ ($S \cup S^c = \mathbb{Z}_r$) и $[M, (\hat{A}_S)^{-1} M]$ – сегмент в решетке всех подпространств X_S . Кроме того, справедливо равенство

$$\dim(\hat{A}_S)^{-1} M - \dim M = \sum_{j \in S} \min \{ -[-\alpha], k_j \}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть $r = 1$ и π – факторотображение,

$$\pi: W_p^k \rightarrow X_k := W_p^k / W_{p,0}^k.$$

Тогда

- 1) $\text{Lat } J_k^\alpha = \text{Lat}^c J_k^\alpha \cup \text{Lat}^d J_k^\alpha$, где
 - а) $\text{Lat}^c J_k^\alpha = \{ E_a^k : 0 \leq a \leq 1 \}$, $E_a^k = \{ f \in W_{p,0}^k : f(x) = 0 \text{ при } x \in [0, a] \}$ – “непрерывная часть” решетки $\text{Lat } J_k^\alpha$;
 - б) $\text{Lat}^d J_k^\alpha = \pi^{-1}(\text{Lat } \hat{J}_k^\alpha) = \bigcup_M \pi^{-1} \{ [M, (\hat{J}_k^\alpha)^{-1} M] : M \in \text{Lat}(\hat{J}_k^\alpha \upharpoonright \hat{J}_k^\alpha M) \}$ – “дискретная часть” решетки $\text{Lat } J_k^\alpha$, где $\hat{J}_k^\alpha$ – фактороператор в X_k ; здесь $[M, (\hat{J}_k^\alpha)^{-1} M]$ – сегмент в решетке всех подпространств X_k , кроме того,

$$\dim(\hat{J}_k^\alpha)^{-1} M - \dim M = d = \min \{ -[-\alpha], k \};$$

- 2) при $k \geq 2$ оператор J_k^α одноклеточен в точности при $\alpha = 1$; при этом “дискретная часть” $\text{Lat}^d J_k$ решетки $\text{Lat } J_k$ имеет вид $\text{Lat}^d J_k = \{ E_l^k \}_{l=0}^k$, где $E_k^k = W_p^k$ и

$$E_l^k = \{ f \in W_p^k[0, 1] : f(0) = \dots = f^{(k-l-1)}(0) = 0 \}, \quad 0 \leq l \leq k-1;$$

ясно, что $W_{p,0}^k[0, 1] := E_0^k \subset E_1^k \subset \dots \subset E_k^k = W_p^k[0, 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Утверждение 2) – следствие того факта, что оператор $\hat{J}_k^\alpha$ в $\mathbb{C}^n$ одноклеточен лишь при $\alpha = 1$. Утверждение о решетке $\text{Lat } J_k$ ранее и другим методом получено Цекановским [5]. Соотношение (2.1) обобщает равенство (1.3) на случай соболевских пространств и для $\alpha = 1$ доказано в [6].

3. Коммутант $\{A_k\}'$ и алгебра $\text{Alg } A_k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть либо $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, либо $\alpha > k - 1/p$, $X = W_p^k[0, 1]$, $X^n = \bigoplus_1^n X$ и B – невырожденная диагональная матрица с простыми собственными значениями, имеющими различные аргументы:

$$B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \arg(\lambda_i) \neq \arg(\lambda_j), \quad i \neq j. \quad (3.1)$$

Тогда коммутант $\{A_k\}'$ оператора $A_k = J_k^\alpha \otimes B (\in [X^n])$ распадается:

$$\{A_k\}' = \{ P : P = \text{diag}(P_1, \dots, P_n), P_j \in [X] \},$$

где P_i имеют вид

$$P_i f = \frac{d}{dx} \int_0^x p_i(x-t) f(t) dt = p_i(0) f(x) + (p_i' * f)(x), \quad p_i(x) \in W_p^k. \quad (3.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть выполнены условия предложения 3.1 и $R = \text{diag}(R_1, \dots, R_n)$, где $R_i f = r_i * f$ ($1 \leq i \leq n$). Тогда

- 1) $\{A_k\}' = \{A_k\}'' = \bigoplus_{j=1}^n \{J_k^\alpha\}''$;
- 2) если $1 < \alpha < k$, то

$$\begin{aligned} \text{Alg } A_k &= \left\{ cI_n + R : c \in \mathbb{C}, r_i(x) \in W_p^{k-1}, \right. \\ &\quad \lambda_1^{\alpha l} r_i^{(\alpha l-1)}(x) = \lambda_i^{\alpha l} r_1^{(\alpha l-1)}(x) \text{ при } l \leq \left\lceil \frac{k-1}{\alpha} \right\rceil, \\ &\quad \left. r_i^{(j)}(0) = 0 \text{ при } j \neq l\alpha - 1, l \leq \left\lceil \frac{k-1}{\alpha} \right\rceil, i \in \{1, \dots, n\} \right\}; \end{aligned}$$

- 3) если $2 \leq k \leq \alpha$, то

$$\text{Alg } A_k = \{cI_n + R : c \in \mathbb{C}, r_i(x) \in W_{p,0}^{k-1}, i \in \{1, \dots, n\}\};$$

- 4) размерность $d_{k,\alpha}$ факторпространства $\{A_k\}'' / \text{Alg } A_k$ равна $d_{k,\alpha} = nk - 1 - [(k-1)/\alpha]$; в частности, $\text{Alg } A_k = \{A_k\}''$, если и только если либо
 - а) $n = 1$ и $\alpha = 1$, либо
 - б) $n = 1$ и $k = 1$.

Следуя [3], введем операторы $L_{a,0} \in [W_{p,0}^k]$ ($a \in \mathbb{R}_+$) и $L_a \in [W_p^k]$ ($a \in [0, 1]$), полагая

$$\begin{aligned} L_{a,0}: f(x) \rightarrow g(x) &= \begin{cases} f(ax) & a < 1, \\ 0, & x \in [0, 1 - a^{-1}], a > 1, \\ f(ax - a + 1), & x \in [1 - a^{-1}, 1], a > 1, \end{cases} \\ (L_a f)(x) &= f(ax). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть либо $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, либо $\alpha > k - 1/p$, $X = W_p^k[0, 1]$ и $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Пусть аргументы собственных значений равны

$$\lambda_j = \lambda_1 s_j^\alpha, \quad 1 = s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n. \quad (3.3)$$

Если $a_{ij} := s_i^{-1} s_j$, то коммутант $\{A_k\}'$ оператора $A_k = J_k^\alpha \otimes B \in [X^n]$ имеет вид

$$\{A_k\}' = \{K : K = (K_{ij})_{i,j=1}^n, K_{ij} \in [X]\},$$

где $K_{jj} \in \{J_k^\alpha\}'$, т.е. K_{jj} ($1 \leq j \leq n$) имеет вид (3.2) для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} K_{ij} &= C_{ij} L_{a_{ij}}, \quad C_{ij} \in \{J_k^\alpha\}' \quad \text{для } i > j, \\ K_{ij} &= L_{a_{ij},0} C_{ij}, \quad C_{ij} \in \{J_k^\alpha\}' \text{ и } C_{ij} \in [W_p^k, W_{p,0}^k] \quad \text{для } i < j, \end{aligned}$$

т.е.

$$(C_{ij} f)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x c_{ij}(x-t) f(t) dt,$$

где $c_{ij}(x) \in W_{p,0}^k[0, 1]$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть выполнены условия предложения 3.3 и $r_j(x) := r_1(x/s_j^\alpha)$. Пусть, далее, $R = \text{diag}(R_1, \dots, R_n)$, где $R_j f = r_j * f$ ($1 \leq j \leq n$). Тогда

- 1) $\{A_k\}'' = \{cI_n + R : c \in \mathbb{C}, R = \text{diag}(R_1, \dots, R_n), r_1 \in W_p^{k-1}\};$
- 2) если $1 < \alpha < k$, то

$$\text{Alg } A_k = \left\{ cI_n + R : c \in \mathbb{C}, r_1 \in W_p^{k-1}, r_1^{(j)}(0) = 0 \text{ при } j \neq i\alpha - 1, i \leq \left\lfloor \frac{k-1}{\alpha} \right\rfloor \right\};$$

- 3) если $2 \leq k \leq \alpha$, то

$$\text{Alg } A_k = \{cI_n + R : c \in \mathbb{C}, r_1 \in W_{p,0}^{k-1}[0, 1]\};$$

- 4) размерность $d_{k,\alpha}$ факторпространства $\{A_k\}'' / \text{Alg } A_k$ равна $d_{k,\alpha} = k - 1 - [(k-1)/\alpha]$; в частности, $\text{Alg } A_k = \{A_k\}''$, если и только если либо $\alpha = 1$, либо $k = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Надь и Фояш (см. [7], [8]) обобщили известную теорему Неймана о коммутанте самосопряженного оператора, доказав, что равенство $\{T\}'' = \text{Alg } T$ сохраняется для широкого класса диссипативных операторов. В частности, оно верно для диссипативного в $L_2[0, 1]$ оператора $A = J \otimes B$ с матрицей B , удовлетворяющей (3.3).

Интересно отметить, что следствие 3.4 дает примеры недиссипативных операторов $T := A_k = J_k \otimes B$ в $W_2^k[0, 1]$, для которых, тем не менее, $\{T\}'' = \text{Alg } T$.

Комбинируя предложения 3.1 и 3.3, приходим к основному результату этого пункта.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть либо $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, либо $\alpha > k - 1/p$ и $B = \bigoplus_{l=1}^r B_l$, где $B_l = \text{diag}(\lambda_{l1}, \lambda_{l2}, \dots, \lambda_{ln_l})$ и собственные значения λ_{lk} ($1 \leq k \leq n_l$) имеют равные аргументы

$$\lambda_{lk} = \lambda_{l1} s_{lk}^\alpha, \quad 1 = s_{l1} \leq s_{l2} \leq \dots \leq s_{ln_l},$$

причем $\arg \lambda_{i1} \neq \arg \lambda_{j1}$ при $i \neq j$. Тогда

$$\{J_k^\alpha \otimes B\}' = \bigoplus_{l=1}^r \{J_k^\alpha \otimes B_l\}'.$$

Другими словами, $T \in \{J_k^\alpha \otimes B\}'$, если и только если $T = \text{diag}(T_{11}, T_{22}, \dots, T_{rr})$, где $T_{ll} = (K_{lij})_{i,j=1}^{n_l} \in \{J_k^\alpha \otimes B_l\}'$ является операторной $(n_l \times n_l)$ -матрицей ($1 \leq l \leq r$) с элементами K_{lij} , описанными в предложении 3.3.

4. Решетка гиперинвариантных подпространств.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $A_k = J_k^\alpha \otimes B$, где B имеет вид (3.1). Тогда решетка $\text{Hyplat } A_k$ распадается:

$$\text{Hyplat } A_k = \bigoplus_{j=1}^n \text{Hyplat } J_k^\alpha = \bigoplus_{i=1}^n \text{Lat } J_k.$$

Если матрица B не удовлетворяет условию (3.1), то решетка $\text{Hyplat } A_k$ не распадается. Для ее описания в этом случае воспользуемся обозначениями, использованными в теореме 2.3.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $A_k = J_k^\alpha \otimes B$ и собственные значения матрицы $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ удовлетворяют условию (3.3). Тогда $E \in \text{Hyplat } A_k$, если и только если $E = E_S \oplus E_{S^c}$, где

- 1) “непрерывная часть” E_{S^c} антиизоморфна наклонному параллелепипеду $P(\{s_j\}_{j \in S^c})$; размерность $\dim P(\{s_j\}_{j \in S^c})$ этого параллелепипеда равна количеству различных s_j ($j \in S^c$), где

$$P(\{s_j\}_{j \in S^c}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \square_n : \\ s'_j a_{j+1} \leq s'_{j+1} a_j \leq s'_{j+1} - s'_j + s'_j a_{j+1}, \quad j \in \{1, \dots, |S^c|\}, \\ \{s'_j\}_{j=1}^{|S^c|} = \{s_j\}_{j \in S^c}\},$$

т.е.

$$E_{S^c} = \bigoplus_{j=1}^n \chi_{s^c}(j) E_{a_j}^{k_j}, \quad \{a_j\}_{j \in S^c} \in P(\{s_j\}_{j \in S^c});$$

- 2) “дискретная часть” E_S имеет вид $E_S = E_{\{l_j\}_{j \in S}}$, где

$$E_{\{l_j\}_{j \in S}} = \left\{ f = \bigoplus_{j=1}^n \chi_{s^c}(j) f_j : f_j(0) = \dots = f_j^{(l_j)}(0) = 0, \quad j \in S \right\},$$

и наборы $\{l_j\}_{j \in S}$ и $\{\lambda_j\}_{j \in S}$ упорядочены одинаково (т.е. $l_i < l_j$, если $\lambda_i < \lambda_j$, и $l_i = l_j$, если $\lambda_i = \lambda_j$, $i, j \in S$); в частности, если $B = I_n$, то

$$\text{Hyplat } A_k = \bigoplus_{S \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \bigoplus_{j=1}^n \chi_s(j) E_l^k \bigoplus_{j=1}^n \chi_{s^c}(j) E_a^k \right\}.$$

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть B удовлетворяет условиям теоремы 3.5 и $A_k = J_k^\alpha \otimes B$. Тогда решетка $\text{Hyplat } A_k$ оператора A_k имеет вид

$$\text{Hyplat } A_k = \bigoplus_{l=1}^r \{\text{Hyplat}(J_k^\alpha \otimes B_l)\},$$

где решетки $\text{Hyplat}(J_k^\alpha \otimes B_l)$ описаны в теореме 4.2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.
- [2] Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.
- [3] Malamud M. M. Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators // Operator Theory: Adv. and Appl. Ser. Integral and Differential Operators. 1998. V. 102. P. 143–167.
- [4] Brickman L., Fillmore P. A. The invariant subspace lattice of a linear transformation // Canad. J. Math. 1967. V. 19. P. 810–822.
- [5] Цекановский Э. Р. Об описании инвариантных подпространств и одноклеточности оператора интегрирования в пространстве $W_2^{(p)}$ // УМН. 1965. Т. 20. № 6 (126). С. 169–172.
- [6] Domanov I. On cyclic and invariant subspaces of an operator $J \otimes B$ in the Sobolev spaces of vector functions // Methods of Functional Analysis and Topology. 1999. V. 1.
- [7] Sz.-Nagy B., Foias C. Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space. Budapest: Acad. Kiado, 1970.
- [8] Sz.-Nagy B., Foias C. Modèle Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert // Acta Sci. Math. 1970. V. 31. № 1–2. P. 91–115.

Донецкий национальный университет

E-mail: domanovi@yahoo.com, mmm@univ.donetsk.ua

Поступило

26.01.2001