Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Ш. Ш. Султанов, О спектральном анализе некоторых дифференциальных операторов, самосопряженных в пространстве с индефинитной метрикой, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 568–580

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:11:28

УДК 517

О СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, САМОСОПРЯЖЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Р. С. Исмагилов, Ш. Ш. Султанов

Рассматривается дифференциальный оператор второго порядка на окружности, самосопряженный относительно индефинитной метрики. Указывается его спектральное разложение. В вычислении меры Планшереля используется гипергеометрическая функция.

Библиография: 11 названий.

В работах [1]–[3] были заложены основы теории пространств с индефинитной метрикой и действующих в них линейных операторов; книга [4] содержит подробное изложение этого круга вопросов. Хотя общие принципы теории прояснены в достаточной мере, спектральный анализ конкретных операторов (скажем, дифференциальных) может представлять существенные аналитические трудности (как, впрочем, и в случае обычных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве). Настоящая работа содержит пример подобного анализа. Мы ограничимся рассмотрением операторов весьма конкретного вида, названных гипергеометрическими (они связаны с гипергеометрической функцией), и доведем их спектральный анализ до явных формул. Выбор этого класса операторов диктуется не только их связью с классическими специальными функциями; некоторые операторы такого типа возникли в исследованиях по теории представлений в пространствах с индефинитной метрикой [5]. (В настоящей работе мы не касаемся связей с теорией представлений.)

Чтобы не перегружать изложение деталями и выделить идейную сторону дела, мы опускаем некоторые вычисления; однако мы поясняем ход этих вычислений (и они могут быть легко восстановлены читателем).

1. Необходимые сведения о пространствах с индефинитной метрикой [1]–[4], [6]. Пусть H – комплексное гильбертово пространство, H_0, H_1 – его ненулевые взаимно-ортогональные подпространства, $H = H_0 \oplus H_1$; через P_0, P_1 обозначим соответствующие ортогональные проекторы. *Индефинитное скалярное произведение* задается формой $[x, y] = ((-P_0 + P_1)x, y)$; его называют также *индефинитной метрикой*. Если $\dim H_0 = n$, $0 < n < \infty$, то имеем P_n -метрику. Вектор $x \in H$ называется *неположительным*, если $[x, x] \leq 0$; так же называется подпространство, состоящее из неположительных векторов. Положительный, неотрицательный, отрицательный и нейтральный векторы (а также соответствующие подпространства) определяются очевидным образом. В дальнейшем мы ограничимся случаем P_n -метрики, $0 < n < \infty$; основные результаты относятся к случаю $n = 1$.

Для линейного оператора A , имеющего плотную область определения $D(A)$, сопряженный (относительно индефинитной метрики) оператор A^* определяется по аналогии с классическим определением, относящимся к обычному гильбертову пространству; в дальнейшем, говоря о сопряженном операторе (а также о родственных понятиях), мы условимся опускать упоминание об индефинитной метрике. Оператор A называется *симметричным*, если $A \subset A^*$; это условие равносильно тому, что $[Ax, y] = [x, Ay]$ для всех $x, y \in D(A)$. Оператор A называется *самосопряженным*, если $A = A^*$; для такого оператора определена резольвента $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ на множестве $\{\lambda: \operatorname{Im} \lambda \neq 0\}$, за возможным исключением конечного множества точек.

Следующий результат Понтрягина есть основное положение теории: любой оператор, самосопряженный по отношению к Π_n -метрике, имеет n -мерное неположительное инвариантное подпространство [1]. В случае Π_1 -метрики этот результат легко приводит к классификации самосопряженных операторов. Эта классификация легко извлекается из работы Иохвидова, Крейна [2], а также из работы Наймарка [6]; мы приведем ее здесь в виде, удобном для дальнейшего.

Итак, пусть H – пространство с Π_1 -метрикой. Рассмотрим самосопряженный (относительно этой метрики) оператор A .

Тогда он принадлежит одному из следующих четырех типов:

- 1) существует вектор $e_0 \in H$ такой, что $[e_0, e_0] < 0$, $Ae_0 = \lambda_0 e_0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$;
- 2) существуют векторы e_0, e_1 такие, что $[e_0, e_0] = [e_1, e_1] = 0$, $[e_0, e_1] = 1$ (такую пару векторов называют *кососвязанной*) и $Ae_0 = \lambda_0 e_0$, $Ae_1 = \bar{\lambda}_0 e_1$, $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$;
- 3) существует кососвязанная пара e_0, e_1 такая, что

$$Ae_0 = \lambda_0 e_0, \quad Ae_1 = \lambda_0 e_1 + e_0, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R};$$

- 4) существует такая кососвязанная пара e_0, e_1 (и разложение $H = H^0 \oplus H^1$, где H^0 – это линейная оболочка векторов e_0, e_1), что

$$Ae_0 = \lambda_0 e_0, \quad Ae_1 = \lambda_0 e_1 + b_0 e_0 + h, \quad Ax = A^1 x + [x, h]e_0, \quad x \in H^1, \\ h \notin (A - \lambda_0 I)D(A), \quad \lambda_0, b_0 \in \mathbb{R}.$$

Здесь A^1 – это самосопряженный оператор в H^1 . (Указанное ограничение на вектор h необходимо для того, чтобы дело не свелось к типу 1).)

Для каждого из первых трех типов имеем разложение $H = H^0 \oplus H^1$ (подпространства ортогональны относительно Π_1 -метрики), где H^0 – подпространство с базисом e_0 в случае 1) и с базисом e_0, e_1 – случаях 2), 3). Подпространство H^1 положительно и инвариантно относительно A . Таким образом, $A = A^0 \oplus A^1$, где A^0 – оператор в конечномерном пространстве, A^1 – самосопряженный оператор в (обычном) гильбертовом пространстве.

Таким образом, задача спектрального анализа конкретного оператора, самосопряженного относительно Π_1 -метрики, может быть поставлена так:

- а) выяснить, какому из четырех типов принадлежит оператор;
- б) указать подпространства H^0, H^1 (входящие в приведенное описание), а также спектральное разложение самосопряженного (в обычном смысле) оператора A^1 .

2. Пространство 2π -периодических функций; обобщенные функции w_z .

Пусть $\mathcal{D}$ – пространство 2π -периодических комплекснозначных C^∞ -функций $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}'$ – пространство непрерывных линейных функционалов на пространстве $\mathcal{D}$. В этих пространствах вводится обычная топология. Значение функционала φ на элементе $u \in \mathcal{D}$ записываем в виде $\langle \varphi, u \rangle$, а также в виде

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) u(x) dx.$$

Элементы пространства $\mathcal{D}'$ естественно назвать 2π -периодическими обобщенными функциями; имеем очевидное вложение $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$. Функции из $\mathcal{D}'$ разлагаются в ряды Фурье по системе $e_n(t) = \exp(int)$, $n \in \mathbb{Z}$; итак,

$$u = \sum_n \hat{u}(n) e_n, \quad u \in \mathcal{D}', \quad \hat{u}(n) = \langle u, e_{-n} \rangle.$$

Введем некоторые обобщенные функции, необходимые для дальнейшего. С этой целью для любого $z \in \mathbb{C}$ рассмотрим функцию

$$w_z(t) = \left| \sin \frac{t}{2} \right|^z, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad t \neq 0. \quad (1)$$

Если $\operatorname{Re} z > -1$, то она суммируема и, тем самым, задает функционал $w_z \in \mathcal{D}'$ по формуле

$$\langle w_z, u \rangle = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|^z u(t) dt, \quad u \in \mathcal{D}. \quad (2)$$

Чтобы построить аналитическое продолжение по z , достаточно произвести в интеграле (2) замену $\sin(t/2) = s$ и применить стандартный метод регуляризации расходящихся интегралов (см. [7, с. 66]). В результате получаем продолжение семейства w_z , $z \in \mathbb{C}$, на всю z -плоскость с полюсами первого порядка в точках $z = -2, -4, \dots$. Для построенного продолжения сохраним обозначение w_z , $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -2, -4, \dots$.

Для дальнейшего выпишем начало ряда Лорана построенной вектор-функции в окрестности точки $z = -1$. С этой целью введем обобщенные функции δ , ξ по формулам

$$\langle \delta, u \rangle = u(0), \quad \langle \xi, u \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(t) - u(0) \cos t/2}{|\sin t/2|} dt.$$

Тогда лорановское разложение имеет вид

$$w_z = \frac{4}{z+1} \delta + \xi + \dots \quad (3)$$

(Многоточие скрывает члены, содержащие $(z+1)^k$, $k > 0$.)

Для доказательства преобразуем интеграл (2) следующим образом:

$$\langle w_z, u \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left(u(t) - u(0) \cos \frac{t}{2} \right) \left| \sin \frac{t}{2} \right|^z dt + \frac{4u(0)}{z+1}.$$

Взяв первое слагаемое из правой части в точке $z = -1$, получаем функционал ξ ; это приводит к формуле (3).

Наконец, рассмотрим коэффициенты Фурье $\widehat{w}_z(k)$ обобщенных функций w_z , $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -2, -4, \dots$. Стандартный метод асимптотических оценок (см., например, [8, с. 38]) приводит к соотношению

$$\widehat{w}_z(k) \sim -\pi^{-1} 2^{-z} \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma(z+1) |k|^{-z-1} \quad \text{при } |k| \rightarrow \infty; \quad (4)$$

это соотношение выполняется равномерно в любой компактной части z -плоскости, не содержащей точек множества $2\mathbb{Z}$.

3. Π_1 -метрика в пространстве функций; гипергеометрический оператор.

Пусть q – обобщенная 2π -периодическая функция, $\bar{q}(t) = q(-t)$. Введем в $\mathcal{D}$ форму

$$[u, v] = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(t-s) u(t) \bar{v}(s) dt ds \quad (5)$$

и рассмотрим оператор $L_0 u = pu'' + su' + ru$, где функции p, s, r принадлежат пространству $\mathcal{D}$. Понадобится также “транспонированный” оператор

$$M_0 v = (pv)'' - (sv)' + rv = \alpha v'' + \beta v' + \gamma v, \quad \alpha = p, \quad \beta = 2p' - s, \quad \gamma = p'' - s' + r.$$

Нас интересуют пары q, L_0 такие, что указанная форма невырождена и оператор L_0 симметричен относительно формы $[\cdot, \cdot]$, т.е. $[L_0 u, v] = [u, L_0 v]$ для любых $u, v \in \mathcal{D}$. Легко видеть, что это условие равносильно условию

$$M_{0t}\{q(t-s)\} = \overline{M_{0s}}\{q(t-s)\}, \quad (6)$$

где через M_{0t} , M_{0s} обозначается действие оператора M_0 по переменным t, s соответственно, а $\overline{M_0}$ – это оператор, полученный из M_0 заменой функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ на комплексно-сопряженные функции.

Не вникая в подробный анализ соотношения (6), ограничимся оператором L_0 , задаваемым в пространстве $\mathcal{D}$ дифференциальным выражением

$$lu(t) = (1 - \cos t)u''(t) + b \sin t u'(t) + c \cos t u(t), \quad u \in \mathcal{D}. \quad (7)$$

Числа b, c вещественны. Назовем этот оператор *гипергеометрическим*. В этом случае уравнение (6) легко приводится к виду

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right)q''(t) + (2-b)\cos\left(\frac{t}{2}\right)q'(t) + (b-c-1)\sin\left(\frac{t}{2}\right)q(t) = 0. \quad (8)$$

Нас интересуют решения уравнения (8) в классе 2π -периодических обобщенных функций, удовлетворяющие условию $\bar{q}(t) = q(-t)$. Любое решение бесконечно дифференцируемо при $t \in \mathbb{R}$, $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, ибо старший коэффициент этого уравнения обращается в нуль только в точках множества $2\pi\mathbb{Z}$. На множестве $2\pi\mathbb{Z}$ обобщенная функция $q(t)$ может иметь сингулярность.

Если заменить в уравнении (8) функцию $q(t)$ ее рядом Фурье (все возникающие при этом ряды сходятся в топологии пространства $\mathcal{D}'$), то для коэффициентов Фурье $\hat{q}(k)$ получаем условия

$$\frac{\hat{q}(k)}{\hat{q}(k-1)} = \frac{k^2 - bk + c}{k^2 + (b-2)k + c - b + 1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \hat{q}(k) \in \mathbb{R}, \quad \hat{q}(k) \neq 0. \quad (9)$$

Здесь мы учли также требование эрмитовости и невырожденности формы (5).

Мы видим, что для существования обобщенной функции $q(t)$ с нужными свойствами необходимо выполнение неравенств $k^2 + (b-2)k + c - b + 1 \neq 0$, $k^2 - bk + c \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Покажем, что эти условия являются также достаточными. Действительно, предположим, что они выполнены. Если задать (произвольным образом) вещественное число $\hat{q}(0) \neq 0$, то числа $\hat{q}(k)$ определяются однозначно соотношениями (9). Правая часть соотношения (9) имеет асимптотику $1 + (2-2b)|k| + O(k^{-2})$, $|k| \rightarrow \infty$, откуда (здесь мы опускаем рутинные вычисления)

$$\hat{q}(k) \simeq M|k|^{2-2b}, \quad |k| \rightarrow \infty, \quad M \neq 0. \quad (10)$$

Итак, полученная последовательность имеет не более чем степенной рост при $|k| \rightarrow \infty$ и, следовательно, задает элемент пространства $\mathcal{D}'$. Далее, правая часть равенства (9) (обозначим ее через $f(k)$) удовлетворяет условию $f(k)f(1-k) = 1$. Отсюда следует, что $\hat{q}(-k) = \hat{q}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тем самым, функция $q(t)$ четная и вещественная. Этим доказано, что искомая функция существует (и определена с точностью до ненулевого вещественного множителя).

Функции $e_n(t) = \exp(int)$, $n \in \mathbb{Z}$, ортогональны относительно формы (5); точнее, $[e_m, e_n] = \delta_{mn}\hat{q}(n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Форма (5) приводит к Π_1 -метрике (в пополнении пространства $\mathcal{D}$ по соответствующей гильбертовой норме) в том и только том случае, если выполнена одна из следующих систем неравенств: либо $c > 0$, $2b-4 < c < b-1$, либо $|b| - 1 < c < 0$.*

(Для краткости в дальнейшем мы будем говорить о Π_1 -метрике в $\mathcal{D}$, хотя, строго говоря, эта метрика определена в гильбертовом пополнении этого пространства).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что мы получим Π_1 -метрику тогда и только тогда, когда правая часть равенства (9) отрицательна при $k = 1$ и положительна при $k > 1$. Несложный анализ показывает, что это равносильно одной из указанных систем неравенств, чем и доказано предложение.

Полный анализ случая Π_1 -метрики потребовал бы много места; поэтому мы выделим из указанных выше значений (b, c) (дающих Π_1 -метрику) те, для которых функция $q(t)$ непрерывна. Для этого необходимо условие $\sum_k |\hat{q}(k)|^2 < \infty$. Из (10) видно, что оно выполнено только при $b > 3/2$. Используя предложение 1, мы видим, что для существования непрерывной функции $q(t)$, задающей Π_1 -метрику (относительно которой симметричен оператор L_0), необходимо, чтобы точка (b, c) принадлежала области

$$E = \left\{ (b, c) \mid b > \frac{3}{2}, 2b - 4 < c < b - 1, c > 0 \right\}. \quad (11)$$

В приведенном ниже предложении 2 мы докажем, что это условие является не только необходимым, но и достаточным; мы также найдем явный вид функции $q(t)$. Здесь (и ниже) используется гипергеометрическая функция

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_0^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} x^k, \quad |x| < 1, \quad \gamma \neq 0, -1, \dots$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$, то ряд сходится (равномерно и абсолютно) при $-1 \leq x \leq 1$; в этом случае функция $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ определена и непрерывна в $[-1, 1]$. Если $\alpha + \beta - \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то в левой полуокрестности точки $x = 1$ функция $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ представима в виде суммы бесконечно-дифференцируемой функции и функции вида

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1+O(1-x)) \quad (12)$$

при $x \rightarrow 1 - 0$. В “особом случае” $\alpha + \beta - \gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в этой асимптотической формуле возникают дополнительные члены вида $\log(1-x)$ (мы опускаем подробности; см. [9, с. 306]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(b, c) \in E$. Положим $d = \sqrt{b^2 - 4c}$ (эта величина положительна при $(b, c) \in E$). Тогда

1) функция

$$q(t) = -F\left(\frac{2-b-d}{2}, \frac{2-b+d}{2}, \frac{1}{2}; \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) \quad (13)$$

непрерывна на $\mathbb{R}$, 2π -периодична и удовлетворяет уравнению (8) (в смысле теории обобщенных функций). Любое решение уравнения (8), принадлежащее пространству $\mathcal{D}'$, имеет вид $hq(t)$, $h \in \mathbb{C}$;

2) коэффициенты Фурье функции (13) удовлетворяют соотношению

$$\hat{q}(k) \sim M(b, c)|k|^{2-2b}, \quad |k| \rightarrow \infty, \quad M(b, c) = \frac{2^{3-2b}\Gamma(3/2-b)\Gamma(-2+2b)\cos b\pi}{\sqrt{\pi}\Gamma((2-b-d)/2)\Gamma((2-b+d)/2)}; \quad (14)$$

3) функция $q(t)$ задает Π_1 -метрику в пространстве $\mathcal{D}$ (по формуле (5)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Ищем решение уравнения (8) при $0 < |t| \leq \pi$ такое, что $q'(\pi) = 0$ (последнее равенство вытекает из того, что искомое решение четно и 2π -периодично). Замена $q(t) = q_1(s)$, $s = \sin^2(t/2)$, приводит к гипергеометрическому уравнению. В результате получаем, что функция (13) удовлетворяет уравнению (8) при $0 < |t| \leq \pi$. Мы должны доказать, что эта функция удовлетворяет уравнению (8) в смысле теории обобщенных функций. С этой целью рассмотрим уравнение (8) и функцию (13) при $b, c \in \mathbb{C}$. Если $\operatorname{Re} b > 3$, $b \notin 1/2 + \mathbb{Z}$, то в силу соотношения (12) эта функция имеет непрерывные производные порядка 2, а потому равенство (8) выполнено. С другой стороны, левая часть этого равенства есть голоморфная при $\operatorname{Re} b > 3/2$ функция со значениями в $\mathcal{D}'$; тем самым, функция (13) есть решение уравнения (8) в классе $\mathcal{D}'$.

2) Докажем соотношение (14). Пусть сначала $b \neq 5/2$. В силу соотношения (12) функция $q(t)$ в окрестности точки $t = 0$ представима в виде суммы бесконечно дифференцируемой функции и функции вида

$$-\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/2-b)}{\Gamma((2-b-d)/2)\Gamma((2-b+d)/2)}\left|\sin \frac{t}{2}\right|^{-3+2b}(1+O(t^2)).$$

Поэтому исследование асимптотики последовательности $\hat{q}(k)$ сводится к аналогичному вопросу (уже рассмотренному в п. 2) для коэффициентов Фурье функции (1) при $z = -3 + 2b$. Это приводит к соотношению (14) при $b \neq 5/2$. При $b = 5/2$ следует привлечь упомянутую асимптотическую формулу для $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ (при $x \rightarrow 1 - 0$) в “особом случае”.

3) Из (14) видно, что величины $\hat{q}(k)$ положительны для больших k . Отсюда и из предложения 1 вытекает третье утверждение предложения 2. Предложение доказано.

Заодно мы доказали, что множество тех (b, c) , для которых обобщенная функция $q(t)$ непрерывна и задает Π_1 -метрику, совпадает с областью E , описанной в (11).

В дальнейшем точка (b, c) берется из области E и для введения Π_1 -метрики используется функция (13). Теперь построим Π_1 -пространство. Для этого обозначим через H^{bc} пространство 2π -периодических обобщенных функций вида $u(t) = \sum_k \hat{u}(k) \exp(ikt)$ таких, что $\sum_k |\hat{q}(k)| |\hat{u}(k)|^2 < \infty$. Это – гильбертово пространство со скалярным произведением таким, что $(e_m, e_n) = \delta_{mn} |\hat{q}(m)|$. Пространство $\mathscr{D}$ вложено в него очевидным образом, и форма (5) продолжается с $\mathscr{D}$ на H^{bc} по формулам $[e_m, e_n] = \delta_{mn} \hat{q}(m)$. Нужное Π_1 -пространство построено.

Через L обозначим замыкание оператора L_0 . Описать область определения $D(L)$ оператора L затруднительно; однако в следующей лемме указывается некоторый запас элементов из $D(L)$.

ЛЕММА 1. Пусть функция $u(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, $t \neq 0$, бесконечно дифференцируема при $t \neq 0$ (в точках $-\pi$, π имеются в виду односторонние производные), $u(-\pi) = u(\pi)$, $u'(-\pi) = u'(\pi)$ и функции u' , u'' ограничены при $t \in [-\pi, \pi]$, $t \neq 0$. Тогда $u \in D(L)$ и Lu определяется формулой (7) при $t \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что для любого $h \in (0, \pi/2)$ существует такая функция $u_h \in \mathscr{D}$, что она равна нулю в $(-h, h)$, совпадает с u вне интервала $(-2h, 2h)$ и $|tu'_h(t)| < M$, $|t^2 u''_h(t)| < M$, где M не зависит от h . Отсюда следует, что $u_h \rightarrow u$, $lu_h \rightarrow lu$ при $h \rightarrow 0$ в L_2 -метрике. Так как последовательность $|\hat{q}(k)|$ ограничена, то норма в H^{bc} мажорируется нормой в L_2 . Поэтому эти предельные соотношения верны и в пространстве H^{bc} . Это означает, что $u \in D(L)$. Отсюда вытекают утверждения леммы.

Пусть $\mathscr{D}_+$, $\mathscr{D}_-$ – подпространства, состоящие из четных (и соответственно нечетных) функций пространства $\mathscr{D}$, H^{bc}_+ , H^{bc}_- – их замыкания в H^{bc} ; таким образом, $H^{bc} = H^{bc}_+ \oplus H^{bc}_-$ (подпространства H^{bc}_+ , H^{bc}_- ортогональны относительно обоих скалярных произведений в H^{bc}). Эти подпространства инвариантны относительно L ; через L_+ , L_- обозначим ограничения оператора L на H^{bc}_+ и H^{bc}_- . Ясно, что H^{bc}_+ – это Π_1 -пространство, H^{bc}_- – это гильбертово пространство (на H^{bc}_- метрики $(\cdot, \cdot)$ и $[\cdot, \cdot]$ совпадают). Мы изучим операторы L_+ , L_- ниже (в пп. 6, 7); ближайшие пп. 4, 5 содержат необходимую подготовку.

4. Обобщенные функции w_z как элементы пространства H^{bc} . Введем на комплексной z -плоскости область

$$G_b = \left\{ z \mid \operatorname{Re} z > -b + \frac{1}{2} \right\}. \quad (15)$$

В следующем предложении собраны необходимые свойства построенной в п. 1 вектор-функции w_z при $z \in G_b$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) $w_z \in H_+^{bc}$ при $z \in G_b$, $z \neq -1$.

2) Если положить $z = -b + 1/2 + \varepsilon + iy$, то справедливы соотношения

$$\|w_z\| = O(\varepsilon^{-1/2}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0, \quad (16)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon[w_z, w_z] = N(b, c) \left| \Gamma\left(\frac{3}{2} - b + iy\right) \sin \frac{\pi}{2} \left(-b + \frac{1}{2} + iy\right) \right|^2, \quad (17)$$

$$N(b, c) = \frac{4 \cos \pi b \Gamma(3/2 - b) \Gamma(-2 + 2b)}{\pi^{5/2} \Gamma((2 - b - d)/2) \Gamma((2 - b + d)/2)}$$

равномерно по $y \in [y_0, y_1]$ для любого отрезка $[y_0, y_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства используем соотношения (4), (14) и определение двух скалярных произведений в H^{bc} . После этого используется очевидное соотношение $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\varepsilon} \simeq 1/\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Этим предложение доказано.

5. Решения уравнения $lf = \lambda f$. Сначала поясним ход вычислений, приводящих к решению этого уравнения. Преобразуем наше уравнение при помощи замены $u(t) = s^z v(s)$, $s = \sin^2(t/2)$. Это приводит к уравнению

$$s(1-s)v'' + \left(z + \frac{1}{2} + b - (z+1+b)s\right)v' - \left(\frac{z^2 + 2bz + 4c}{4} - \frac{z^2 + (2b-1)z + 2c - 2\lambda}{4s}\right)v = 0,$$

которое близко к классическому гипергеометрическому уравнению, но отличается от него добавочным слагаемым. Последнее обращается в нуль, если переменные λ , z связаны соотношением $z^2 + (2b-1)z + 2c - 2\lambda = 0$. Полученное таким образом уравнение решается при помощи гипергеометрических функций.

После этих пояснений приведем вид нужных для дальнейшего решений уравнения $lf = \lambda f$.

Положим

$$\lambda_0 = c - \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{2}\right)^2.$$

На комплексной λ -плоскости возьмем область D_{bc} , полученную выбрасыванием луча $(-\infty, \lambda_0]$. Таким образом,

$$D_{bc} = \{\lambda: |\arg(\lambda - \lambda_0)| < \pi\}. \quad (18)$$

Взаимно-обратные функции

$$\lambda = \frac{z^2 + z(2b-1) + 2c}{2}, \quad z \in G_b, \quad (19a)$$

$$z = -b + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - 2c + 2\lambda}, \quad \lambda \in D_{bc} \quad (19b)$$

$$(z = x + yi, \quad \lambda = \alpha + \beta i),$$

определяют взаимно-однозначное отображение области D_{bc} , заданной в (18), на область G_b , указанную в (15). Мы решим уравнение $lu = \lambda u$ на промежутке $(0, \pi]$ для

чисел $\lambda \in D_{bc}$. Для этого понадобятся величина $d = \sqrt{b^2 - 4c}$, использованная в предложении 1, и следующие функции:

$$F_1(b, c, z; t) = F\left(\frac{z+b-d}{2}, \frac{z+b+d}{2}, z+b+\frac{1}{2}; \sin^2 \frac{t}{2}\right), \quad (20a)$$

$$F_2(b, c, z; t) = F\left(\frac{z+b-d}{2}, \frac{z+b+d}{2}, \frac{1}{2}; \cos^2 \frac{t}{2}\right). \quad (20b)$$

Действуя, как намечено в начале этого пункта, получаем следующий результат.

ЛЕММА 2. Пусть $z+b+1/2 \notin \{0, -1, \dots\}$. Тогда функции

$$u_1(b, c, z; t) = w_z(t)F_1(b, c, z; t), \quad (21a)$$

$$u_2(b, c, z; t) = w_z(t)F_2(b, c, z; t) \quad (21b)$$

являются решениями уравнения $lu = \lambda u$ на $(0, \pi]$. Эти решения удовлетворяют условиям $u_1(b, c, z; t) \sim (\sin(t/2))^z$ при $t \rightarrow 0$, $u_2(b, c, z; \pi) = 0$ и, более того, определяются этими условиями с точностью до ненулевого множителя.

Ниже нам понадобятся также обобщенные функции (элементы пространства H^{bc}), полученные из этих функций аналитическим продолжением; мы сохраним для этих продолжений те же обозначения.

6. Самосопряженность оператора L_+ и его резольвента. Сейчас мы докажем самосопряженность оператора L_+ и построим его резольвенту $R_\lambda = (L_+ - \lambda I)^{-1}$ при $\lambda \in D_{b,c}$. Однако оказывается удобнее выразить ее как функцию от $z \in G_b$ (пользуясь указанной биекцией).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Оператор L_+ самосопряжен (см. п. 1). Его резольвента (рассматриваемая как функция от z) определена и голоморфна в области G_b , за исключением полюсов (указываемых ниже); она действует на функцию $f \in \mathcal{D}_+$, равную нулю в окрестности точки $t = 0$, по формуле

$$\begin{aligned} (R_\lambda f)(t) &= K(b, d, z)w_z(t) \left(F_1(b, c, z; t) \int_t^\pi f(s)F_2(b, c, z; s)w_{z+2b-2}(s) ds \right. \\ &\quad \left. + F_2(b, c, z; t) \int_0^t f(s)F_1(b, c, z; s)w_{z+2b-2}(s) ds \right), \quad t \in (0, \pi], \\ K(b, d, z) &= -\frac{\Gamma((z+b-d)/2)\Gamma((z+b+d)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(z+b+1/2)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Напомним, что $R_\lambda f$ – четная функция; поэтому она указана лишь при $0 < t \leq \pi$. Ясно, что функции f , используемые в предложении, образуют плотное множество в пространстве H_+^{bc} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наметим доказательство. Решаем уравнение $ly - \lambda y = f$ для больших $z \in \mathbb{R}$ и четных функций $f \in \mathcal{D}_+$, равных нулю около точки $t = 0$; затем из общего решения отбираем решение, удовлетворяющее ограничениям, которые описаны в лемме 1. Это приводит к нужному результату.

Используя построенную сейчас резольвенту, мы произведем спектральный анализ оператора L_+ .

7. Точечный спектр оператора L_+ . Из формул (20)–(22) видно, что полюсы резольвенты (как функции от z) возникают из-за функции w_z , а также Γ -множителей в формуле (22). Сейчас мы укажем все полюсы и соответствующие инвариантные подпространства (как разъяснялось в п. 1, они одномерны либо двумерны). Ниже понадобятся элементы δ, ξ , введенные в п. 2, а также обобщенная функция u_{bc} , полученная из четного продолжения функции (21a) на $[-\pi, \pi]$ при $z = -b + d$. Из предложения 3 вытекает, что она принадлежит пространству H_+^{bc} при условии $d > 1/2$. Напомним, что $(b, c) \in E$ (область E указана в формуле (11)).

ТЕОРЕМА 1. 1) Если $d \leq 1/2$, то $L\delta = (1 - b + c)\delta$, $[\delta, \delta] < 0$ и элемент δ – единственный собственный вектор оператора L_+ .

2) Если $d > 1/2$ и $2b - 4c \neq 1$, то δ и u_{bc} – единственные собственные векторы оператора L_+ ; соответствующие собственные значения – это числа $1 - b + c$ и $(b - 2c - d)/2$. При этом $[\delta, \delta] < 0$, $[u_{bc}, u_{bc}] > 0$, если $2b - 4c < 1$; если же $2b - 4c > 1$, то $[\delta, \delta] > 0$, $[u_{bc}, u_{bc}] < 0$.

3) Если $d > 1/2$, $2b - 4c = 1$, то двумерное подпространство с базисом δ, ξ невырождено (т.е. форма $[\cdot, \cdot]$ не вырождается на этом подпространстве), инвариантно относительно оператора L_+ и в некотором кососвязанном базисе этого подпространства матрица оператора есть жорданова клетка с числом $(3 - 2b)/4$ на диагонали.

СЛЕДСТВИЕ. В случаях 1), 2) оператор L_+ принадлежит типу 1 (по классификации, описанной в п. 1), а в случае 3) – типу 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (20)–(22) видно, что при $\operatorname{Re} z > -b + 1/2$ резольвента (как функция от z) имеет в точке $z = -1$ полюс первого порядка, а в случае 2) – также полюс первого порядка в точке $z = -b + d$. В случае 3) точка $z = -1 = -b + d$ является полюсом второго порядка. Стандартный анализ главных частей рядов Лорана в окрестности полюсов дает нужный результат. Добавим лишь, что используется равенство $[\delta, \delta] = q(0)$, которое следует из определения формы $[\cdot, \cdot]$; это дает знак величины $[\delta, \delta]$ в случаях 1), 2).

8. Непрерывный спектр оператора L_+ и мера Планшереля. В этом пункте мы ограничимся оператором L_+ при условии 1) из теоремы 1 (таким образом, $d \leq 1/2$). Напомним (см. п. 1), что в этом случае пространство H_+^{bc} есть сумма двух ортогональных (в индефинитной метрике) подпространств, инвариантных относительно оператора L_+ ; одно из них одномерно (с базисом δ) и отрицательно, второе положительно (и, тем самым, есть обычное гильбертово пространство). Второе подпространство обозначим через H_+^{bc1} ; в нем содержится плотное подмножество $\mathcal{D}_+^1 = \{u: u \in \mathcal{D}_+, [u, \delta] = 0\}$. Ограничение оператора L_+ на H_+^{bc1} обозначим через L_+^1 . Наша цель – построить для него спектральное разложение.

Формула для резольвенты показывает, что спектр оператора L_+^1 – это полуось $(-\infty, \lambda_0]$; величина λ_0 была введена в п. 5. Функция (19b) отображает верхний берег разреза по этой полуоси на луч $z = -b + 1/2 + iy$, $y > 0$, в комплексной z -плоскости (а нижний берег – на луч $z = -b + 1/2 + iy$, $y < 0$). Сейчас мы введем интегральное преобразование, “диагонализирующее” оператор L_+^1 . Затем с целью произвести его спектральный

анализ изучим “скачок” резольвенты при переходе с верхнего берега разреза по спектру на нижний. Таким образом, мы действуем по аналогии с классической теорией.

Сейчас понадобится функция $v(b, c, z; t) = w_{z+2b-2}(t)F_2(b, c, z; t)$. На промежутке $(0, \pi]$ эта функция есть решение уравнения $l^t u = \lambda u$, где l^t – транспонированное (по отношению к l) дифференциальное выражение (см. п. 3). Напомним, что функция $F_2(b, c, z; t)$ задана формулой (20b).

Каждой функции $f \in \mathcal{D}_+^1$ поставим в соответствие функцию

$$\hat{f}(\alpha) = \int_0^\pi f(t)v\left(b, c, -b + \frac{1}{2} + iy; t\right) dt, \quad \alpha < \lambda_0.$$

Здесь, как и раньше, точки $\lambda = \alpha$ и $z = -b + 1/2 + iy$, $y > 0$ связаны соотношениями (19); таким образом,

$$\alpha = \lambda_0 - \frac{y^2}{2}. \quad (23)$$

Это соответствие будем кратко записывать в виде $f \rightarrow \hat{f}(\alpha)$. Ясно, что если $f \rightarrow \hat{f}(\alpha)$, то $L_+^1 f \rightarrow \alpha \hat{f}(\alpha)$. Таким образом, указанное соответствие “диагонализует” оператор L_+^1 . Следуя классическим канонам, мы должны бы вывести формулу обращения для этого преобразования, а также написать равенство Планшереля (по другой терминологии – равенство Парсеваля), т.е. выразить скалярное произведение функций из $\mathcal{D}_+^1$ через их образы при указанном отображении. Мы не касаемся первой задачи (хотя эти задачи тесно связаны) и ограничимся формулой Планшереля. Явное вычисление меры Планшереля мы проведем по аналогии с классической теорией; однако необычный вид метрики несколько усложняет дело.

Перейдем к изучению “скачка” резольвенты. С этой целью зафиксируем точку $-b + 1/2 + iy$, $y > 0$, на z -плоскости; функция (19a) переводит ее в точку $\alpha = \lambda_0 - y^2/2$ на спектре оператора L_+ . Взяв малое $\varepsilon > 0$, рассмотрим также точку $z = -b + 1/2 + iy + \varepsilon$ и ее образ (при отображении (19a)) $\lambda = \lambda_0 - y^2/2 + \varepsilon^2/2 + i\varepsilon y$.

ЛЕММА 3. Для любых $f, g \in \mathcal{D}_+$ справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(R_\lambda - R_{\bar{\lambda}})f, g] = 2\pi iT(b, c)\Phi(b, c; y)\hat{f}(\alpha)\overline{\hat{g}(\alpha)}, \quad (24)$$

$$T(b, c) = \frac{4 \cos \pi b \Gamma(3/2 - b) \Gamma(2b - 2)}{\pi^{9/2} \Gamma((2 - b - d)/2) \Gamma((2 - b + d)/2)}, \quad (25)$$

$$\Phi(b, c; y) = \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - d + iy\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + d + iy\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - b + iy\right) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - b + iy\right) \right|^2 \operatorname{sh} \pi y. \quad (26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем эта лемма будет использована только для функций f, g , взятых из $\mathcal{D}_+^1$. Для таких функций можно заменить в формулировке леммы оператор L_+ на L_+^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно изучим асимптотическое поведение функции $(R_\lambda f)(t)$, $\lambda = \lambda_0 - y^2/2 + \varepsilon^2/2 + i\varepsilon y$, $\varepsilon \rightarrow +0$, рассматриваемой как функция от $z = -b + 1/2 + iy + \varepsilon$ (переменные λ, z связаны формулами (19a), (19b)). Чтобы выделить главный член асимптотики, преобразуем формулу (21), проделав следующие шаги:

1) запишем $\int_t^\pi$ в виде разности $\int_0^\pi - \int_0^t$;

2) первый из этих интегралов можно записать в виде $\hat{f}(\alpha) + O(\varepsilon)$, $\alpha = \lambda_0 - y^2/2$ при $\varepsilon \rightarrow +0$;

3) произведение функции $w_z(t)$ на функции, представленные в виде интегралов $\int_0^t$, равно нулю в окрестности точки 0 (ибо этим свойством обладает функция f); тем самым, такие произведения ограничены по норме гильбертова пространства H_+^{bc} при малых $\varepsilon > 0$;

4) имеем равенство $K(b, d, z) = K(b, d, -b + 1/2 + iy) + O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow +0$;

5) функция $w_z(t)F_1(b, c, z; t)$ представима в виде $w_z(t)(1 + O(t)) = w_z(t) + s_z(t)$, $t \rightarrow +0$, где вектор-функция $z \mapsto s_z$ ограничена по норме пространства H_+^{bc} ;

6) наконец, используем оценку (16).

В итоге формула (21) приводит к равенству

$$R_\lambda f = - \frac{\Gamma(1/4 + (iy - d)/2)\Gamma(1/4 + (iy + d)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 + iy)} \hat{f}(\alpha)w_z + h_z, \quad (27)$$

где вектор-функция $z \mapsto h_z$ равномерно ограничена по норме пространства H_+^{bc} при малых $\varepsilon > 0$.

Применяя тождество Гильберта для резольвенты, получаем равенство $R_\lambda - R_{\bar{\lambda}} = 2i\varepsilon y R_\lambda R_{\bar{\lambda}}$. Используем его для вычисления левой части равенства (24). Из равенства (27) (и такого же равенства, записанного для функции g), используя предложение 3, получаем равенство (24). Этим доказана лемма.

Теперь осталось применить стандартный метод вывода формулы Планшереля из формулы для “скачка” резольвенты (см., например, [10, с. 444]). В результате получаем следующую теорему, содержащую формулу Планшереля для оператора L_+^1 ; в этой теореме используется функция

$$P(\alpha) = T(b, c)\Phi(b, c; y), \quad \alpha \in (-\infty, \lambda_0), \quad y > 0,$$

где α , y связаны соотношением (23). Величина $T(b, c)$ и функция $\Phi(b, c; y)$ указаны в (25), (26).

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо равенство*

$$[f, g] = \int_{-\infty}^{\lambda_0} \hat{f}(\alpha)\overline{\hat{g}(\alpha)}P(\alpha) d\alpha, \quad f, g \in \mathcal{D}_+^1.$$

(Таким образом, функция $P(\alpha)$ – это плотность меры Планшереля.)

9. Спектральный анализ оператора L_- . Здесь мы ограничимся кратким перечислением результатов; их вывод аналогичен изложенному выше.

1) Если $b \leq 5/2$, $d \leq 3/2$, то непрерывный спектр оператора L_- занимает луч $(-\infty, \lambda_0)$ (точечный спектр отсутствует). Интегральное преобразование, “диагонализирующее” оператор, имеет вид

$$\hat{f}(\alpha) = \int_0^\pi f(t) \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2b-2} F\left(\frac{3}{4} - \frac{d}{2} + \frac{it}{2}, \frac{3}{4} + \frac{d}{2} + \frac{iy}{2}, \frac{3}{2}; \cos^2 \frac{t}{2} \right) dt.$$

Мера Планшереля имеет плотность $\alpha \mapsto P(\sqrt{2(\lambda_0 - \alpha)})$, где

$$P(y) = \frac{4\Gamma(3/2 - b)\Gamma(2b - 2)\cos\pi b}{\Gamma(1 - (b + d))\Gamma(1 - (b - d))}\Psi(y),$$

$$\Psi(y) = \operatorname{sh} \pi y \left| \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{-d + iy}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{d + iy}{2}\right) \Gamma\left(-b + \frac{3}{2} + iy\right) \cos \pi\left(-\frac{b}{2} + \frac{1}{4} + iy\right) \right|^2.$$

2) Если $b > 5/2$, то имеется собственное значение $3 - 2b + c$, а если $d > 3/2$, то собственное значение $(b - 2c - 3d + 2)/2$ (непрерывный спектр тот же). Перечисленные значения исчерпывают точечный спектр оператора L_- .

10. Заключительные замечания. 1) Мы ограничились изучением Π_1 -метрики. Случай Π_n -метрики (для произвольного $n > 1$) требует дополнительных усилий; в частности, строение оператора в n -мерном неположительном инвариантном подпространстве может оказаться сложным (в зависимости от параметров b, c).

2) В интересных работах Старинца ([11] и др.) рассматривается сначала гильбертово пространство функций, в котором скалярное произведение задается положительным весом. Затем автор “варьирует” вес таким образом, что он становится сингулярным и скалярное произведение становится индефинитным. Изучаются дифференциальные операторы, самосопряженные в этой метрике. Эти два подхода (тот, который описан в работах Старинца, и тот, которому следуют работа [5] и предлагаемая работа), как мы видим, совершенно различны. Любопытно однако, что оба они приводят к достаточно содержательному анализу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Понтрягин Л. С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой // Изв. АН СССР. 1944. Т. 8. № 1. С. 243–280.
- [2] Иохвидов И. С., Крейн М. Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, 1 // Тр. ММО. 1956. Т. 5. С. 43–72.
- [3] Иохвидов И. С., Крейн М. Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, 2 // Тр. ММО. 1959. Т. 8. С. 38–62.
- [4] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
- [5] Султанов Ш. Ш. О тензорных произведениях представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 2. С. 86–88.
- [6] Наймарк М. А. О коммутативных алгебрах операторов в пространстве Π_1 // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 4. С. 734–737.
- [7] Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Наука, 1958.
- [8] Копсон Э. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.
- [9] Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Л.: ГИФМЛ, 1963.
- [10] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [11] Старинец В. В. О некоторых дифференциальных операторах в функциональных гильбертовых пространствах с индефинитной метрикой. Деп. ВИНТИ № 3634-84. М.: ВИНТИ, 1984.