Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, О бесселевых системах в банаховом пространстве, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 285–296

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:45:25

О бесселевых системах в банаховом пространстве

П. А. Терехин

Рассматриваются бесселевы системы в банаховом пространстве и изучаются их операторные и проекционные характеристики. На основе введенной операторной конструкции продолжения системы доказан аналог теоремы Шура о продолжимых системах.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Пусть H – комплексное гильбертово пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H называется *бесселевой*, если существует постоянная $B > 0$ такая, что для любого вектора $h \in H$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 \leq B \|h\|_H^2. \quad (1.1)$$

Свойство системы $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ быть бесселевой допускает ряд эквивалентных переформулировок. Обозначим $G_\Phi = \{\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\}_{i,j=1}^{\infty}$ матрицу Грама системы. Тогда бесселевость системы Φ равносильна тому, что матрица G_Φ ограничена в смысле Гильберта. Этот факт отмечается в работе Бари [1]. Напомним, что матрица $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ называется *ограниченной в смысле Гильберта*, если равенства

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots,$$

корректно определяют ограниченный линейный оператор в пространстве ℓ^2 .

В работе Бари [1] также показано, что система Φ является бесселевой в том и только том случае, когда существует ограниченный линейный оператор $S: \ell^2 \rightarrow H$ такой, что $Se_n = \varphi_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$, где $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – естественный базис пространства ℓ^2 . При этом $\|S\|_{\ell^2 \rightarrow H} \leq \sqrt{B}$. Такая операторная характеристика бесселевой системы показывает, что неравенство (1.1) эквивалентно неравенству

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \right\|_H \leq \sqrt{B} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00097) и гранта Президента РФ для молодых ученых (грант № МД-300.2011.1).

Из последнего неравенства (1.2) с учетом принципа равномерной ограниченности Банаха–Штейнгауза заключаем, что система Φ является бесселевой тогда и только тогда, когда она является системой сходимости в H для ℓ^2 , т.е. если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ сходится в H всякий раз, когда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$.

Другой критерий бесселевости системы функций $\Phi = \{\varphi_n(t) : t \in [0, 1]\}_{n=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве $H = L^2[0, 1]$ дает классический результат Шура [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система функций $\Phi = \{\varphi_n(t) : t \in [0, 1]\}_{n=1}^{\infty}$ из пространства $L^2[0, 1]$ называется *продолжимой*, если существует ортонормированная система $\Psi = \{\psi_n(t) : t \in [0, a]\}$ в пространстве $L^2[0, a]$, $a > 1$, такая, что

$$\varphi_n(t) = \sqrt{B} \psi_n(t) \quad \text{для всех } t \in [0, 1] \text{ и всех } n = 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА ШУРА. Для того, чтобы система функций Φ была продолжимой, необходимо и достаточно, чтобы она была бесселевой.

Различные доказательства теоремы Шура приведены в статьях Радемахера [3], Никишина [4], а также в книгах Качмажа, Штейнгауза [5], Кашина, Саакяна [6]. Вопрос о продолжении системы функций до полной ортонормированной системы рассмотрен в работах Козлова [7] и Олевского [8]. В недавней работе Новикова [9] доказаны обобщения теорем Шура и Олевского.

Для систем элементов абстрактного гильбертова пространства теорема Шура может быть сформулирована в следующем виде. Для того, чтобы система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ была бесселевой в гильбертовом пространстве H , необходимо и достаточно, чтобы существовали объемлющее гильбертово пространство $\mathcal{H} \supset H$, включающее в себя исходное пространство H в качестве замкнутого подпространства, и ортонормированная система $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathcal{H}$ такие, что

$$\varphi_n = \sqrt{B} \cdot \pi \psi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

где $\pi : \mathcal{H} \rightarrow H$ – оператор ортогонального проектирования из $\mathcal{H}$ на H .

В таком виде теорема Шура становится близка к хорошо известной в теории функций и функциональном анализе теореме Наймарка [10]: для того, чтобы система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ была жестким фреймом в гильбертовом пространстве H , т.е. существовала постоянная $B > 0$ такая, что для любого вектора $h \in H$ выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 = B \|h\|_H^2,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали объемлющее гильбертово пространство $\mathcal{H} \supset H$, включающее в себя исходное пространство H в качестве замкнутого подпространства, и полная ортонормированная система $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства $\mathcal{H}$ такие, что выполняются проекционные соотношения (1.3).

Заметим, что теорема Наймарка сформулирована в современной терминологии, введенной в 1952 г. Даффином, Шеффером [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H называется *фреймом*, если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любого вектора $h \in H$ выполняются неравенства

$$A \|h\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \varphi_n \rangle|^2 \leq B \|h\|_H^2.$$

Проекционное описание фреймов общего вида получено, независимо, в работах Кашина, Куликовой [12] и Касаззы, Хана, Ларсона [13]: для того, чтобы система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ была фреймом в гильбертовом пространстве H , необходимо и достаточно, чтобы существовали объемлющее гильбертово пространство $\mathcal{H} \supset H$, включающее в себя пространство H в качестве замкнутого подпространства, и базис Рисса $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства $\mathcal{H}$ такие, что

$$\varphi_n = \pi\psi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Аналогичная характеристика полных бесселевых систем дана в работе Чая [14]: всякая полная бесселева система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве H является ортогональной проекцией ω -линейно независимой полной бесселевой системы $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ из объемлющего гильбертова пространства $\mathcal{H} \supset H$.

В настоящей работе рассматриваются бесселевы системы элементов банахова пространства. Для них получены аналоги указанных выше результатов работ [1], [2], [9] и [14]. Обобщенные аналоги проекционных результатов работ [10], [12], [13] для фреймов в банаховом пространстве установлены автором настоящей работы в [15].

2. Основные определения и вспомогательные утверждения. Пусть F – комплексное банахово пространство и $G = F^*$ – сопряженное пространство всех непрерывных линейных функционалов на F . Как обычно, билинейная форма $\langle f, g \rangle$ задает значение функционала $g \in G$ на векторе $f \in F$.

Пусть X – банахово пространство, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что X – модельное пространство, если система канонических ортов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в X . При этом базис E будем называть естественным базисом модельного пространства.

Напомним, что i -й канонический орт $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Модельными пространствами являются классические пространства последовательностей ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, пространства последовательностей Орлича ℓ_m , где порождающая функция $M(t)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, пространства последовательностей Лоренца $d(w, p)$, а также некоторые их весовые аналоги, пространства со смешанными нормами, прямые суммы и многие другие пространства (см. [16]). Пространство ℓ^∞ не является модельным, так как оно не сепарабельно. Пространство c сепарабельно, но не является модельным пространством, поскольку его базисом $E' = \{e_0\} \cup E$ служит система канонических ортов E с присоединенной единицей $e_0 = (1, 1, \dots)$. В то же время, c_0 – модельное пространство.

Укажем общий способ построения модельных пространств. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ – система ненулевых элементов банахова пространства F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пространством коэффициентов системы Φ называется линейное пространство X_Φ , состоящее из всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$, снабженное нормой

$$\|x\|_{X_\Phi} = \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k \right\|_F.$$

ЛЕММА 1. Пространство коэффициентов X_Φ системы Φ является модельным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что пространство коэффициентов X_Φ – полное. Для этого рассмотрим банахово пространство $c(F)$ сходящихся векторных последовательностей $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n=1}^\infty \subset F$ с нормой $\|\mathbf{f}\|_\infty = \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_F$. Для каждой числовой последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ положим

$$S_n x = \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если $x \in X_\Phi$, то векторная последовательность $\mathbf{S}x = \{S_n x\}_{n=1}^\infty \subset F$ принадлежит пространству $c(F)$, причем $\|\mathbf{S}x\|_\infty = \|x\|_{X_\Phi}$ согласно определению 5. Тем самым определен изометрический оператор $\mathbf{S}: X_\Phi \rightarrow c(F)$. Образ $\mathbf{S}(X_\Phi)$ этого оператора состоит в точности из тех $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n=1}^\infty$, для которых $f_n - f_{n-1} \in [\varphi_n]$, $n = 1, 2, \dots$, где полагаем $f_0 = 0$ и $[\varphi_n]$ – одномерное подпространство в F , натянутое на φ_n . Покажем, что $\mathbf{S}(X_\Phi)$ – замкнутое подпространство. Пусть

$$\mathbf{f} = \{f_n\}_{n=1}^\infty \in c(F), \quad \mathbf{f}^{(m)} = \{f_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty \in \mathbf{S}(X_\Phi), \quad m = 1, 2, \dots,$$

причем $\mathbf{f} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{f}^{(m)}$. Тогда

$$f_n - f_{n-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} f_n^{(m)} - f_{n-1}^{(m)} \in [\varphi_n] \quad \text{для всех } n.$$

Отсюда $\mathbf{f} \in \mathbf{S}(X_\Phi)$. Итак, пространство X_Φ изометрично замкнутому подпространству $\mathbf{S}(X_\Phi)$ полного пространства $c(F)$, а потому само является полным.¹

Теперь докажем, что система канонических ортов $E = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ образует базис в X_Φ . Для каждого $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in X_\Phi$ находим

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_{X_\Phi} = \sup_{p \geq 1} \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \varphi_k \right\|_F \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

по критерию Коши сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty x_n \varphi_n$. Таким образом, справедливо представление $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$. Единственность коэффициентов такого представления следует из непрерывности координатных функционалов $l_n(x) = x_n$, $n = 1, 2, \dots$, образующих биортогонально сопряженную систему к $E = \{e_n\}_{n=1}^\infty$: $l_i(e_j) = \delta_{ij}$. В самом деле, имеем $\|l_n\| \leq 2\|\varphi_n\|_F^{-1}$, поскольку

$$|l_n(x)| = |x_n| = \frac{1}{\|\varphi_n\|_F} \|x_n \varphi_n\|_F = \frac{1}{\|\varphi_n\|_F} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \varphi_k \right\|_F \leq \frac{2}{\|\varphi_n\|_F} \|x\|_{X_\Phi}.$$

Нетрудно видеть, что для модельного пространства X имеем $X = X_E$, т.е. каждое модельное пространство может быть получено как пространство коэффициентов некоторой системы.

Каждый непрерывный линейный функционал l на модельном пространстве X однозначно определяется последовательностью своих значений $\{l(e_n)\}_{n=1}^\infty$ на элементах естественного базиса E . Следовательно, сопряженное пространство X^* к модельному пространству X изометрически изоморфно банахову пространству Y , состоящему из всех числовых последовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty$, для которых конечна

¹ Следует отметить, что проверка полноты пространства коэффициентов базиса банахова пространства является этапом доказательства теоремы Банаха о равномерной ограниченности частных сумм базисного разложения (см., например, [6; с. 492–493]).

норма

$$\|y\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| < \infty.$$

При этом билинейная форма $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ приводит в двойственность пару (X, Y) или, другими словами, доставляет общий вид непрерывного линейного функционала на модельном пространстве X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ – *бесселева система* в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X , если существует постоянная $B > 0$ такая, что для любой числовой последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ сходится по норме пространства F и выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \right\|_F \leq B \|x\|_X. \quad (2.1)$$

Если в (2.1) $B = 1$, то будем говорить, что Φ является *1-бесселевой системой*.

ЛЕММА 2. Произвольная система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ ненулевых элементов банахова пространства F является 1-бесселевой системой в F относительно своего пространства коэффициентов X_{Φ} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \right\|_F \leq \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k \right\|_F = \|x\|_{X_{\Phi}}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ – система ненулевых элементов банахова пространства F и X – некоторое модельное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) система Φ является бесселевой в F относительно X ;
- 2) существует постоянная $B > 0$ такая, что для любого $n = 1, 2, \dots$ и любого числового набора $\{x_k\}_{k=1}^n$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k \right\|_F \leq B \left\| \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_X.$$

- 3) тождественное вложение $X \hookrightarrow X_{\Phi}$ непрерывно;
- 4) имеет место теоретико-множественное включение $X \subset X_{\Phi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна. Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$. Тогда

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \varphi_k \right\|_F \leq B \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k e_k \right\|_X \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $p \geq 1$, так как $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис в X . Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ сходится по норме пространства F , т.е. $x \in X_{\Phi}$. Кроме того, имеем

$$\|x\|_{X_{\Phi}} = \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k \right\|_F \leq B \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_X \leq BC \|x\|_X,$$

где $C > 0$ – постоянная Банаха естественного базиса модельного пространства X . Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) доказана. Очевидно, что 3) $\Rightarrow$ 4). Надо доказать, что 4) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что $X \subset X_\Phi$. В таком случае равенство $Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ корректно определяет линейный оператор $S: X \rightarrow F$, который является сильным пределом последовательности конечномерных операторов $S_n x = \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k$, $n = 1, 2, \dots$. Так как координатные функционалы $x_k = l_k(x)$ непрерывны на модельном пространстве X , то $\|S_n\|_{X \rightarrow F} < \infty$. Тогда $\|S\|_{X \rightarrow F} = \sup_{n \geq 1} \|S_n\|_{X \rightarrow F} < \infty$ по принципу равномерной ограниченности Банаха–Штейнгауза. Окончательно находим

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \right\|_F = \|Sx\|_F \leq \|S\|_{X \rightarrow F} \|x\|_X.$$

Итак, система Φ бесселева в F относительно X с постоянной $B = \|S\|_{X \rightarrow F}$ в неравенстве (2.1). Импликация 4) $\Rightarrow$ 1) доказана.

Напомним, что система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ называется *системой сходимости* в банаховом пространстве F для класса последовательностей X , если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ сходится в F всякий раз, когда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$. Эквивалентность условий 1) и 4) леммы 3 показывает, что имеет место следующая

ЛЕММА 4. Система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ является бесселевой в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X в том и только том случае, когда она является системой сходимости в F для X .

Теперь дадим основанный на двойственности критерий бесселевости системы.

ЛЕММА 5. Система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ является бесселевой в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X тогда и только тогда, когда существует постоянная $B > 0$ такая, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \leq B \|g\|_G. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость почти очевидна. В самом деле, имеем

$$\|\{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \langle \varphi_n, g \rangle \right| \leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \right\|_F \|g\|_G \leq B \|g\|_G,$$

где в последнем неравенстве учли (2.1). Докажем достаточность.

Обозначим X_0 – линейное многообразие всех финитных числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку X – модельное пространство, то X_0 плотно в X . Определим линейный оператор $S_0: X_0 \rightarrow F$ равенством

$$S_0 x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n.$$

Для каждого $x \in X_0$ на основании неравенства (2.2) находим

$$\begin{aligned} \|S_0 x\|_F &= \sup_{\|g\|_G \leq 1} |\langle S_0 x, g \rangle| = \sup_{\|g\|_G \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \langle \varphi_n, g \rangle \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|_G \leq 1} \|x\|_X \|\{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \leq B \|x\|_X. \end{aligned}$$

Итак, S_0 – ограниченный линейный оператор с плотной в X областью определения. Следовательно, существует единственное продолжение оператора S_0 до ограниченного линейного оператора $S: X \rightarrow F$. При этом $\|S\|_{X \rightarrow F} = \|S_0\|_{X_0 \rightarrow F} \leq B$ и $Se_n = S_0e_n = \varphi_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Вычислим

$$Sx = S \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n Se_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n.$$

Окончательно будем иметь

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \right\|_F = \|Sx\|_F \leq B \|x\|_X.$$

Поэтому Φ – бесселева система в F относительно X . Достаточность доказана.

Здесь следует отметить, что неравенства (2.1) и (2.2) эквивалентны так же, как и для классических бesselевых систем в гильбертовом пространстве эквивалентны неравенства (1.1) и (1.2). При этом неравенство (2.2) является аналогом неравенства Бесселя (1.1).

Оператор $S: X \rightarrow F$, заданный равенством

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n,$$

называется *оператором синтеза*, ассоциированным с бesselевой системой Φ . Далее, оператор $R: G \rightarrow Y$, определенный посредством равенства

$$Rg = \{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty},$$

называется *оператором анализа*. При этом $R = S^*$, т.е. оператор анализа является сопряженным к оператору синтеза. Действительно, для всех $x \in X$ и всех $g \in G$ получаем

$$\langle Sx, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \langle \varphi_n, g \rangle = \langle x, Rg \rangle.$$

ЛЕММА 6. Система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ является бesselевой в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X в том и только том случае, когда существует ограниченный линейный оператор $S: X \rightarrow F$ такой, что

$$Se_n = \varphi_n \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots$$

При этом $\|S\|_{X \rightarrow F} \leq B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна, поскольку искомым оператором S служит ассоциированный с бesselевой системой Φ оператор синтеза.

Достаточность. Для любого $n = 1, 2, \dots$ и любых $x_1, \dots, x_n$ находим

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k \right\|_F = \left\| S \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_F \leq B \left\| \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|_X.$$

В силу эквивалентности условий 1) и 2) леммы 3 система Φ является бesselевой в F относительно X .

3. Операторная конструкция продолжения бesselевой системы. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ – бesselева система в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X . Обозначим $\mathcal{F} = F \oplus Z$ прямую сумму пространства F и некоторого банахова пространства Z , снабженную нормой

$$\|(f, z)\|_{\mathcal{F}} = \max\{\|f\|_F, \|z\|_Z\}.$$

Определим оператор $U: X \rightarrow \mathcal{F}$ посредством равенства

$$Ux = (Sx, Tx),$$

где $S: X \rightarrow F$ – оператор синтеза, ассоциированный с бesselевой системой Φ и $T: X \rightarrow Z$ – некоторый линейный ограниченный оператор. Пусть $P: \mathcal{F} \rightarrow F$ – проекция прямой суммы на первое слагаемое. Очевидно, что

$$S = PU, \quad (3.1)$$

каков бы ни был оператор $T: X \rightarrow Z$. отождествим каждую упорядоченную пару $(f, 0) \in \mathcal{F}$ с вектором $f \in F$. Тогда пространство F будет замкнутым подпространством объемлющего пространства $\mathcal{F} \supset F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Систему $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ элементов банахова пространства $\mathcal{F}$, определенную посредством равенств

$$\psi_n = Ue_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

будем называть *продолжением* бesselевой системы $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$.

Из равенств (3.1) и (3.2) с учетом леммы 6 следует, что

$$\varphi_n = P\psi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Последние соотношения показывают, что система Φ является проекцией системы Ψ .

В равенствах (3.2) по-прежнему $E = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ – естественный базис модельного пространства X . Сразу заметим, что продолжение Ψ бesselевой системы Φ снова будет бesselевой системой, так как $\|U\|_{X \rightarrow \mathcal{F}} = \max\{\|S\|_{X \rightarrow F}, \|T\|_{X \rightarrow Z}\}$. Однако возможность выбора пространства Z и оператора $T: X \rightarrow Z$ в предложенной конструкции продолжения позволяет наделить бesselеву систему Ψ дополнительными свойствами.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T: X \rightarrow Z$ – изометрический оператор и $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ – 1-бesselева система в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X .

Тогда ее продолжение $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ является базисной последовательностью² в банаховом пространстве $\mathcal{F}$, изометрически эквивалентной естественному базису $E = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ модельного пространства X .

²Напомним, что последовательность элементов банахова пространства называется *базисной*, если она образует базис в замыкании своей линейной оболочки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим L_Ψ замыкание линейной оболочки системы Ψ в пространстве $\mathcal{F}$. Покажем, что оператор $U: X \rightarrow \mathcal{F}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства X на свой образ $U(X) = L_\Psi$. Во-первых, имеем

$$\|Ux\|_{\mathcal{F}} = \max\{\|Sx\|_F, \|Tx\|_Z\} = \max\{\|Sx\|_X, \|x\|_X\} = \|x\|_X,$$

так как $\|Tx\|_Z = \|x\|_X$ и $\|Sx\|_F \leq \|x\|_X$ ввиду изометричности оператора T и 1-бесселевости системы Φ . Таким образом, U – изометрический оператор. Поэтому его образ $U(X)$ является замкнутым подпространством в $\mathcal{F}$. Из равенств (3.2) следует включение $U(X) \subset L_\Psi$. Поскольку $\Psi \subset U(X)$ и L_Ψ – наименьшее замкнутое подпространство, для которого $\Psi \subset L_\Psi$, то $U(X) = L_\Psi$. Итак, оператор U устанавливает изометрический изоморфизм пространств X и L_Ψ . В силу (3.2) система Ψ является базисом пространства L_Ψ , изометрически эквивалентным естественному базису E модельного пространства X . Значит, Ψ – базисная последовательность в $\mathcal{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Произвольная система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset F \setminus \{0\}$ ненулевых элементов банахова пространства F является проекцией базисной последовательности $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ из объемлющего банахова пространства $\mathcal{F} \supset F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 система Φ является 1-бесселевой в F относительно X_Φ . Пусть $Z = X_\Phi$ и $T: X_\Phi \rightarrow X_\Phi$ – произвольный изометрический оператор. Тогда по теореме 1 продолжение Ψ системы Φ является базисной последовательностью в объемлющем пространстве $\mathcal{F}$. При этом $\varphi_n = P\psi_n$, $n = 1, 2, \dots$, для непрерывного линейного проектора $P: \mathcal{F} \rightarrow F$ из $\mathcal{F}$ на F .

Возникает естественный вопрос: при каких условиях продолжение Ψ является базисом объемлющего пространства? Ответ получен в статье автора [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Скажем, что система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ элементов банахова пространства F является X -продолжимой, если существуют объемлющее банахово пространство $\mathcal{F} \supset F$, включающее в себя исходное пространство F в качестве замкнутого подпространства, базисная последовательность $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $\mathcal{F}$, изометрически эквивалентная естественному базису $E = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ модельного пространства X , непрерывный линейный проектор $P: \mathcal{F} \rightarrow F$ из $\mathcal{F}$ на F и постоянная $B > 0$ такие, что

$$\varphi_n = B \cdot P\psi_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 2. *Для того, чтобы система Φ элементов банахова пространства F была X -продолжимой, необходимо и достаточно, чтобы она являлась бесселевой системой в F относительно X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Имеем

$$\psi_n = Ve_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

для некоторого изометрического оператора $V: X \rightarrow \mathcal{F}$. Из (3.3) получаем $\varphi_n = B \cdot PVe_n$, $n = 1, 2, \dots$. По лемме 6 система Φ бесселева в F относительно X .

Достаточность. Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ – бесселева система F относительно X с постоянной $B > 0$ в неравенстве (2.1), то система $\{\varphi_n/B\}_{n=1}^\infty$ 1-бесселева. На основании теоремы 1 заключаем, что ее продолжение $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ является искомой системой при условии изометричности оператора $T: X \rightarrow Z$. Например, можно взять $Z = X$ и $T = I$ – тождественный оператор в X .

Следует отметить, что если $F = G = H$ – гильбертово пространство и $X = Y = \ell^2$, то, несколько изменив конструкцию продолжения бесселевой системы Φ , мы можем получить теорему Шура как частный случай теорем 1 и 2. Именно, прямую сумму $\mathcal{H} = H \oplus \ell^2$ гильбертовых пространств следует снабдить ассоциированной со скалярным произведением нормой

$$\|(h, x)\|_{\mathcal{H}} = (\|h\|_H^2 + \|x\|_2^2)^{1/2}$$

и в качестве оператора $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ выбрать

$$T = (B \cdot I - RS)^{1/2}$$

– квадратный корень из неотрицательного самосопряженного оператора $B \cdot I - RS \geq 0$, где I – тождественный оператор в ℓ^2 и $S: \ell^2 \rightarrow H$, $R = S^*: H \rightarrow \ell^2$ – операторы синтеза и анализа соответственно. Замечая, что

$$\|Tx\|_2^2 = \langle T^2x, x \rangle = \langle B \cdot I - RSx, x \rangle = B\langle x, x \rangle - \langle S^*Sx, x \rangle = B\|x\|_2^2 - \|Sx\|_H^2,$$

откуда $\|Ux\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{B}\|x\|_2$, находим, что система $\{\psi_n/\sqrt{B}\}_{n=1}^{\infty}$ будет искомой ортонормированной системой пространства $\mathcal{H}$ как базисная последовательность, изометрически эквивалентная естественному базису пространства ℓ^2 . Здесь также следует учесть, что проекционные соотношения (3.3) для гильбертовых пространств будут иметь вид (1.3). Рассмотренное простое доказательство теоремы Шура предложено Новиковым [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Говорят, что система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F является ω -линейно независимой относительно X , если из равенства $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n = 0$, в котором числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству X , следует, что $x_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесселева система в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X , $S: X \rightarrow F$ – оператор синтеза, ассоциированный с системой Φ , и $T: X \rightarrow Z$ – ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий условию $S^{-1}(0) \cap T^{-1}(0) = \{0\}$.

Тогда продолжение $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ системы Φ является ω -линейно независимой бесселевой системой в $\mathcal{F}$ относительно X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n = 0.$$

В таком случае

$$Ux = U \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n Ue_n = 0$$

ввиду (3.2). Отсюда $Sx = 0$ и $Tx = 0$. По условию теоремы получаем, что $x = 0$.

Как обычно, обозначим $L^{\perp} = \{y \in Y : \langle x, y \rangle = 0 \text{ для всех } x \in L\}$ – аннулятор множества $L \subset X$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – полная бесселева система в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X , $S: X \rightarrow F$ – оператор синтеза, ассоциированный с системой Φ , и $T: X \rightarrow Z$ – ограниченный линейный оператор с плотной в Z областью значений $\overline{T(X)} = Z$, удовлетворяющий условию $[S^{-1}(0)]^{\perp} \cap [T^{-1}(0)]^{\perp} = \{0\}$.

Тогда продолжение $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ системы Φ является полной бесселевой системой в $\mathcal{F}$ относительно X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопряженным к пространству $\mathcal{F} = F \oplus Z$ будет пространство $\mathcal{G} = G \oplus Z^*$. При этом билинейная форма

$$\langle (f, z), (g, z^*) \rangle = \langle f, g \rangle + \langle z, z^* \rangle$$

приводит в двойственность дуальную пару $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Здесь и далее $f \in F$, $g \in G$, $z \in Z$ и $z^* \in Z^*$. Теперь заметим, что

$$[S^{-1}(0) + T^{-1}(0)]^{\perp} = [S^{-1}(0)]^{\perp} \cap [T^{-1}(0)]^{\perp} = \{0\}.$$

Это означает, что множество $L = S^{-1}(0) + T^{-1}(0)$ плотно в X . Тогда $T(L)$ плотно в $T(X)$. В свою очередь, $T(X)$ плотно в Z по условию теоремы. Следовательно, $T(L)$ плотно в Z . Ясно, что

$$T(L) = T(S^{-1}(0) + T^{-1}(0)) = T(S^{-1}(0)).$$

Предположим, что непрерывный линейный функционал (g, z^*) на пространстве $\mathcal{F}$ обращается в нуль на каждом элементе системы $\psi_n = (Se_n, Te_n)$, т.е.

$$\langle Se_n, g \rangle + \langle Te_n, z^* \rangle = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Требуется доказать равенства $g = 0$ и $z^* = 0$, что будет означать полноту бесселевой системы Ψ . Разложим произвольный вектор $x \in X$ по естественному базису $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Получим

$$\langle Sx, g \rangle + \langle Tx, z^* \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (\langle Se_n, g \rangle + \langle Te_n, z^* \rangle) = 0.$$

Отсюда для всех $x \in S^{-1}(0)$ находим $\langle Tx, z^* \rangle = 0$. Поскольку множество $T(S^{-1}(0))$ плотно в Z , то $z^* = 0$. Таким образом, имеем $\langle Se_n, g \rangle = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Наконец, из полноты системы элементов $\varphi_n = Se_n$ следует, что $g = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пространством коэффициентов нуль-рядов $N = N(\Phi, X)$ бесселевой системы $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X назовем следующее замкнутое подпространство $N \subset X$:

$$N = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X : \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n = 0 \right\}.$$

Понятно, что $N = S^{-1}(0)$ – ядро оператора синтеза $S: X \rightarrow F$, ассоциированного с бесселевой системой Φ . Отметим, что условие дополняемости подпространства N в модельном пространстве X играет важную роль при получении проекционных характеристик систем (см. [15]). Следующая теорема является обобщенным аналогом сформулированного в п. 1 результата Чайя [14].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – полная бесселева система в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X , пространство коэффициентов нуль-рядов N которой дополняемо в модельном пространстве X . Пусть, далее, $Z = N$ и $T: X \rightarrow N$ – непрерывный линейный проектор из X на N .

Тогда продолжение $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ системы Φ является ω -линейно независимой полной бесселевой системой в F относительно X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = M \oplus N$ и $M = T^{-1}(0)$, т.е. T – проекция из X на N вдоль M . Тогда $Y = M^* \oplus N^*$, причем $M^* = N^{\perp}$ и $N^* = M^{\perp}$. Следовательно, $S^{-1}(0) \cap T^{-1}(0) = N \cap M = \{0\}$ и $[S^{-1}(0)]^{\perp} \cap [T^{-1}(0)]^{\perp} = N^{\perp} \cap M^{\perp} = M^* \cap N^* = \{0\}$. Осталось применить теоремы 3 и 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. К. Бари, “Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве”, *Математика. Том IV*, Уч. записки Моск. гос. ун-та, **148**, Изд-во Моск. ун-та, 1951, 69–107.
- [2] I. Schur, “Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen”, *Math. Z.*, **1**:2-3 (1918), 184–207.
- [3] H. Rademacher, “Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen”, *Math. Ann.*, **87**:1-2 (1922), 112–138.
- [4] Е. М. Никишин, “О сходимости некоторых функциональных рядов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:1 (1967), 15–26.
- [5] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958.
- [6] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [7] В. Я. Козлов, “О локальной характеристике полной ортогональной нормированной системы функций”, *Матем. сб.*, **23**:3 (1948), 441–474.
- [8] А. М. Олевский, “О продолжении последовательности функций до полной ортонормированной системы”, *Матем. заметки*, **6**:6 (1969), 737–747.
- [9] С. Я. Новиков, “Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 893–903.
- [10] М. А. Наймарк, “Спектральные функции симметрического оператора”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **4**:3 (1940), 277–318.
- [11] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, “A class of nonharmonic Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72** (1952), 341–366.
- [12] Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова, “Замечание об описании фреймов общего вида”, *Матем. заметки*, **72**:6 (2002), 941–945.
- [13] P. G. Casazza, D. Han, D. R. Larson, “Frames for Banach spaces”, *The Functional and Harmonic Analysis of Wavelets and Frames*, Contemp. Math., **247**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 149–182.
- [14] W. Czała, “Remark on Naimark’s duality”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136**:3 (2008), 867–871.
- [15] П. А. Терехин, “Системы представления и проекции базисов”, *Матем. заметки*, **75**:6 (2004), 944–947.
- [16] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. I. Sequence Spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **92**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

П. А. Терехин

Саратовский государственный университет

им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Поступило

22.05.2009