Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Невский, Об одном свойстве n -мерного симплекса,
Матем. заметки, 2010, том 87, выпуск 4, 580–593

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:56:19

Об одном свойстве n -мерного симплекса

М. В. Невский

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и S – симплекс в $\mathbb{R}^n$, содержащий куб $[0, 1]^n$. Доказывается, что для некоторого $i = 1, \dots, n$ симплекс S содержит отрезок длины n , параллельный i -й координатной оси. Отмечается связь с вопросами, возникающими при линейной интерполяции непрерывных функций n переменных.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В этой статье $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \dots, x_n)$. Все рассматриваемые многогранники являются подмножествами $\mathbb{R}^n$. Через Q_n обозначается n -мерный единичный куб $[0, 1]^n$.

Рассмотрим n -мерный симплекс S^* , ограниченный гиперплоскостями $x_i = 0$ и $\sum x_i = n$. Очевидно, $Q_n \subset S^*$. Для любого $i = 1, \dots, n$ симплекс S^* содержит отрезок длины n , принадлежащий (параллельный) i -й координатной оси. Не каждый симплекс, содержащий Q_n , имеет это свойство. В статье дается ответ на вопрос о существовании в симплексе указанного отрезка хотя бы для одного i . Мы докажем следующее утверждение.

Пусть S – n -мерный симплекс. Если $Q_n \subset S$, то для некоторого $i = 1, \dots, n$ симплекс S содержит отрезок длины n , параллельный оси x_i .

Это утверждение в виде гипотезы было сформулировано в [1] при исследовании интерполяции функций n переменных. По мнению автора оно имеет и самостоятельный интерес.

Дадим необходимые определения, а также более подробно опишем содержание статьи. Ниже $e_1, \dots, e_n$ суть канонический базис $\mathbb{R}^n$, $e = (1, \dots, 1)$. Если G – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, то $\text{ver}(G)$ обозначает совокупность его вершин, $\text{int}(G)$ – множество его внутренних точек, $\text{vol}(G)$ – объем, σG – результат гомотетии G относительно центра тяжести с коэффициентом σ . Под *транслятом* понимается результат некоторого параллельного переноса. Через $C(Q_n)$ обозначается пространство непрерывных функций $f: Q_n \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|;$$

$\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ есть пространство многочленов от n переменных степени ≤ 1 . Пусть S – невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$, т.е. такой, что $\text{vol}(S) \neq 0$. Обозначим вершины S

через $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $j = 1, \dots, n+1$. Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Если $\Delta := \det(\mathbf{A})$, то $\text{vol}(S) = |\Delta|/n!$. Обозначим через $\Delta_j(x)$ определитель, который получается из Δ заменой j -й строки на строку $(x_1, \dots, x_n, 1)$. Многочлены $\lambda_j(x) := \Delta_j(x)/\Delta$ из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обладают свойством $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$ (здесь δ_j^k – символ Кронекера). Коэффициенты λ_j составляют j -й столбец $\mathbf{A}^{-1}$. Полагаем $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$, т.е.

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}. \quad (1.1)$$

Из невырожденности $\mathbf{A}^{-1}$ следует, что при $i = 1, \dots, n+1$ верно $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \neq 0$.

Для набора $g_1, \dots, g_{n+1} \in \mathbb{R}$ существует единственный $g \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ со свойством $g(x^{(j)}) = g_j$. Справедлив следующий аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n+1} g_j \lambda_j(x). \quad (1.2)$$

При каждом $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) x^{(j)} = x, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1. \quad (1.3)$$

Числа $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ являются *барицентрическими координатами x относительно симплекса S* (см. [2; гл. 12]). В силу (1.3) хотя бы одно из них положительно. Уравнения $\lambda_j(x) = 0$ задают $(n-1)$ -мерные гиперплоскости, содержащие грани S , а для $x \in \text{int}(S)$ выполняется $0 < \lambda_j(x) < 1$. Имеет место представление

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, n+1\}. \quad (1.4)$$

Пусть x – точка границы S . Минимальная размерность грани S , которой принадлежит x , равняется $n - k$ тогда и только тогда, когда среди $\lambda_j(x)$ имеется ровно k чисел, равных нулю ($1 \leq k \leq n$). Обозначим через $d_i(S)$ максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного оси x_i . Величину $d_i(S)$ будем называть *i -м осевым диаметром S* . Понятие аксиального или, иначе говоря, осевого диаметра (axial diameter) выпуклого тела было введено Скоттом [3], [4]. Мы докажем, что для невырожденного симплекса S

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|.$$

Пусть

$$\xi(S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}, \quad d(S) := \max\{d_i(S) : 1 \leq i \leq n\}.$$

В предположении $Q_n \not\subset S$ справедливы неравенства

$$\xi(S) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}, \quad \xi(S)d(S) \geq n. \quad (1.5)$$

Если $Q_n \subset S$, то выполняются аналоги неравенств (1.5) с 1 вместо $\xi(S)$. В этом случае $d(S) \geq n$, что эквивалентно сформулированному выше свойству симплекса, содержащего куб.

Если $S \subset Q_n$, то $\xi(S)$ оценивается через норму интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ по системе узлов $x^{(j)}$. Проектор P определяется равенствами

$$Pf(x^{(j)}) = f_j := f(x^{(j)}), \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Пусть $\|P\|$ есть норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Из (1.2) следует, что

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x), \quad \|P\| = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Неравенства (1.5) позволяют получить новые оценки для $\|P\|$. Приводятся и некоторые другие следствия.

В формулировках утверждений статьи S есть невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$.

2. Вычисление $\xi(S)$. Через ab обозначается евклидово расстояние между точками $a, b \in \mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 2.1. Если $Q_n \not\subset S$, то

$$\xi(S) = (n+1) \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая $S \subset Q_n$ (2.1) доказано в [1; лемма 2.1]. Примененное там рассуждение подходит и к рассматриваемой более общей ситуации, но вместо записи $x \in \text{ver}(Q_n)$ следует использовать $x \in \text{ver}(Q_n) \setminus S$. На итоговом выражении для $\xi(S)$ это изменение не отразится, так как для $x \in S$ при любом j справедливо $\lambda_j(x) \geq 0$.

Равенство (2.1) станет более наглядным, если записать его в виде

$$\xi(S) = \max_{x \in \text{ver}(Q_n) \setminus S} \max_{1 \leq j \leq n+1} \frac{\lambda_j(c) - \lambda_j(x)}{\lambda_j(c) - \lambda_j(b)}. \quad (2.2)$$

Здесь c – центр тяжести S , b – точка пересечения отрезка $[c, x]$ с границей S . В [1] доказано, что для экстремальных j и x точка b принадлежит грани S , противоположной $x^{(j)}$; тогда $\lambda_j(b) = 0$. Так как $\lambda_j(c) = 1/(n+1)$, то

$$(n+1)(-\lambda_j(x)) + 1 = \frac{\lambda_j(c) - \lambda_j(x)}{\lambda_j(c) - \lambda_j(b)} = \frac{cx}{cb}.$$

Поэтому (2.2) эквивалентно (2.1). Лемма 2.1 доказана.

3. Свойства $d_i(S)$ и максимального в S отрезка, параллельного оси x_i . Пусть D – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Для любого $i = 1, \dots, n$ множество D может быть представлено как объединение отрезков, параллельных i -й координатной оси. Перенесем каждый такой отрезок вдоль содержащей его прямой таким образом, чтобы конец полученного отрезка принадлежал гиперплоскости $x_i = 0$, а сам он располагался в полупространстве $x_i \geq 0$. Обозначим через $R_i(D)$ объединение всех перенесенных отрезков. Множество $R_i(D)$ есть результат применения к D операции R_i , введенной Радзишевски [5]. Операция R_i переводит D в выпуклое тело $R_i(D)$, причем $\text{vol}(R_i(D)) = \text{vol}(D)$. Операция R_i определяется по аналогии с классической симметризацией Штейнера (см. [6; § 15]) относительно гиперплоскости $x_i = 0$. Результат последней операции, примененной к D , также есть объединение отрезков, полученных переносом отрезков D , параллельных оси x_i . Но при симметризации Штейнера рассматриваемой гиперплоскости принадлежит середина каждого перенесенного отрезка.

Для $n \geq 2$ обозначим через $V_i(S)$ проекцию симплекса S на гиперплоскость $x_i = 0$. Очевидно, $V_i(S)$ есть выпуклая оболочка проекций вершин S на эту гиперплоскость. Пусть $\Sigma_i(S)$ есть $(n-1)$ -мера $V_i(S)$, σ_{ij} есть $(n-1)$ -мера проекции $(n-1)$ -мерной грани S , противоположной вершине $x^{(j)}$, на гиперплоскость $x_i = 0$. Тогда

$$\Sigma_i(S) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}. \quad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $1 \leq i \leq n$. Для i -го осевого диаметра S верно равенство

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (3.2)$$

В S существует ровно один отрезок длины $d_i(S)$, параллельный оси x_i . Середина этого отрезка совпадает с точкой V

$$y^{(i)} := \sum_{j=1}^{n+1} m_{ij} x^{(j)}, \quad (3.3)$$

где

$$m_{ij} := \frac{|l_{ij}|}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}. \quad (3.4)$$

Каждая $(n-1)$ -мерная грань S содержит по крайней мере один из концов указанного отрезка. Сумма размерностей двух минимальных по включению граней S , содержащих концы отрезка, не превосходит $n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $n = 1$. Тогда $S = [x^{(1)}, x^{(2)}]$, $i = 1$,

$$\lambda_1(x) = \frac{x^{(2)} - x}{x^{(2)} - x^{(1)}}, \quad \lambda_2(x) = \frac{x - x^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}}, \quad d_1(S) = x^{(2)} - x^{(1)}.$$

Как нетрудно видеть, обе части (3.2) совпадают. Так как $m_{11} = m_{12} = 1/2$, то (3.3) имеет вид $y^{(1)} = (x^{(1)} + x^{(2)})/2$. Пусть теперь $n \geq 2$. Положим

$$\delta_i(S) := \frac{n \cdot \text{vol}(S)}{\Sigma_i(S)}.$$

Напомним, что $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \neq 0$. Установим последовательно равенства

$$\frac{1}{\delta_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|, \quad \delta_i(S) = d_i(S). \quad (3.5)$$

Из них и будет следовать (3.2).

Учитывая (3.1), имеем

$$\frac{1}{\delta_i(S)} = \frac{\Sigma_i(S)}{n \cdot \text{vol}(S)} = \frac{(n-1)!}{|\Delta|} \cdot \Sigma_i(S) = \frac{(n-1)!}{|\Delta|} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}. \quad (3.6)$$

Из связи определителей и объемов следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \text{abs} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot |\Delta_1(e_1) - \Delta_1(0)| = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |\lambda_1(e_1) - \lambda_1(0)| = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |l_{11}|. \end{aligned}$$

Аналогично при данном i и $j = 1, \dots, n+1$

$$\sigma_{ij} = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |\lambda_j(e_i) - \lambda_j(0)| = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |l_{ij}|.$$

Возвращаясь к (3.6), получаем

$$\frac{1}{\delta_i(S)} = \frac{(n-1)!}{|\Delta|} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|\Delta|}{(n-1)!} |l_{ij}| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|.$$

Левое равенство из (3.5) доказано, перейдем к правому.

Основание выпуклого тела $R_i(S)$, лежащее в гиперплоскости $x_i = 0$, есть $V_i(S)$. Рассмотрим отрезок длины $d_i(S)$, принадлежащий $R_i(S)$. Пусть z есть его конец, не лежащий в гиперплоскости $x_i = 0$. Положим $V_{i,z}(S) := \text{conv}(V_i(S), z)$. В силу выпуклости $R_i(S)$ выполняется $V_{i,z}(S) \subset R_i(S)$. Поэтому

$$\text{vol}(V_{i,z}(S)) = \frac{\Sigma_i(S) d_i(S)}{n} \leq \text{vol}(R_i(S)) = \text{vol}(S),$$

откуда

$$d_i(S) \leq \frac{n \cdot \text{vol}(S)}{\Sigma_i(S)} = \delta_i(S).$$

Покажем, что S содержит отрезок, параллельный оси x_i , длина которого равняется

$$\delta_i(S) = \frac{2}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}.$$

Пусть $y^{(i)}$ есть точка S с барицентрическими координатами m_{ij} , заданными равенствами (3.4). Рассмотрим отрезок $[y_-^{(i)}, y_+^{(i)}]$, где

$$y_-^{(i)} := y^{(i)} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} e_i, \quad y_+^{(i)} := y^{(i)} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} e_i.$$

Этот отрезок параллелен i -й оси и имеет длину $\delta_i(S)$, а его середина совпадает с $y^{(i)}$. Так как $\lambda_j(y^{(i)}) = m_{ij}$, то при $j = 1, \dots, n+1$

$$\begin{aligned} \lambda_j(y_-^{(i)}) &= \lambda_j(y^{(i)}) - \frac{l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} = \frac{|l_{ij}| - l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} \geq 0, \\ \lambda_j(y_+^{(i)}) &= \lambda_j(y^{(i)}) + \frac{l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} = \frac{|l_{ij}| + l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} \geq 0. \end{aligned}$$

В силу (1.4) и выпуклости S отрезок $[y_-^{(i)}, y_+^{(i)}]$ целиком принадлежит симплексу. Это дает оценку $d_i(S) \geq \delta_i(S)$. Выше было доказано, что верно и противоположное неравенство. Поэтому $d_i(S) = \delta_i(S)$. Равенство (3.3) следует из определения барицентрических координат.

При фиксированном j хотя бы одно из чисел $\lambda_j(y_-^{(i)})$ и $\lambda_j(y_+^{(i)})$ равно нулю. Это означает, что соответствующий конец отрезка принадлежит $(n-1)$ -мерной грани S , противоположной $x^{(j)}$. Если $l_{ij} \neq 0$, то эта грань содержит ровно один из концов отрезка. В случае, когда $l_{ij} = 0$, отрезок целиком принадлежит указанной грани.

Пусть $k_-^{(i)}$ и $k_+^{(i)}$ равняются количеству нулей среди чисел $\lambda_j(y_-^{(i)})$ и $\lambda_j(y_+^{(i)})$ соответственно, $j = 1, \dots, n+1$. Тогда размерности двух минимальных по включению граней S , содержащих $y_-^{(i)}$ и $y_+^{(i)}$, равняются соответственно $n - k_-^{(i)}$ и $n - k_+^{(i)}$. Из предыдущего следует, что $k_-^{(i)} + k_+^{(i)} \geq n+1$. Поэтому сумма размерностей этих граней не превосходит $n-1$.

Осталось доказать единственность отрезка длины $d_i(S)$, параллельного оси x_i и принадлежащего S . Из равенства $d_i(S) = \delta_i(S)$ следует, что

$$\text{vol}(S) = \frac{\Sigma_i(S) d_i(S)}{n}. \quad (3.7)$$

Так как $V_{i,z}(S) \subset R_i(S)$, то

$$\frac{\Sigma_i(S) d_i(S)}{n} = \text{vol}(V_{i,z}(S)) \leq \text{vol}(R_i(S)) = \text{vol}(S).$$

Левая и правая величины в этой цепочке совпадают. Поэтому для любого отрезка максимальной длины с концом z , не принадлежащим гиперплоскости $x_i = 0$, выполняется

$$R_i(S) = V_{i,z}(S). \quad (3.8)$$

Остается заметить, что если существует два различных отрезка указанного вида, то каждое из равенств (3.7), (3.8) нарушается. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Из равенств (3.7), (3.8) следует, что для любого S все вершины выпуклого многогранника $R_i(S)$ принадлежат параллельным гиперплоскостям $x_i = 0$ и $x_i = d_i(S)$,

причем последняя содержит ровно одну вершину. Аналогично результат применения к S симметризации Штейнера относительно гиперплоскости $x_i = 0$ есть выпуклый многогранник, все вершины которого принадлежат гиперплоскостям $x_i = 0$, $x_i = d_i(S)/2$, $x_i = -d_i(S)/2$ (причем каждой из двух последних – ровно по одной вершине).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если $S \subset Q_n$, то для $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \geq 2. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $S \subset Q_n$, то для любого i выполняется $d_i(S) \leq 1$. Теперь достаточно применить (3.2). Следствие 3.1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для любой прямой L симплекс S содержит единственный отрезок максимальной длины, параллельный L . Каждой $(n-1)$ -мерной грани S принадлежит хотя бы один из концов этого отрезка. Сумма размерностей двух минимальных по включению граней S , содержащих концы отрезка, не превосходит $n-1$. Объем S ровно в n раз меньше произведения длины указанного отрезка и $(n-1)$ -меры проекции S на $(n-1)$ -мерную гиперплоскость, ортогональную L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно ввести в $\mathbb{R}^n$ новую прямоугольную систему координат так, чтобы первая координатная ось была параллельна L , и затем применить теорему 3.1 для $i = 1$. Формула для объема S , о которой идет речь в условии следствия, получается аналогично (3.7). Следствие 3.2 доказано.

4. Основные результаты. В этом пункте доказываются основные утверждения статьи.

ТЕОРЕМА 4.1. Если $Q_n \not\subset S$, то

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S). \quad (4.1)$$

Равенство в (4.1) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ_j – базисные многочлены Лагранжа симплекса S (см. (1.1)). Равенство (3.2) теоремы 3.1 дает

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n |l_{ij}|.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |l_{ij}| = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \left[l_{1j} \left(\frac{1}{2} - x_1 \right) + \dots + l_{nj} \left(\frac{1}{2} - x_n \right) \right] = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} [\lambda_j(x^*) - \lambda_j(x)].$$

Здесь $x^* = (1/2, \dots, 1/2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n |l_{ij}| = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} [\lambda_j(x^*) - \lambda_j(x)] \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x^*) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1. \end{aligned}$$

Мы применили (1.3). Очевидно,

$$\sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1 \leq (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (4.3)$$

По лемме 2.1 величина, стоящая в правой части (4.3), равняется $\xi(S)$. Таким образом, (4.1) установлено. Равенство в (4.1) достигается в том и только том случае, когда достигается равенство в (4.3). Последнее имеет место тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (4.2). Теорема 4.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $Q_n \not\subset S$. Справедливы неравенства

$$\xi(S)d(S) \geq n, \quad d(\xi(S)S) \geq n, \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(\xi(S)S)} \leq 1. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $d(S) = \max_i d_i(S)$, то (4.1) дает

$$\xi(S) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \geq \frac{n}{d(S)}.$$

Значит, выполняется первое из неравенств (4.4). Поскольку $\xi(S)d(S) = d(\xi(S)S)$, выполняется и второе неравенство. Соотношение (4.5) следует из (4.1) после деления последнего на $\xi(S)$. Надо еще учесть, что $\xi(S)d_i(S) = d_i(\xi(S)S)$. Можно действовать и в другом порядке – сначала получить (4.5), а затем вывести из него оба неравенства (4.4). Следствие 4.1 доказано.

Ранее в [1; теорема 4.2] автор установил, что для n -мерного невырожденного симплекса $S \subset Q_n$ выполняется $\xi(S) \geq n$. Включение $S \subset Q_n$ автоматически дает $d(S) \leq 1$, поэтому левая оценка (4.4) является усилением неравенства $\xi(S) \geq n$. Заметим, что подход, который мы применили в настоящей статье, существенно отличается от подхода, реализованного в [1].

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $Q_n \subset S$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq 1, \quad (4.6)$$

$$d(S) \geq n. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ таково, что $T := \alpha S \not\subset Q_n$. По определению $\xi(\cdot)$ выполняется $\xi(T)T \subset S$. Поэтому $d_i(S) \geq d_i(\xi(T)T)$, $d(S) \geq d(\xi(T)T)$. Применяя к симплексу T предыдущее следствие, получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(\xi(T)T)} \leq 1, \quad d(S) \geq d(\xi(T)T) \geq n.$$

Неравенства (4.6), (4.7) установлены.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Если $Q_n \subset S$, то для соответствующих S многочленов λ_j

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \leq 2. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить к симплексу S (3.2) и (4.6). Следствие 4.3 доказано.

В связи с (4.8) заметим, что если $S \subset Q_n$, то

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \geq 2n.$$

Последнее неравенство следует из (3.9).

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть $Q_n \subset S$, $d_i := d_i(S)$. Обозначим через S' симплекс с вершинами

$$x^{(i)} := d_i e_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad x^{(n+1)} := 0.$$

Тогда $Q_n \subset S'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение $(n-1)$ -мерной гиперплоскости, содержащей противоположную нулевой вершине грань S' , имеет вид

$$\frac{x_1}{d_1} + \dots + \frac{x_n}{d_n} = 1.$$

Так как $Q_n \subset S$, то верно неравенство (4.6). Из него следует, что вершина e куба Q_n принадлежит S' . Тогда и весь куб Q_n содержится в S' . Следствие 4.4 доказано.

Обозначим через ϱ_n максимальное значение константы $R > 0$, с которой для любого n -мерного симплекса S , содержащего Q_n , выполняется $d(S) \geq R$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Справедливо равенство $\varrho_n = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.7) следует, что $\varrho_n \geq n$. Рассмотрение симплекса S^* , ограниченного гиперплоскостями $x_i = 0$ и $\sum x_i = n$ (см. п. 1) дает оценку $\varrho_n \leq n$. Поэтому при любом n верно $\varrho_n = n$. Следствие 4.5 доказано.

Всюду далее через W обозначается невырожденный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, ребра которого задаются векторами $w_1, \dots, w_n$.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Если $W \subset S$, то для некоторого $i = 1, \dots, n$ симплекс S содержит отрезок, который параллелен w_i и длина которого равна длине w_i , умноженной на n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый n -мерный параллелепипед аффинно эквивалентен кубу Q_n . Поэтому утверждение достаточно доказать для $W = Q_n$. Но в таком виде оно эквивалентно (4.7). Следствие 4.6 доказано.

С помощью теорем статьи могут быть получены некоторые известные результаты других авторов. В качестве таких примеров приведем следствия 4.7–4.10. Утверждение следствия 4.7 весьма сложным геометрическим путем было доказано Лассаком [7; лемма 1]. Более наглядные следствия 4.8 и 4.10 выводятся из следствия 4.7 так же, как в [7]. Результат следствия 4.9 получил Балла [8; предложение 1].

СЛЕДСТВИЕ 4.7. *Предположим, что для симплекса S выполняются включения $-(1/n)S \subset W \subset S$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n$ симплекс $-(1/n)S$ содержит ровно один отрезок, который принадлежит W , параллелен w_i и длина которого равна длине w_i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение сводится к случаю $W = Q_n$, который мы и рассмотрим. Так как $-(1/n)S \subset Q_n$, то $d_i(-(1/n)S) \leq 1$. Значит, $d_i(S) \leq n$ и $1/d_i(S) \geq 1/n$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \geq 1.$$

Включение $Q_n \subset S$ дает противоположное неравенство (4.6). Тем самым,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = 1.$$

Это равенство будет нарушаться, если существует такое k , что $d_k(S) < n$. Поэтому для любого $i = 1, \dots, n$ осевой диаметр $d_i(S)$ равен n . Получаем, что $d_i(-(1/n)S) = 1$. Единственность содержащегося в симплексе $-(1/n)S$ отрезка длины 1, параллельного оси x_i , следует из теоремы 3.1. Следствие 4.7 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.8. *Пусть симплекс $S \subset W$ имеет максимальный объем из всех симплексов, принадлежащих W . Тогда для каждого $i = 1, \dots, n$ симплекс S содержит единственный отрезок, который принадлежит W , параллелен w_i и длина которого равна длине w_i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что справедливо включение $W \subset -nS$. Если бы это было не так, то некоторая вершина S могла бы быть перемещена в W таким образом, что ее расстояние до противоположной грани симплекса увеличилось. Получившийся таким путем симплекс $S' \subset W$ удовлетворял бы неравенству $\text{vol}(S') > \text{vol}(S)$. Последнее невозможно в силу того, что S имеет максимальный объем в W . Итак, $W \subset -nS$. Обозначим $T := -nS$, тогда $S = -(1/n)T$. Имеют место включения $-(1/n)T \subset W \subset T$. Остается применить к симплексу T следствие 4.7. Следствие 4.8 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. *Пусть W_1, W_2 – параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$, причем W_2 гомотетичен W_1 с коэффициентом $\sigma > 1$. Если $W_1 \subset S \subset W_2$, то $\sigma \geq n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $W_1 = Q_n$. Тогда W_2 представляет собой транслят σQ_n . Из включения $S \subset W_2$ следует, что для любого

$i = 1, \dots, n$ верно $d_i(S) \leq \sigma$. Включение $Q_n \subset S$ дает (4.6). Поэтому

$$\frac{n}{\sigma} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq 1.$$

Таким образом, $\sigma \geq n$. Следствие 4.9 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.10. Пусть $W \subset S$ есть параллелепипед максимального возможного объема в симплексе S . Тогда справедливо заключение следствия 4.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [7], что некоторый транслят параллелепипеда nW содержит S . Обозначим этот транслят через U . Так как $-U = U$, то U содержит транслят $-S$. Значит, W содержит некоторый транслят $-(1/n)S$. Так как $W \subset S$, то последний транслят содержится в S и, следовательно, представляет собой $-(1/n)S$. Таким образом, $-(1/n)S \subset W \subset S$. Теперь достаточно применить следствие 4.7. Следствие 4.10 доказано.

В заключение рассмотрим ситуацию $S \subset Q_n$. Полученные выше неравенства дают новые оценки для нормы интерполяционного проектора $P: C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, узлы которого совпадают с вершинами симплекса S . Эти соотношения оценивают $\|P\|$ через осевые диаметры S .

Пусть $1 \leq \mu \leq n$. Точку $x \in \text{ver}(Q_n)$ будем называть μ -вершиной Q_n относительно симплекса $S \subset Q_n$, если для соответствующего интерполяционного проектора P выполняется равенство $\|P\| = \sum |\lambda_j(x)|$ и среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно μ отрицательных.

СЛЕДСТВИЕ 4.11. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $P: C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ – интерполяционный проектор, S – симплекс с вершинами в его узлах. Выполняются неравенства

$$\frac{2}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} - 1 \right) + 1 \leq \|P\|, \quad (4.9)$$

$$\frac{2}{n+1} \left(\frac{n}{d(S)} - 1 \right) + 1 \leq \|P\|. \quad (4.10)$$

Равенство в (4.9) имеет место тогда и только тогда, когда существует 1-вершина Q_n относительно S и выполняются соотношения (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1; теорема 3.1] автором доказано, что

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\| - 1) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\| - 1) + 1.$$

Правое неравенство, соединенное с неравенством (4.1), дает (4.9). Оценка (4.10) следует из (4.9) и определения $d(S)$. Теперь рассмотрим вопрос о выполнении в (4.9) равенства. Из предыдущего следует, что оно имеет место тогда и только тогда, когда одновременно

$$\xi(S) = \frac{n+1}{2} (\|P\| - 1) + 1, \quad \xi(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}.$$

Необходимое и достаточное условие справедливости левого из этих равенств – существование 1-вершины Q_n относительно S (см. [1; теорема 3.1]). Необходимое и достаточное условие правого равенства – выполнение (4.2). Это завершает доказательство следствия 4.11.

5. Примеры.

5.1. Рассмотрим соотношения теоремы 4.1 и следствия 4.1

$$\xi(S) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}, \quad \xi(S)d(S) \geq n. \quad (5.1)$$

Ограничимся ситуацией $S \subset Q_n$. Два симплекса, подобных с коэффициентом 1, будем называть *эквивалентными*.

Введем в рассмотрение величину

$$\xi_n := \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}.$$

Для $n = 1, 2, 3$ и любого S со свойством $\xi(S) = \xi_n$ оба неравенства (5.1) обращаются в равенства. Все такие S найдены в [9; п. 3]. Это приводит к следующему.

В одномерном случае

$$S = [0, 1], \quad d(S) = d_1(S) = 1, \quad \xi(S) = \xi_1 = 1.$$

Если $n = 2$, то S эквивалентен симплексу с вершинами

$$(1, \tau), \quad (\tau, 1), \quad (0, 0).$$

Здесь $\tau = (3 - \sqrt{5})/2$ есть минимальный корень уравнения $t^2 - 3t + 1 = 0$. Число τ связано с *золотым сечением* отрезка $[0, 1]$, так как $\tau/(1 - \tau) = (1 - \tau)/1$. В этом случае

$$d(S) = d_1(S) = d_2(S) = 1 - \tau^2, \quad \xi(S) = \xi_2 = \frac{4 - 2\tau}{1 + \tau} = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1.$$

Как нетрудно найти,

$$\xi(S)d(S) = 2.$$

В трехмерной ситуации любой S с условием $\xi(S) = \xi_3 = 3$ эквивалентен одному из двух симплексов: правильному тетраэдру с вершинами

$$(0, 1, 1), \quad (1, 0, 1), \quad (1, 1, 0), \quad (0, 0, 0)$$

или тетраэдру с вершинами

$$\left(0, \frac{1}{2}, 1\right), \quad \left(1, \frac{1}{2}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right).$$

В любом из этих вариантов

$$d(S) = d_1(S) = d_2(S) = d_3(S) = 1.$$

Значит,

$$\xi(S)d(S) = 3.$$

Каждое из неравенств (5.1) может обратиться в равенство и в случае, когда $\xi(S) > \xi_n$. Например, для двумерного симплекса S с вершинами

$$\left(1, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

или вершинами

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

выполняется

$$\xi(S) = 4 > \xi_2 = 2.3416\dots, \quad d(S) = d_1(S) = d_2(S) = \frac{1}{2},$$

поэтому

$$\xi(S)d(S) = 2.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и S имеет максимальный объем из всех симплексов, содержащихся в Q_n . Тогда $d_i(S) = 1$ для любого i (см. следствие 4.8 для $W = Q_n$). Соотношения (5.1) принимают вид $\xi(S) \geq n$. Если при этом $n+1$ – число Адамара, т.е. существует матрица Адамара порядка $n+1$, и S – правильный симплекс, вписанный в Q_n , то $\xi(S) = n = \xi_n$ (см. [1]).

Так как $\sum 1/d_i(S) \geq n/d(S)$, то равенство справа в (5.1) влечет равенство и слева. В этом случае

$$d_1(S) = \dots = d_n(S).$$

Однако возможно, что равенство достигается лишь в левом соотношении; тогда при некоторых $i \neq k$ верно $d_i(S) < d_k(S)$. Пример: $n = 2$, S – симплекс с вершинами

$$\left(1, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right), \quad \left(0, \frac{1}{3}\right);$$

здесь

$$d(S) = d_1(S) = 1, \quad d_2(S) = \frac{1}{2}, \quad \xi(S) = 3.$$

5.2. Пусть $P: C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ – интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами симплекса $S \subset Q_n$. Следствие 4.11 утверждает, что

$$\|P\| = \frac{2}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} - 1 \right) + 1$$

тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия:

- 1) существует 1-вершина Q_n относительно S ;
- 2) имеют место соотношения (4.2).

Покажем, что эти условия являются независимыми.

В качестве первого примера возьмем $n = 2$, S – симплекс с вершинами

$$x^{(1)} = \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad x^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Тогда

$$\lambda_1(x) = 2x_1 - 1, \quad \lambda_2(x) = 2x_2 - 1, \quad \lambda_3(x) = -2x_1 - 2x_2 + 3.$$

Поэтому

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_1(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_2(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_3(x)) = 1,$$

т.е. выполняется (4.2). В то же время 1-вершины Q_2 относительно S не существует. Этот факт может быть установлен и сам по себе, и как следствие неравенства

$$\xi(S) < \frac{n+1}{2}(\|P\| - 1) + 1.$$

В рассматриваемой ситуации $\xi(S) = 4$, $\|P\| = 5$.

Второй пример: $n > 1$, S – симплекс с вершинами

$$x^{(1)} = e_1, \quad \dots, \quad x^{(n)} = e_n, \quad x^{(n+1)} = 0.$$

В этом случае

$$\lambda_1(x) = x_1, \quad \dots, \quad \lambda_n(x) = x_n, \quad \lambda_{n+1}(x) = -\sum x_i + 1.$$

Здесь $\|P\| = 2n - 1$, причем e является 1-вершиной Q_n относительно S . В то же время (4.2) не имеет места, так как

$$0 = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_n(x)) \neq \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)) = n - 1.$$

Задача о симплексе, содержащем куб, и связанные с ней вопросы обсуждалась автором с Ю. А. Беловым, Г. М. Бродским, С. Г. Волченковым, В. Л. Дольниковым, В. С. Климовым, М. Лассаком, Н. А. Стрелковым, П. А. Шварцманом. Всем этим математикам автор выражает свою признательность. Особенно автор благодарен В. Л. Дольникову за полезные консультации и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. В. Невский, “Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора”, *Модел. и анализ информ. систем*, **16**:1, (2009), 24–43.
- [2] П. С. Александров, *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*, Наука, М., 1979.
- [3] P. R. Scott, “Lattices and convex sets in space”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **36**:143, (1985), 359–362.
- [4] P. R. Scott, “Properties of axial diameters”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39**:3, (1989), 329–333.
- [5] K. Radziszewski, “Sur un probleme extremal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes”, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A*, **6**, (1952), 5–18.
- [6] В. Бляшке, *Круг и шар*, Наука, М., 1967.
- [7] M. Lassak, “Parallelotopes of maximum volume in a simplex”, *Discrete Comput. Geom.*, **21**:3, (1999), 449–462.
- [8] M. Y. Balla, *Approximation of convex bodies by parallelotopes*, Internal report IC/87/310, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 1987.
- [9] М. В. Невский, “Геометрические методы в задаче о минимальном проекторе”, *Модел. и анализ информ. систем*, **13**:2, (2006), 16–29.

М. В. Невский

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

Поступило

22.04.2009

Исправленный вариант

03.07.2009