Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Линке, Универсальные пространства субдифференциалов сублинейных операторов со значениями в конусе ограниченных полунепрерывных снизу функций, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 547–557

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 09:05:25

Универсальные пространства субдифференциалов сублинейных операторов со значениями в конусе ограниченных полунепрерывных снизу функций

Ю.Э. Линке

Рассматривается задача М. Фреше об универсальном пространстве для субдифференциалов ∂P непрерывных сублинейных операторов $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$, определенных на сепарабельных банаховых пространствах V , со значениями в конусе $BC(X)_\sim$ ограниченных полунепрерывных снизу функций на нормальном топологическом пространстве X . Доказана универсальность пространства линейных компактных операторов $L^c(\ell^2, C(\beta X))$ в топологии простой сходимости. Здесь ℓ^2 – сепарабельное гильбертово пространство, βX – стоун-чеховская компактификация X . Установлено, что образами субдифференциалов являются также субдифференциалы сублинейных операторов.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Задачу об универсальных пространствах, содержащих гомеоморфные образы топологических пространств определенного класса, сформулировал М. Фреше в начале 20-х гг. прошлого столетия. Первоначально она относилась к гильбертову или какому-то банахову пространству, ее первые решения получил П. С. Урысон сначала для класса сепарабельных метрических пространств, а затем – сепарабельных полных метризуемых пространств. В 1933 г. С. Банах и С. Мазур доказали универсальность банахова пространства $C([0, 1])$, в которое изоморфно и изометрично может быть вложено любое сепарабельное банахово пространство. С тех пор известно много универсальных в том или ином смысле пространств.

Предлагаемая работа является продолжением работ автора [1], [2], в которой задача Фреше решена для субдифференциалов (в нуле) непрерывных сублинейных операторов, определенных на сепарабельных банаховых пространствах, со значениями в конусе $BC(X)_\sim$ ограниченных полунепрерывных снизу функций на нормальных топологических пространствах X с естественным порядком и $\sup$ -нормой.

Решениям задачи Фреше для других классов сублинейных операторов посвятим отдельные публикации.

С точки зрения приложений субдифференциального исчисления в математической экономике и экстремальных задачах важно, чтобы образом субдифференциала

сублинейного оператора в универсальном пространстве также был субдифференциал сублинейного оператора.

Следовательно, поиск сводится к пространствам линейных операторов, и, имея ввиду первоначальную постановку проблемы М. Фреше, рассмотрим в качестве такового пространство линейных операторов, определенных на сепарабельном гильбертовом пространстве ℓ^2 со стандартной нормой.

Основным результатом статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть V – любое сепарабельное банахово пространство, а нормальное топологическое пространство X фиксировано. Пространство $L^c(\ell^2, C(\beta X))$ в топологии простой сходимости компактных линейных операторов, действующих из ℓ^2 в банахово пространство $C(\beta X)$, где βX – стоун-чеховская компактификация X , универсально в следующем смысле.*

Для каждого непрерывного сублинейного оператора $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$, отображающего V в $BC(X)_\sim$, найдется непрерывный сублинейный оператор $S: \ell^2 \rightarrow BC(\beta X)_\sim$ такой, что субдифференциал ∂P и компактный субдифференциал $\partial^c S$, в который включены только линейные компактные опорные к S операторы, будут операторно-аффинно гомеоморфными. При этом двойственное многозначное отображение $F_S: \beta X \rightarrow \ell^2$ для S полунепрерывно снизу в нормированной топологии ℓ^2 , а его значениями являются непустые выпуклые подкомпакты выпуклого компакта K в ℓ^2 .

Особо следует сказать о методе решения задачи Фреше в рассматриваемом случае. Для ее решения предлагается использовать топологический метод [3], суть которого заключается в том, что изучаемые сублинейные операторы отождествляются с двойственными многозначными отображениями, а субдифференциалы – с их непрерывными селекторами. Ключевыми в наших рассуждениях будут также теорема Гельфанда о представлении линейных операторов абстрактными функциями [4], [5], [6; VI.§7, теорема 1], а также одна теорема Кли [7], [8; III.§2. теорема 2.1] о возможности аффинного вложения некоторых выпуклых компактов в ℓ^2 .

Используемая в статье терминология функционального анализа и общей топологии стандартна и следует руководствам [6] и [9].

Подчеркнем только, что все отображения (однозначные и многозначные), а также операторы (линейные и сублинейные) непрерывны. Всюду компактные топологические пространства (кратко компакты) и локально выпуклые пространства предполагаются и хаусдорфовыми, а в определение нормальных и вполне регулярных пространств включена аксиома отделимости T_1 , т.е. одноточечные множества замкнуты. Выпуклый компакт – компакт, аффинно гомеоморфный выпуклому компактному подмножеству локально выпуклого пространства.

План изложения таков. Пункт 2 посвящен доказательству теоремы 1. Изучению некоторых свойств вложений субдифференциалов в универсальные пространства отводится п. 3, а заключительным замечаниям – п. 4, где в теореме 4 доказано, во-первых, что существование аффинных гомеоморфизмов Кли является не только достаточным, но и необходимым условием универсальности полученных пространств, во-вторых, что свойства аффинного и операторно-аффинного вложения субдифференциалов в универсальные пространства равносильны. Здесь же в следствии теоремы 1 доказано, что изучаемый класс сублинейных операторов состоит

из субдифференцируемых операторов, а в теоремах 5 и 6 доказано, что “расширить” этот класс с сохранением свойства субдифференцируемости невозможно.

2. Доказательство основного результата. Для доказательства теоремы 1 так же, как и в [1] для случая компакта X , свяжем с сублинейным оператором $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$ семейство (индексированное переменной $x \in X$) сублинейных функционалов p_x , определенных на V следующей формулой: $p_x v = Pv(x)$. В качестве *двойственного отображения* рассмотрим

$$\chi: P \mapsto (F: x \mapsto \partial p_x), \quad x \in X. \quad (2.1)$$

Многозначное отображение F в (2.1), которое называется *двойственным многозначным отображением* или *представлением*, полунепрерывно снизу относительно $*$ -слабой топологии сопряженного пространства V^* , действует в шар $B(V^*, \|P\|)$ топологического сопряженного V^* радиуса $\|P\|$ и принимает в нем в качестве значений выпуклые и компактные подмножества. Из формулы (2.1) следует, что двойственное отображение χ взаимно однозначно. Эти и другие свойства двойственного отображения χ и его обратного χ^{-1} , которые используются ниже, доказываются так же, как и в [1].

Напомним, что ценность двойственного отображения определяет теорема Гельфанда [7], [8], [9; VI.§7, теорема 1], согласно которой любой линейный оператор $u: V \rightarrow BC(X)$ связывается с ограниченным (в смысле нормы в V^*) $*$ -слабо непрерывным отображением $f: X \rightarrow V^*$ соотношениями $uv(x) = \langle v, f(x) \rangle$, $x \in X$, $v \in V$. При этом линейные компактные операторы характеризуются непрерывностью отображения $f: X \rightarrow V^*$, если в V^* топология определяется его нормой. Поэтому всюду далее субдифференциал и компактный субдифференциал сублинейного оператора отождествляется с множеством непрерывных (в соответствующей топологии) селекторов двойственного многозначного отображения.

К сублинейному оператору $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$ применим двойственное отображение χ и согласно формулы (2.1) получим многозначное отображение, которое вместо F обозначим символом F_P , чтобы подчеркнуть зависимость F от P . Так как $F_P: X \rightarrow B(V^*, \|P\|)$ является полунепрерывным снизу многозначным отображением и его значениями являются непустые выпуклые и компактные подмножества в $B(V^*, \|P\|)$, то F_P является λ -непрерывным отображением X в $\text{conv}(B(V^*, \|P\|))$. (Топологию на $\text{exp}(Y)$ – гиперпространстве замкнутых множеств топологического пространства Y и его подпространстве $\text{conv}(Y)$, состоящем из выпуклых подкомпактов, если Y – выпуклый компакт, предбазу которой составляют множества вида $\{C \in \text{exp}(Y) : C \cap U \neq \emptyset\}$, где U открыто в Y , называют обычно λ -топологией.)

Фиксируем в дальнейших рассуждениях выпуклый компакт $B := B(V^*, \|P\|)$.

Так как B – выпуклый компакт, то применим к нему теорему Кли [7], [8; III.§2. теорема 2.1], которая утверждает, что если для выпуклого компактного подмножества B в хаусдорфовом линейном топологическом пространстве E существует счетное множество $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ непрерывных линейных функционалов на E , разделяющих точки B (т.е. если $x, y \in B$ и $f_n(x) = f_n(y)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $x = y$), то B аффинно гомеоморфно выпуклому компактному K из ℓ^2 , т.е. B и K гомеоморфны и гомеоморфизм h сохраняет выпуклые комбинации. Для этого возьмем счетное плотное в V множество $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, существующее в силу сепарабельности V .

Определим на V^* непрерывные в $*$ -слабой топологии функционалы $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ формулой $f_n(v^*) = \langle v_n, v^* \rangle$ для $n \in \mathbb{N}$ и $v^* \in V^*$. Тогда они разделяют точки B и, следовательно, согласно теореме Кли в гильбертовом пространстве ℓ^2 найдется выпуклый компакт K аффинно гомеоморфный B .

Обозначим этот аффинный гомеоморфизм через $h_B : B \rightarrow K$ и будем его в дальнейшем называть *аффинным гомеоморфизмом Кли*. Фиксируем далее и выпуклый компакт K .

По умолчанию в $\exp(Y)$ и в его подпространстве $\text{conv}(Y)$ рассматривается топология Вьеториса, базу открытых множеств которой определяют множества

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(U_1, U_2, \dots, U_k) = \left\{ C \in \exp Y : C \subset \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ и } C \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, k \right\}, \quad (2.2)$$

где $U_1, U_2, \dots, U_k$ – последовательность открытых множеств пространства Y .

Хорошо известно, что $\text{conv}(B)$ и $\text{conv}(K)$ являются выпуклыми компактными. Аффинный гомеоморфизм Кли h_B индуцирует отображение $H_B : \text{conv}(B) \rightarrow \text{conv}(K)$, действующее для $C \in \text{conv}(B)$ согласно формуле $H_B(C) = h_B(C)$. Непосредственно проверяется, что отображение H_B аффинно, взаимно однозначно и отображает $\text{conv}(B)$ на $\text{conv}(K)$. Непрерывность H_B вытекает из (2.2) и следующей формулы:

$$H_B^{-1} \mathcal{O}(U_1, \dots, U_n) = \mathcal{O}(h_B^{-1} U_1, \dots, h_B^{-1} U_n).$$

Следовательно, отображение $H_B : \text{conv}(B) \rightarrow \text{conv}(K)$ осуществляет аффинный гомеоморфизм $\text{conv}(B)$ на $\text{conv}(K)$.

Фиксируем и аффинный гомеоморфизм H_B .

Двойственное отображение χ взаимно однозначно, поэтому для любого многозначного отображения $F : X \rightarrow B(V^*, r)$ с указанными выше свойствами, т.е. F полунепрерывно снизу и его значения принадлежат $\text{conv}(B(V^*, r))$, соответствующий ему сублинейный оператор $\chi^{-1}(F) = Q$ действует следующим образом:

$$Qv(x) = \sup\{\langle v, v^* \rangle : v^* \in F(x)\}, \quad x \in X, \quad v \in V. \quad (2.3)$$

Несложно проверить, что определенный формулой (2.3) сублинейный оператор непрерывен; $\|Q\| \leq r$ и $\chi(Q) = F$.

Теперь возьмем суперпозицию $F = H_B \circ F_P$. Так как топология Вьеториса мажорирует λ -топологию, то $F : X \rightarrow \text{conv}(K)$, как суперпозиция непрерывных отображений является λ -непрерывным, т.е. полунепрерывным снизу многозначным отображением X в K . Далее замечаем, что значениями $F(x)$ для всех $x \in X$ являются непустые выпуклые подкомпакты в K . Подчеркнем еще раз, что K содержится в ℓ^2 и наделено топологией, которая определяется нормой этого пространства.

Применяя отображение χ^{-1} к F , находим по формуле (2.3) сублинейный оператор $Q : \ell^2 \rightarrow BC(X)_\sim$, т.е. $Q := \chi_{\ell^2}^{-1}(F)$. Здесь нижний индекс ℓ^2 у двойственного отображения χ подчеркивает, что оно действует на гильбертовом пространстве ℓ^2 . Для удобства сопровождаем далее двойственное многозначное отображение F индексом соответствующего ему оператора Q , т.е. $F_Q := F$.

Определим оператор $S := G \circ Q$; напомним, что здесь оператор G , осуществляющий алгебраический и структурный изоморфизм конуса $BC(X)_\sim$, где X – нормальное топологическое пространство, и конуса H из $BC(\beta X)_\sim$ [2; теорема 1], определен

формулой

$$G(f) := \sup\{g(f_1) : f_1 \in BC(X), f_1 \leq f\}, \quad f \in BC(X)_{\sim}. \quad (2.4)$$

Здесь g – оператор продолжения функций с X на βX . Отметим также, что $\sup$ в этой формуле вычисляется поточечно, т.е. в каждой точке $x \in \beta X$. Так как оператор G – возрастающий сублинейный оператор, а Q – сублинейный оператор, то оператор $S: \ell^2 \rightarrow BC(\beta X)_{\sim}$, как суперпозиция, является непрерывным сублинейным оператором. Его двойственное многозначное отображение $F_S: \beta X \rightarrow K$ определено на βX и принимает значения в K ; при этом его значения принадлежат $\text{conv}(K)$, где, напомним, компакт K задан выше аффинным гомеоморфизмом Кли h_B . Сужение $F_S|_X = F_Q$. Так же, как и F_Q , двойственное многозначное отображение F_S полунепрерывно снизу, если ℓ^2 наделено топологией, определяемой нормой этого пространства. Убедиться в этом можно разными способами. Сначала выпишем две эквивалентные формулы для вычисления оператора S и его двойственного многозначного отображения F_S :

$$S = G \circ \chi_{\ell^2}^{-1}(H_B \circ \chi_V(P)) \iff F_S = \chi_{\ell^2}(G \circ \chi_{\ell^2}^{-1}(H_B \circ \chi_V(P))), \quad (2.5)$$

$$S = \chi_{\ell^2}^{-1}(e(H_B \circ \chi_V(P))) \iff F_S = e(H_B \circ \chi_V(P)). \quad (2.6)$$

Здесь все операторы определены, кроме оператора e . Известно, что каждое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Z$ (не обязательно числовой функции) тихоновского пространства X в любой компакт Z можно продолжить до непрерывного отображения $F: \beta X \rightarrow Z$ [9; 3.6.1]. Оператор e – экстендер, т.е. $e(f) = F$.

Эквивалентность формул (2.5) и (2.6) для нормальных пространств X следует из отмеченных выше свойств оператора G и двойственных отображений. Полунепрерывность снизу двойственного многозначного отображения F_S следует из формулы (2.6), так как оно является λ -непрерывным экстендером λ -непрерывного отображения $F_Q := H_B \circ \chi_V(P)$. Здесь в качестве компакта Z взят выпуклый компакт $\text{conv}(K)$. Попутно отметим, что формулой (2.6) можно пользоваться и для тихоновских пространств X .

Введем пространство $BC(X, V^*)$ всех ограниченных (по норме V^*) непрерывных отображений X в V^* с топологией равномерной сходимости. Базис открытых окрестностей точки $f_1 \in BC(X, V^*)$ в этой топологии образуют множества вида

$$\{f \in BC(X, V^*) : f(x) - f_1(x) \subseteq W \text{ для всех } x \in X\}, \quad W \in \mathcal{W}_{V^*}, \quad (2.7)$$

где $\mathcal{W}_{V^*}$ – базис открытых выпуклых окрестностей нуля пространства V^* .

Следующие два простые наблюдения дополняют теорему Гельфанда и следуют из формул (2.1) и (2.3) для вычисления соответственно χ и χ^{-1} , а также из использования в пространстве операторов топологии простой сходимости и формулы (2.7), определяющей базис открытых окрестностей топологии в $BC(X, V^*)$.

1) Сужение двойственного отображения χ на $L(V, BC(X))$ отображает его непрерывно на $BC(X, V^*)$. Сужение обратного к нему отображения χ^{-1} на $BC(X, V^*)$ отображает это пространство непрерывно на $L(V, BC(X))$.

2) Пусть V^* наделено топологией, определяемой нормой этого пространства. Тогда сужение двойственного отображения χ на $L^c(V, BC(X))$ отображает его непрерывно на $BC(X, V^*)$. Сужение обратного к нему отображения χ^{-1} на $BC(X, V^*)$ отображает это пространство непрерывно на $L^c(V, BC(X))$.

Рассмотрим субдифференциал ∂P сублинейного оператора P и компактный субдифференциал $\partial^c S$, определенного выше сублинейного оператора S . Для завершения доказательства теоремы необходимо определить операторно-аффинное отображение $\tilde{h}$ субдифференциала ∂P на компактный субдифференциал $\partial^c S$, которое является гомеоморфизмом.

Учитывая формулу (2.5), определим $\tilde{h}$ следующим образом

$$\tilde{h}: u \mapsto g \circ \chi_{\ell^2}^{-1}(h_B \circ \chi_V(u)), \quad u \in \partial P. \quad (2.8)$$

Формула (2.8) корректна. Действительно, суперпозиция $h_B \circ \chi_V(u)$ в силу свойств h_B и теоремы Гельфанда является непрерывным отображением X в K . Поэтому, вновь применяя теорему Гельфанда, заключаем, что обратное к двойственному отображению $\chi_{\ell^2}^{-1}$ отображает эту суперпозицию в компактный субдифференциал $\partial^c Q \hookrightarrow L^c(\ell^2, BC(X))$. И, наконец, последнее действие в (2.8) – суперпозиция с g – переводит $\partial^c Q$ в компактный субдифференциал $\partial^c S \hookrightarrow L^c(\ell^2, C(\beta X))$.

Обратное отображение $\tilde{h}^{-1}$, очевидно, определено на $\partial^c S$ формулой

$$\tilde{h}^{-1}: u_0 \mapsto g^{-1} \circ \chi_V^{-1}(h_B^{-1} \circ \chi_{\ell^2}(u_0)), \quad u_0 \in \partial^c S. \quad (2.9)$$

Корректность (2.9) проверяется так же, как и корректность (2.8). Заметим, что все отображения в (2.8) и (2.9) взаимно однозначны и непрерывны в соответствующих топологических пространствах.

Действительно, непрерывность сужений χ на $L(V, BC(X))$ и χ^{-1} на $BC(X, V^*)$ установлена выше как дополнение теоремы Гельфанда. Непрерывность суперпозиций в (2.8) и (2.9) в соответствующих пространствах несложно проверить, используя вид базисных окрестностей. Например, первая суперпозиция в (2.8) с h_B непрерывно переводит пространство $C(X, B) \hookrightarrow BC(X, V^*)$ в $C(X, K) \hookrightarrow BC(X, \ell^2)$. Здесь $C(X, B)$ – пространство непрерывных отображений X в B с топологией равномерной сходимости на X , рассматриваемое как подпространство в $BC(X, V^*)$. Аналогично определяется пространство $C(X, K)$. Непрерывность теперь следует из формулы (2.7). Непрерывность остальных трех суперпозиций проверяется аналогично.

Несложно проверить, что отображения $\tilde{h}$ и $\tilde{h}^{-1}$ являются аффинными гомеоморфизмами.

Однако субдифференциалы ∂P и $\partial^c S$ изучаемых сублинейных операторов являются замкнутыми и операторно выпуклыми множествами [3].

Последнее свойство субдифференциала является обобщением понятия выпуклости и означает следующее. Пусть Id – тождественный оператор в $BC(X)$. *Мультипликатором* в $BC(X)$ называется линейный оператор $\lambda: BC(X) \rightarrow BC(X)$ такой, что $0 \leq \lambda \leq \text{Id}$ [3]. Нетрудно видеть, что в $BC(X)$ любой мультипликатор имеет вид $\lambda(f) = \tilde{\lambda}f$ (для всех $f \in BC(X)$), где функция $\tilde{\lambda} \in BC(X)$ и $0 \leq \tilde{\lambda}(x) \leq 1$ для всех $x \in X$. Множество $U \subset L$ называется *операторно выпуклым*, если для всяких $u_1, u_2 \in U$ их операторно выпуклая комбинация $\lambda \circ u_1 + (\text{Id} - \lambda) \circ u_2$ с любым мультипликатором λ входит в U .

Пусть U_1 и U_2 операторно выпуклые множества в $L(V_1, BC(X))$ и $L(V_2, BC(X))$ соответственно, где V_1 и V_2 – банаховы пространства.

Под *операторно-аффинным отображением* понимается отображение $h: U_1 \rightarrow U_2$, которое сохраняет операторно выпуклые комбинации. Если операторно-аффинное

отображение $h: U_1 \rightarrow U_2$ множества U_1 на U_2 является гомеоморфизмом, то говорят, что эти множества *операторно-аффинно гомеоморфны* (h^{-1} при этом тоже осуществляет операторно-аффинный гомеоморфизм U_2 на U_1).

Для проверки операторной аффинности h и h^{-1} нам потребуются две формулы и одна лемма.

Введем совокупность $\mathfrak{K}$ всех сублинейных операторов $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$, где V и X фиксированы. Наделим ее естественными операциями сложения и умножения на неотрицательные числа. Выделим еще одну операцию над сублинейными операторами, обобщающую операцию умножения на неотрицательное число. Пусть $BC(X)_+$ – конус положительных элементов векторной решетки $BC(X)$, а λ – неотрицательная функция в нем, которая порождает оператор умножения в $BC(X)_\sim$. Далее символом $\lambda \circ P$ обозначим суперпозицию этого оператора с сублинейным оператором $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$, которая является непрерывным сублинейным оператором из V в $BC(X)_\sim$.

Рассмотрим также $\mathcal{F}$ как совокупность ограниченных (относительно нормы в V^*) полунепрерывных снизу многозначных отображений $F: X \rightarrow V^*$ с непустыми выпуклыми и компактными значениями. В $\mathcal{F}$ рассматриваются естественные операции сложения и умножения на неотрицательную функцию $\lambda \in BC(X)_+$. Условимся такую операцию обозначать символом λF .

Пусть P_1 и $P_2 \in \mathfrak{K}$ связаны двойственным отображением χ с F_1 и $F_2 \in \mathcal{F}$ соответственно. Тогда для всех λ_1 и $\lambda_2 \in BC(X)_+$ верны равенства

$$\chi(\lambda_1 \circ P_1 + \lambda_2 \circ P_2) = \lambda_1 \chi(P_1) + \lambda_2 \chi(P_2) = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2, \quad (2.10)$$

$$\chi^{-1}(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) = \lambda_1 \chi^{-1}(F_1) + \lambda_2 \chi^{-1}(F_2) = \lambda_1 \circ P_1 + \lambda_2 \circ P_2. \quad (2.11)$$

Доказательство этих формул следует из формулы (2.1) для вычисления двойственного отображения χ и (2.3) для вычисления χ^{-1} , а также известной формулы субдифференцирования для сублинейных функционалов

$$\partial(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = \lambda_1 \partial p_1 + \lambda_2 \partial p_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+,$$

где $p_1: V \rightarrow \mathbb{R}$ и $p_2: V \rightarrow \mathbb{R}$ – сублинейные функционалы.

Следующая лемма, представляющая самостоятельный интерес, устанавливает дополнительные свойства алгебраического и структурного изоморфизма G конуса $BC(X)_\sim$, где X – нормальное топологическое пространство, и конуса H из $BC(\beta X)_\sim$ [2; теорема 1]. Для этого введем в $BC(X)_\sim$ еще одну операцию умножения на неотрицательную функцию $\lambda \in BC(X)_+$. Эта операция корректна, так как произведение неотрицательной непрерывной функции на полунепрерывную снизу функцию будет полунепрерывной снизу функцией. Обозначим эту операцию для функции $f \in BC(X)_\sim$ символом λf .

ЛЕММА. *Отображение $G: BC(X)_\sim \rightarrow H$ [2; формула (1)] обладает дополнительным свойством*

$$G(\lambda f) = g(\lambda)G(f) \quad (2.12)$$

для любой функции λ из $BC(X)_+$. Его сужение $G|_{BC(X)} = g$ отображает $BC(X)$ на $C(\beta X)$ и является кольцевым гомоморфизмом, т.е.

$$g(\lambda f) = g(\lambda)g(f) \quad \text{для всех } \lambda, f \in BC(X). \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Для проверки (2.13) заметим, что $g: BC(X) \rightarrow C(\beta X)$ является оператором продолжения ограниченных непрерывных функций с X на βX . Теорема Колмогорова–Гельфанда [10; теорема III'] утверждает, что кольцо $BC(X)$ изоморфно кольцу $C(\beta X)$, а оператор, осуществляющий этот изоморфизм, – это рассматриваемый нами оператор продолжения g (см. также доказательства свойств стоун-чеховской компактификации βX в [11; V.§3, теорема 1], где фактически приведены доказательства структурного и кольцевого изоморфизма $BC(X)$ и $C(\beta X)$). Для доказательства формулы (2.12) напомним, то оператор G в [2; формула (1)] определен формулой (2.4), в которой $\sup$ вычисляется поточечно, т.е. в каждой точке $x \in \beta X$. Поэтому для любой функции λ из $BC(X)_+$ имеем следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} G(\lambda f) &= \sup\{g(f_1) : f_1 \in BC(X), f_1 \leq \lambda f\} = \sup\{g(\lambda f_1) : f_1 \in BC(X), f_1 \leq f\} \\ &= g(\lambda) \sup\{g(f_1) : f_1 \in BC(X), f_1 \leq f\} = g(\lambda)G(f). \end{aligned}$$

Доказательство леммы завершено.

Применение формул (2.10) и (2.11) и леммы завершает доказательство основного результата статьи – теоремы 1.

3. Некоторые свойства вложений. Проведенное доказательство теоремы 1 позволяет так вкладывать субдифференциалы сублинейных операторов в универсальное пространство, чтобы сохранялись некоторые операции над сублинейными операторами и их образами. Ограничимся двумя примерами такого применения.

Допустим, что задано конечное множество сублинейных операторов $P_i: V \rightarrow BC(X)_\sim$ и неотрицательных функций λ_i из $BC(X)_+$, где $1 \leq i \leq n$. Тогда

$$P := \sum_{i=1}^n \lambda_i \circ P_i,$$

очевидно, является сублинейным оператором. Можно ли указать вложение в универсальное пространство, определенное на всех субдифференциалах указанных сублинейных операторов, их суперпозициях с операторами умножения на неотрицательные функции и их сумм, сохраняющее операции над сублинейными операторами и субдифференциалами? Положительный ответ дает следующая

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 можно выбрать шар $B(L, r)$ радиуса $r > 0$ пространства $L = L(V, BC(X))$ и его операторно-аффинное и непрерывное вложение $\hbar: B(L, r) \rightarrow L^c(\ell^2, C(\beta X))$. При этом сужение $\hbar$ на каждый субдифференциал из объединения

$$\partial P \cup \partial P_1 \cup \partial P_2 \cup \dots \cup \partial P_n \cup \partial(\lambda_1 P_1) \cup \partial(\lambda_2 P_2) \cup \dots \cup \partial(\lambda_n P_n).$$

является вложением в универсальное пространство $L^c(\ell^2, C(\beta X))$, причем таким, что $\hbar(\partial P) = \partial^c S$, $\hbar(\partial P_i) = \partial^c S_i$, $1 \leq i \leq n$, для непрерывных сублинейных операторов $S: \ell^2 \rightarrow BC(\beta X)_\sim$, $S_i: \ell^2 \rightarrow BC(\beta X)_\sim$, $1 \leq i \leq n$. При этом их двойственные многозначные отображения полунепрерывны снизу в нормированной топологии ℓ^2 ,

а их значениями являются непустые выпуклые компакты, содержащиеся в некотором выпуклом компакте K из ℓ^2 . Кроме того, верны следующие формулы:

$$S = \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i, \quad \hbar(\partial P) = \hbar\left(\partial\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \hbar(\partial P_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно положить

$$r > \sum_{i=1}^n (1 + \|\lambda_i\|_{BC(X)}) \|P_i\|.$$

Возьмем теперь шар $B := B(V^*, r)$ в V^* радиуса r ; с помощью теоремы Кли найдем выпуклый компакт K в ℓ^2 и соответствующий им $h_B: B \rightarrow K$ – аффинный гомеоморфизм Кли. Искомый операторно аффинный гомеоморфизм $\hbar$ определяется формулой (2.8), в которой надо разрешить операторам u изменяться в “операторном” шаре $B(L, r)$ радиуса $r > 0$ пространства $L = L(V, BC(X))$. Не трудно убедиться, что проверка всех заключений теоремы 2 проводится так же, как и в теореме 1. Теорема 2 доказана.

Пусть задано семейство $\mathcal{P}$ ограниченных по норме числом k сублинейных операторов $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$. Зададим также ограниченное (по норме) семейство Λ неотрицательных функций λ из $BC(X)_+$, т.е. для всех $\lambda \in \Lambda$ выполнено неравенство $0 \leq \|\lambda\|_{BC(X)} \leq d$ для некоторого числа d . Можно ли указать вложение $\hbar$, “обслуживающее” субдифференциалы ∂P и $\partial(\lambda P)$ всех сублинейных операторов P и λP , где λ и P выбраны из указанных выше ограниченных семейств? Положительный ответ на этот вопрос дает

ТЕОРЕМА 3. *В условиях теоремы 1 можно выбрать шар $B(L, r)$ радиуса $r > 0$ пространства $L = L(V, BC(X))$ и его операторно-аффинное и непрерывное вложение $\hbar: B(L, r) \rightarrow L^c(\ell^2, C(\beta X))$, для которого сужения на каждый субдифференциал ∂P , $\partial(\lambda P)$, где $\lambda \in \Lambda$, а $P \in \mathcal{P}$, являются вложениями в универсальное пространство $L^c(\ell^2, C(\beta X))$, причем такими, что*

$$\hbar(\partial P) = \partial^c S_P, \quad \hbar(\partial(\lambda P)) = \lambda \partial^c S_P, \quad \lambda \in \Lambda, \quad P \in \mathcal{P},$$

для непрерывных сублинейных операторов $S_P: \ell^2 \rightarrow BC(\beta X)_\sim$, выбор которых зависит от $P \in \mathcal{P}$ и не зависит от $\lambda \in \Lambda$. При этом их двойственные многозначные отображения полунепрерывны снизу в нормированной топологии ℓ^2 , а их значения являются непустыми выпуклыми и подкомпактными множествами некоторого выпуклого компакта K из ℓ^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно взять $r > (1 + d)k$ и повторить доказательство предыдущей теоремы.

4. Заключительные замечания. В теореме 1 универсальность пространств $L^c(\ell^2, C(\beta X))$ относительно операторно-аффинных вложений доказана с применением аффинных гомеоморфизмов Кли. В следующей теореме обосновано, что существование аффинных гомеоморфизмов является не только достаточным, но и необходимым условием универсальности. Доказано также, что условие аффинности вложений равносильно условию операторной аффинности вложений в универсальное пространство.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – нормальное топологическое пространство. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) для любого X пространство $L^c(\ell^2, C(\beta X))$ универсально в смысле теоремы 1, т.е. вложения субдифференциалов сублинейных операторов операторно-аффинны;
- 2) то же, что и 1), но для аффинных вложений;
- 3) то же, что и 2), но для топологических пространств X , состоящих из одной точки;
- 4) для каждого сепарабельного банахова пространства V и выпуклого компакта B в сопряженном пространстве V^* найдется выпуклый компакт K в ℓ^2 и аффинный гомеоморфизм $h: B \rightarrow K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 3) очевидны. Импликация 4) $\Rightarrow$ 1) доказана в теореме 1 с помощью аффинного гомеоморфизма Кли. Не составит особого труда повторить доказательство теоремы 1 с аффинными гомеоморфизмами, существование которых гарантирует условие 4). Заметим, что нам даже не потребуются все аффинные гомеоморфизмы, а достаточно иметь только аффинные гомеоморфизмы шаров в сопряженном пространстве. Для доказательства импликации 3) $\Rightarrow$ 4) заметим, что для топологического пространства X , состоящего из одной точки, рассматриваемый класс сублинейных операторов состоит из непрерывных сублинейных функционалов $p: V \rightarrow \mathbb{R}$. В силу теоремы Хермандера [12] их субдифференциалы исчерпываются выпуклыми компактами в V^* . Напомним, что в V^* рассматривается *-слабая топология. Теорема доказана.

Основным объектом исследования в статье является следующий класс сублинейных операторов: $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$, где V – сепарабельное банахово пространство, а X – нормальное топологическое пространство. Если X – компакт, то все сублинейные операторы из этого класса являются субдифференцируемы [1; теорема 3]. Если X – нормальное топологическое пространство, то субдифференцируемость сублинейных операторов изучаемого класса доказана в следующем утверждении.

СЛЕДСТВИЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Всякий непрерывный сублинейный оператор $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$, где V – сепарабельное банахово пространство, а X – нормальное топологическое пространство, субдифференцируем.

Для доказательства субдифференцируемости P достаточно доказать компактную субдифференцируемость сублинейного оператора S , фигурирующего в теореме 1, так как ∂P операторно-аффинно гомеоморфно $\partial^c S$. Компактная субдифференцируемость S , очевидно, следует из классической теоремы Майкла о непрерывных селекторах и свойствах двойственного многозначного отображения F_S сублинейного оператора S .

В следующих двух теоремах доказано большее, т.е. что сублинейные операторы этого и только этого класса являются субдифференцируемыми.

ТЕОРЕМА 5. Следующие свойства для T_1 -пространств X равносильны:

- 1) X нормально;
- 2) всякий сублинейный оператор $P: \mathbb{R} \rightarrow BC(X)_\sim$ субдифференцируем;
- 3) всякий сублинейный оператор $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$ субдифференцируем, если V – любое сепарабельное банахово пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что банахово пространство V сепарабельно тогда и только тогда, когда его единичный шар $B(V^*, 1)$ в сопряженном пространстве со $*$ -слабой топологией метризуем [6; V.5.1]. Далее применяем теорему [2; теорема 3]. Эта теорема дает условие нормальности X для T_1 -пространств с помощью четырех равносильных условий существования непрерывных селекторов у многозначных отображений. Теперь для завершения доказательства осталось заметить, что условие 2) доказываемой теоремы равносильно условию 2) в [2; теорема 3], а условие 3) равносильно условию 4) в [2; теорема 3], если положить в нем $Y := B(V^*, 1)$.

ТЕОРЕМА 6. *Для банаховых пространств V следующие условия равносильны:*

- 1) V сепарабельное банахово пространство;
- 2) для любого нормального топологического пространства X непрерывный сублинейный оператор $P: V \rightarrow BC(X)_\sim$ субдифференцируем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ – это установленное выше следствие основной теоремы. Обратная импликация $2) \Rightarrow 1)$ следует из [1; теорема 3], так как компакт является нормальным топологическим пространством.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. Э. Линке, “Применения теоремы Майкла и ее обращения к сублинейным операторам”, *Матем. заметки*, **52:1** (1992), 67–75.
- [2] Ю. Э. Линке, “О конусе ограниченных полунепрерывных снизу функций”, *Матем. заметки*, **77:6** (2005), 886–902.
- [3] Ю. Э. Линке, “Об опорных множествах сублинейных операторов”, *Докл. АН СССР*, **207:3** (1972), 531–533.
- [4] I. Gelfand, “Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren”, *Матем. сб.*, **4(46):2** (1938), 235–286.
- [5] R. G. Bartle, “On compactness in functional analysis”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 35–57.
- [6] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*, т. 1: *Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [7] V. L. Klee, Jr., “Some topological properties of convex sets”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 30–45.
- [8] С. Bessaga, А. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, Monografie Matematyczne, **58**, PWN, Warszawa, 1975.
- [9] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986.
- [10] И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров, “О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах”, *Докл. АН СССР*, **22:1** (1939), 11–15.
- [11] М. М. Дэй, *Нормированные линейные пространства*, ИЛ, М., 1961.
- [12] L. Hörmander, “Sur la fonction d’appui des ensembles convexes dans une espace localement convexe”, *Ark.Mat.*, **3:2** (1955), 181–186.

Ю. Э. Линке

Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
г. Иркутск
E-mail: linke@icc.ru

Поступило

24.12.2008

Исправленный вариант

18.11.2010