Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Крепкогорский, Реализация интерполяционного метода Спарра в классах пространств гладких функций, *Матем. заметки*, 2001, том 70, выпуск 4, 581–590

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm770>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:00:54

УДК 517.982

РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА СПАРРА В КЛАССАХ ПРОСТРАНСТВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

В. Л. Крепкогорский

Интерполяционный многомерный метод Спарра реализуется в пространствах Бесова $B_{p,q}^s$ и Лизоркина–Трибеля $F_{p,q}^s$. Показано, что в результате получаются пространства Бесова типа $B_{p,q,(q)}^s$. Сформулирована интерполяционная теорема для пространств Бесова, использующая слабые условия вида $T: F_{p,1,(1)}^s \rightarrow F_{p,\infty,(\infty)}^{\tilde{s}}$.

Библиография: 8 названий.

В начале 70-х годов Спарром [1] был предложен многомерный интерполяционный метод, аналогичный хорошо известному методу Петре. В отличие от функторов метода Петре функторы Спарра действуют не на пары, а на наборы из n пространств. Различные обобщения результатов Спарра рассматривались в статьях [2]–[4]. Общая теория многомерных методов разработана достаточно глубоко, однако их применение вызывает значительные трудности. Допустим, что мы применяем многомерный функтор к набору пространств из некоторого семейства. Какое пространство мы получим в результате? Ответ на этот вопрос известен только для немногих классов пространств. Например, Спарр реализовал свой метод в классе пространств типа Бесова $S_p^{\vec{s}} B$ с векторным параметром $\vec{s}$ в случае, когда $p_0 = p_1 = p_2 = \dots = p_n$. Возможно, один из путей, который позволяет обойти возникающие при реализации трудности, – это использование теорем о стабильности (аналогов теоремы о реитерации). В статье Спарра приведены три теоремы о стабильности, в том числе очень полезные теоремы, связывающие функторы различной размерности. Однако во всех этих теоремах содержится оговорка, что они справедливы только при условии выполнения в данном классе пространств равенства $A_{\vec{\theta},q;K} = A_{\vec{\theta},q;J}$. Проверка этого условия представляет из себя нетривиальную задачу. Значительное продвижение в этом направлении достигнуто в статье Асекритовой и Кругляка [4], которые показали, что равенство $A_{\vec{\theta},q;K} = A_{\vec{\theta},q;J}$ выполняется в семействах банаховых функциональных структур и их ретрактов.

1. Метод Спарра. Рассмотрим набор из $n+1$ банаховых пространств $\overline{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$. Для $a \in \Sigma(\overline{A})$ запишем

$$K(\vec{t}, a, \overline{A}) = \inf \{t_0 \|a_0\|_{A_0} + t_1 \|a_1\|_{A_1} + \dots + t_n \|a_n\|_{A_n}\},$$

где $a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

Пусть H_+^n – множество всех векторов $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, для которых $\sum \lambda_j = 1$, $\lambda_j > 0$. Допустим, что $\bar{\theta} \in H_+^n$ и $1 \leq q \leq \infty$. Тогда определим норму $\Phi_{\bar{\theta}, q}$ с помощью равенства

$$\Phi_{\bar{\theta}, q} := \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |t_1^{-\theta_1} \dots t_n^{-\theta_n} \cdot f(1, t_1, t_2, \dots, t_n)|^q \frac{dt_1}{t_1} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/q}.$$

Рассмотрим три теоремы о стабильности метода Спарра [1].

ТЕОРЕМА А. Пусть $\bar{\theta}^i \in H_+^n$ ($i = 0, 1, \dots, m$), $\bar{\theta} \in H_+^n$, $\bar{\lambda} \in H_+^m$ с $\bar{\theta} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \bar{\theta}^i$. Если

а) $\mathbb{R}^{n+1}$ совпадает с линейной оболочкой множества векторов $\{\bar{\theta}^i\}_0^m$;

б) $A_{\bar{\theta}, q; K} = A_{\bar{\theta}, q; J}$,

то $(A_{\bar{\theta}^0, q_0}, A_{\bar{\theta}^1, q_1}, \dots, A_{\bar{\theta}^m, q_m})_{\bar{\lambda}, q} = A_{\bar{\theta}, q}$.

ТЕОРЕМА В. Пусть $\bar{\theta}^i \in H_+^n$ ($i = 0, 1, \dots, m$), $\bar{\theta} \in H_+^n$, $\bar{\lambda} \in H_+^m$ с $\bar{\theta} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \bar{\theta}^i$. Если

а) $1/q = \sum_{i=0}^m \lambda_i / q_i$;

б) $A_{\bar{\theta}, q; K} = A_{\bar{\theta}, q; J}$,

то $(A_{\bar{\theta}^0, q_0}, A_{\bar{\theta}^1, q_1}, \dots, A_{\bar{\theta}^m, q_m})_{\bar{\lambda}, q} = A_{\bar{\theta}, q}$.

ТЕОРЕМА С. При $\bar{\theta} \in H_+^n$, $\bar{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$, имеет место равенство

$$((A_0, A_n)_{\bar{\eta}, q}, (A_1, A_n)_{\bar{\eta}, q}, \dots, (A_{n-1}, A_n)_{\bar{\eta}, q})_{\bar{\lambda}, q} = A_{\bar{\theta}, q},$$

где

$$\bar{\eta} = (\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}, \theta_n), \quad \bar{\lambda} = \frac{(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})}{\theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}}.$$

В случае $n = 1$ функторы метода Спарра совпадают с обычными функторами метода Петре. Точнее, справедливо равенство

$$(A_0, A_1)_{\bar{\eta}, q; \text{Спарр}} = (A_0, A_1)_{\eta, q; \text{Петре}} \quad \text{при} \quad \bar{\eta} = (1 - \eta, \eta).$$

В дальнейшем мы будем отличать функторы Петре по скалярному первому параметру интерполяции (в данном случае это η).

Кроме того, будем использовать следующие интерполяционные формулы. Пусть $0 < \theta < 1$, $1 \leq q_0, q_1, q \leq \infty$, $1 < p_0, p_1, p < \infty$, $-\infty < s_0, s_1, s < \infty$,

$$(F_{p, q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), F_{p, q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta, q} = B_{p, q}^s(\mathbb{R}^n) \quad (D)$$

при $s_0 \neq s_1$ и $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$ [5, с. 223]

$$(B_{p_0, q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p_1, q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta, q} = B_{p, q, (q)}^s(\mathbb{R}^n) \quad (E)$$

при $p_0 \neq p_1$, $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$, $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1 - \theta)/q_0 + \theta/q_1$ [5, с. 218].

Если дополнительно $q = p$, то [5, с. 218]

$$(B_{p_0, q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p_1, q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta, q} = B_{p, p}^s(\mathbb{R}^n) = B_p^s(\mathbb{R}^n). \quad (F)$$

2. Пространства Лизоркина–Трибеля. В этом пункте мы реализуем метод Спарра в классе пространств Лизоркина–Трибеля. Пространства Лизоркина–Трибеля $F_{p,q}^s$ и Бесова $B_{p,q}^s$ мы будем изображать точками координатной плоскости, где на одной из осей откладывается величина $1/p$, а на другой – величина s . Если данному пространству соответствует точка M на плоскости, то будем обозначать это пространство $F_{(M),q}$ или $B_{(M),q}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $-\infty < s_j, s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q_j, q \leq \infty$, $\bar{\theta} \in H_+^2$, $j = 0, 1, 2$; при этом если два значения s_j равны между собой, то пусть соответствующие q_j также равны между собой. Положим

$$s = \sum_{j=0}^2 \theta_j s_j, \quad \frac{1}{p} = \sum_{j=0}^2 \frac{\theta_j}{p_j},$$

$Q(1/p, s)$ – внутренняя точка треугольника $\Delta M_j(1/p_j, s_j)$. Тогда

$$(F_{p_j, q_j}^{s_j}(\mathbb{R}^n))_{\bar{\theta}, q} = B_{p, q, (q)}^s(\mathbb{R}^n).$$

Докажем сначала лемму.

ЛЕММА 1. Даны треугольники $\Delta M_j(1/p_j, s_j)$ и $\Delta N_j(1/\tilde{p}_j, \tilde{s}_j)$, гомотетичные относительно общей вершины $M_2 = N_2$ ($q_2 = \tilde{q}_2$), $\Delta N_j \subset \Delta M_j$, $Q(1/p, s)$ – внутренняя точка “меньшего” треугольника ΔN_j ; числа $s_j, \tilde{s}_j, s, p, q_j, \tilde{q}_j, q$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и для некоторого вектора $\bar{\mu} \in H_+^2$ верно равенство

$$(F_{(N_j), \tilde{q}_j})_{\bar{\mu}, q} = B_{p, q, (q)}^s.$$

Тогда найдется вектор $\bar{\theta} \in H_+^2$ такой, что

$$(F_{(M_j), q_j})_{\bar{\theta}, q} = B_{p, q, (q)}^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме С

$$((F_{(N_0), \tilde{q}_0}, F_{(M_2), q_2})_{\eta, q}, (F_{(N_1), \tilde{q}_1}, F_{(M_2), q_2})_{\eta, q})_{\lambda, q} = (F_{(N_j), \tilde{q}_j})_{\bar{\mu}, q} = B_{p, q, (q)}^s$$

при $\eta = \mu_2$, $\lambda = \mu_1/(\mu_0 + \mu_1)$. Что представляют собой пространства

$$(F_{(N_i), \tilde{q}_i}, F_{(M_2), q_2})_{\eta, q}, \quad i = 0, 1?$$

Здесь возможны разные случаи:

- a) $\tilde{s}_i \neq s_2, \tilde{p}_i \neq p_2$;
- b) $\tilde{s}_i = s_2, \tilde{p}_i \neq p_2$;
- c) $\tilde{s}_i \neq s_2, \tilde{p}_i = p_2$.

В случае а) можно использовать формулу [5]

$$(F_{r_0, q_0}^{t_0}, F_{r_1, q_1}^{t_1})_{\alpha, q} = BL_{r, q}^{t, k} \quad (1)$$

где $t = (1 - \alpha)t_0 + \alpha t_1$, $1/r = (1 - \alpha)/t_0 + \alpha/t_1$, k — угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(1/r_i, t_i)$.

Доказательство в случаях б) и с) аналогично, только вместо (1) используются формулы (E) (для б)) и (D) (для с)).

Известно [5], что $BL_{p, 1}^{s, k} \subset F_{p, q}^s \subset BL_{p, \infty}^{s, k}$ при $1 \leq q \leq \infty$. Применяя теорему о реитерации с $\alpha = |M_i N_i|/|M_i M_2|$, из равенства

$$(F_{(M_i), q_i}, F_{(M_2), q_2})_{\alpha, r} = BL_{\tilde{p}_i, r}^{\tilde{s}_i, k}$$

получим

$$(F_{(M_i), q_i}, F_{(M_2), q_2})_{\gamma, q} = (F_{(N_i), \tilde{q}_i}, F_{(M_2), q_2})_{\eta, q} \quad (2)$$

при $\gamma = (1 - \eta)\alpha + \eta$. Треугольники ΔM_j и ΔN_j гомотетичны, поэтому α не зависит от i . Из равенства (2) следует

$$\begin{aligned} (F_{(M_j), q_j})_{\bar{\theta}, q} &= ((F_{(M_0), q_0}, F_{(M_2), q_2})_{\gamma, q}, (F_{(M_1), q_1}, F_{(M_2), q_2})_{\gamma, q})_{\lambda, q} \\ &= ((F_{(N_0), \tilde{q}_0}, F_{(M_2), q_2})_{\eta, q}, (F_{(N_1), \tilde{q}_1}, F_{(M_2), q_2})_{\eta, q})_{\lambda, q} = B_{p, q, (q)}^s \end{aligned}$$

при $\bar{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \theta_2)$, $\theta_2 = \gamma$, $\theta_1 = (1 - \gamma)\lambda$, $\theta_0 = (1 - \gamma)(1 - \lambda)$.

Допустим, применив функтор Спарра, мы получили пространство $B_{p, q, (q)}^s$. Будут ли выполняться нужные соотношения между параметрами $s, s_j, p, p_j, \bar{\theta}$? Ответ дает следующая лемма.

ЛЕММА 2. Если для данного треугольника $\Delta M_j(1/p_j, s_j)$ выполнены условия теоремы 1 и

$$(F_{p_j, q_j}^{s_j})_{\bar{\theta}, q} = B_{p, q, (q)}^s,$$

то

$$s = \sum_{j=0}^2 \theta_j s_j, \quad \frac{1}{p} = \sum_{j=0}^2 \frac{\theta_j}{p_j}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой (1). На первом этапе мы получаем пространства $BL_{\tilde{p}, q}^{\tilde{s}, k}$, или $F_{\tilde{p}, q}^{\tilde{s}}$, или $B_{\tilde{p}, q}^{\tilde{s}}$. В любом случае выполняются равенства

$$\tilde{s}_i = (1 - \eta)s_i + \eta s_2, \quad \frac{1}{\tilde{p}_i} = \frac{1 - \eta}{p_0} + \frac{\eta}{p_1}, \quad i = 0, 1.$$

Затем применяем функтор $(\cdot, \cdot)_{\lambda, q}$. При этом должны выполняться условия $s = (1 - \lambda)\tilde{s}_0 + \lambda\tilde{s}_1$ и $1/p = (1 - \lambda)/\tilde{p}_0 + \lambda/\tilde{p}_1$. Проверим справедливость равенства (3) для s :

$$\begin{aligned} s &= (1 - \lambda)\tilde{s}_0 + \lambda\tilde{s}_1 = (1 - \lambda)(1 - \eta)s_0 + (1 - \lambda)\eta s_2 + \lambda(1 - \eta)s_1 + \lambda\eta s_2 \\ &= (1 - \lambda)(1 - \eta)s_0 + \lambda(1 - \eta)s_1 + \eta s_2. \end{aligned}$$

Выразим η и λ через θ_j . Имеем $\eta = \theta_2$, $\lambda = \theta_1/(\theta_0 + \theta_1)$, при этом $\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1$. Отсюда можно найти $\theta_0 = (1 - \lambda)(1 - \eta)$, $\theta_1 = \lambda(1 - \eta)$, $\theta_2 = \eta$. Поэтому $s = \theta_0 s_0 + \theta_1 s_1 + \theta_2 s_2$.

Рис. 1

Доказательство теоремы 1. Лемма 1 позволяет доказывать теорему не обязательно для исходного треугольника, а для любого треугольника, гомотетичного исходному относительно одной из вершин и содержащего точку Q . Применяя лемму 1 трижды с гомотетией относительно каждой из вершин, мы можем показать, что достаточно доказать теорему для треугольника сколь угодно малых размеров (рис. 1).

На следующем этапе доказательства мы будем использовать теорему С, позволяющую представить функтор Спарра как композицию “одномерных” функторов Петре. К сожалению, классы пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля нестабильны относительно одномерных функторов. Так при интерполяции пространств $F_{p,q}^s$ по наклонному отрезку ($p_1 \neq p_2, s_1 \neq s_2$) мы получаем пространства $BL_{p,q}^{s,k}$, которые совпадают с пространствами Бесова в “диагональном” случае $p = q$. Другой удобный для функторов Петре частный случай мы имеем при интерполяции по вертикальному отрезку ($p_1 = p_2$).

Поэтому будет рассмотрен вспомогательный прямоугольный треугольник ΔR_i , при интерполяции вдоль сторон которого мы будем иметь дело с этими частными случаями.

Возможны два случая:

- а) $q \neq p$;
- б) $q = p$.

Рассмотрим сначала случай а). Если $q \neq p$, то можно, выбрав треугольник ΔM_j достаточно малым, найти прямоугольный треугольник $\Delta R_j(1/r_j, u_j)$, $j = 0, 1, 2$, обладающий следующими свойствами. Точки M_j являются внутренними точками ΔR_j , катеты треугольника ΔR_j параллельны осям координат, гипотенуза содержит точку $Q_1(1/q, s)$ и $1 < r_j < \infty$. Выберем числа η и λ таким образом, чтобы $s = (1 - \eta)u_0 + \eta u_2$, $1/q = (1 - \eta)/r_1 + \eta/r_2$ и $1/p = (1 - \lambda)/r_2 + \lambda/q$ (рис. 2). В этом случае по теореме С

$$(F_{(R_i), q_i})_{\bar{\theta}^*, q} = ((F_{r_2, q_0}^{u_0}, F_{r_2, q_2}^{u_2})_{\eta, q}, (F_{r_1, q_1}^{u_1}, F_{r_2, q_2}^{u_2})_{\eta, q})_{\lambda, q}, \quad (4)$$

где $\bar{\theta}^* = (\theta_0^*, \theta_1^*, \theta_2^*)$, $\theta_0^* = (1 - \eta)(1 - \lambda)$, $\theta_1^* = \lambda(1 - \eta)$, $\theta_2^* = \eta$.

Учитывая, что $r_0 = r_2 = r$ и $s = (1 - \eta)u_0 + \eta u_2$, с помощью формулы (D) можно записать

$$(F_{r, q_0}^{u_0}, F_{r, q_2}^{u_2})_{\eta, q} = B_{r, q}^s.$$

Так как $1/q = (1 - \eta)/r_1 + \eta/r_2$ и $s = (1 - \eta)u_0 + \eta u_2$, из формулы (F) следует

$$(F_{r_1, q_1}^{u_1}, F_{r_2, q_2}^{u_2})_{\eta, q} = B_{q, q}^s.$$

Рис. 2

На втором этапе интерполяции по формуле (4) получаем пространство

$$(B_{r,q}^s, B_{q,q}^s)_{\lambda,q} = B_{p,q,(q)}^s.$$

Итак, $(F_{(R_i),q_i})_{\bar{\theta}^*,q} = B_{p,q,(q)}^s$. Мы получили нужное утверждение, но для вспомогательного треугольника ΔR_j . Докажем, что $(F_{(M_j),q_j})_{\bar{\theta},q} = B_{p,q,(q)}^s$. Чтобы перейти к треугольнику ΔM_j , надо воспользоваться теоремой А о стабильности. Для этого докажем вложения

$$(F_{(R_i),w_i})_{\bar{\theta}^j,1} \subset F_{(M_j),q_j} \subset (F_{(R_i),w_i})_{\bar{\theta}^j,\infty}, \quad (5)$$

где $\bar{\theta}^j = (\theta_0^j, \theta_1^j, \theta_2^j)$, $M_j = M_j(1/p_j, s_j)$, $s_j = \sum_{i=0}^2 \theta_i^j w_i$, $1/p_j = \sum_{i=0}^2 \theta_i^j / r_i$. Докажем эти вложения хотя бы для $j = 0$. Положим $\lambda = \theta_1^0 / (\theta_0^0 + \theta_1^0)$, $\eta = \theta_2^0$ и $w = 1$ или ∞ . Тогда $(F_{(R_0),w_0}, F_{(R_2),w_2})_{\eta,w} = (F_{r,w_0}^{u_0}, F_{r,w_2}^{u_2})_{\eta,w} = B_{r,w}^{s_0}$ при $s_0 = (1 - \eta)u_0 + \eta u_1$ (формула (D)). Хорошо известны вложения $B_{r,1}^{s_0} \subset F_{r,q_0}^{s_0} \subset B_{r,\infty}^{s_0}$. Интерполируя по отрезку R_1R_2 , получим равенство $(F_{(R_1),w_1}, F_{(R_2),w_2})_{\eta,w} = BL_{r^*,w}^{s_0,k}$ [6], где $1/r^* = (1 - \eta)/r_1 + \eta/r_2$. Известно, что при $1 \leq q_0 \leq \infty$ справедливы вложения $BL_{r^*,1}^{s_0,k} \subset F_{r^*,q_0}^{s_0} \subset BL_{r^*,\infty}^{s_0,k}$. Поэтому

$$\begin{aligned} (F_{(R_i),w_i})_{\bar{\theta}^0,1} &= (B_{r,1}^{s_0}, BL_{r^*,1}^{s_0,k})_{\lambda,1} \subset (F_{r,q_0}^{s_0}, F_{r^*,q_0}^{s_0})_{\lambda,q_0} \\ &\subset (B_{r,\infty}^{s_0}, BL_{r^*,\infty}^{s_0,k})_{\lambda,\infty} = (F_{(R_i),w_i})_{\bar{\theta}^0,\infty}. \end{aligned}$$

Так как $(F_{r,q_0}^{s_0}, F_{r^*,q_0}^{s_0})_{\lambda,q_0} = F_{p_0,q_0}^{s_0}$, то отсюда следует вложение (5). По теореме А

$$((F_{(R_0),w_0})_{\bar{\theta}^0,w}, (F_{(R_1),w_1})_{\bar{\theta}^1,w}, (F_{(R_2),w_2})_{\bar{\theta}^2,w})_{\bar{\theta},q} = (F_{(R_i),w_i})_{\bar{\theta}^*,q} = B_{p,q,(q)}^s$$

независимо от w . Поэтому из вложений (5) следует равенство

$$(F_{(M_j),q_j})_{\bar{\theta},q} = B_{p,q,(q)}^s.$$

Таким образом, теорема доказана при условии, что $p \neq q$.

Разберем случай b), когда $p = q$. Для доказательства выберем две точки $Q_1(1/r_1, s)$, $Q_2(1/r_2, s)$, принадлежащие внутренности треугольника ΔM_j , так, чтобы $r_1 < p < r_2$. Так как $q \neq r_1$ и $q \neq r_2$, то при соответствующих $\bar{\theta}^i \in H_+^2$ справедливо равенство $(F_{(M_j), q_j})_{\bar{\theta}^i, q} = B_{(Q_i), q, (q)}$. Тогда можно выбрать $\lambda \in (0, 1)$ такое, что

$$(B_{(Q_1), q, (q)}, B_{(Q_2), q, (q)})_{\lambda, q} = B_{p, q, (q)}^s.$$

С помощью теоремы В получаем равенство

$$(F_{(M_j), q_j})_{\bar{\theta}, q} = ((F_{(M_j), q_j})_{\bar{\theta}^1, q}, (F_{(M_j), q_j})_{\bar{\theta}^2, q})_{\lambda, q} = B_{p, q, (q)}^s.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $1 < p_i < \infty$, $1 < q_i < \infty$, $0 < \lambda < 1$ и $1/q = (1 - \lambda)/q_0 + \lambda/q_1$, $1/p = (1 - \lambda)/p_0 + \lambda/p_1$, $s = (1 - \lambda)s_0 + \lambda s_1$. Тогда

$$(B_{p_0, q_0, (q_0)}^{s_0}, B_{p_1, q_1, (q_1)}^{s_1})_{\lambda, q} = B_{p, q, (q)}^s.$$

Разберем отдельно случай, когда $q = 1$ или ∞ .

ТЕОРЕМА 2. Если величины s_j, p_j, q_j , $j = 0, 1, 2$, удовлетворяют условиям теоремы 1, то справедливы вложения

$$B_{p, 1, (1)}^s \subset (F_{p_j, q_j}^{s_j})_{\bar{\theta}, 1} \subset F_{p, 1, (1)}^s, \quad F_{\infty, (\infty)}^s \subset (F_{p_j, q_j}^{s_j})_{\bar{\theta}, \infty} \subset B_{p, \infty, (\infty)}^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательный треугольник $\Delta R_i(1/r_i, u_i)$, $i = 0, 1, 2$, для которого точки $(1/p_j, s_j)$ являются внутренними, $1 < r_i < \infty$ и $u_0 = u_1$. Тогда можно указать числа $\eta \in (0, 1)$ и $\lambda \in (0, 1)$ такие, что

$$(F_{p_j, q_j}^{s_j})_{\bar{\theta}, q} = ((F_{r_0, q_0}^{u_0}, F_{r_2, q_2}^{u_2})_{\eta, q}, (F_{r_1, q_1}^{u_1}, F_{r_2, q_2}^{u_2})_{\eta, q})_{\lambda, q}.$$

Заметим, что $(F_{r_i, q_i}^{u_i}, F_{r_2, q_2}^{u_2})_{\eta, 1} = BL_{r_i, 1}^{s, k}$ [6]. Вообще говоря, известно, что $BL_{p, 1}^{s, k} \neq B_{p, 1}^s$ и $BL_{p, 1}^{s, k} \not\subset B_{p, 1}^s$ [6], но $B_{p, 1, (1)}^s \subset BL_{p, 1}^{s, k} \subset F_{p, 1}^s$ [6], [7]. Так как $(B_{r_0, 1, (1)}^s, B_{r_1, 1, (1)}^s)_{\lambda, 1} = B_{p, 1, (1)}^s$ и $(F_{r_0, 1}^s, F_{r_1, 1}^s)_{\lambda, 1} = F_{p, 1, (1)}^s$, то

$$B_{p, 1, (1)}^s \subset (F_{r_i, q_i}^{u_i})_{\bar{\theta}^*, 1} \subset F_{p, 1, (1)}^s.$$

Используя теорему А, можно заключить, что $(F_{r_i, q_i}^{u_i})_{\bar{\theta}^*, 1} = (F_{p_j, q_j}^{s_j})_{\bar{\theta}, 1}$. Следовательно,

$$B_{p, 1, (1)}^s \subset (F_{p_j, q_j}^{s_j})_{\bar{\theta}, 1} \subset F_{p, 1, (1)}^s.$$

Аналогично,

$$F_{p, \infty, (\infty)}^s \subset (F_{p_j, q_j}^{s_j})_{\bar{\theta}, \infty} \subset B_{p, \infty, (\infty)}^s.$$

3. Пространства Бесова. Для пространств Бесова типа $B_{p, q, (q)}^s$ докажем интерполяционную теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть точки $M_j(1/p_j, s_j)$, $j = 0, 1, \dots, m$, $m > 2$, образуют выпуклый многоугольник. Предположим, что никакие три из них не лежат на одной прямой и $1 < p_j < \infty$, $1 < q_j < \infty$, $\bar{\lambda} \in H_+^m$, $s = \sum_{j=0}^m \lambda_j s_j$, $1/p = \sum_{j=0}^m \lambda_j/p_j$. Тогда

$$(B_{p_j, q_j, (q_j)}^{s_j})_{\bar{\lambda}, q} = B_{p, q, (q)}^s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данного многоугольника найдется треугольник $\Delta R_i(1/r_i, u_i)$ такой, что M_j – внутренние точки этого треугольника и $1 < r_i < \infty$. Тогда по теореме 1 можно указать векторы $\bar{\theta}^j \in H_+^2$ такие, что при любых $v_i \in [1, \infty]$ $B_{p_j, q_j, (q_j)}^{s_j} = (F_{(R_i), v_i})_{\bar{\theta}^j, q_j}$. По теореме А

$$(B_{p_j, q_j, (q_j)}^{s_j})_{\bar{\lambda}, q} = ((F_{(R_i), v_i})_{\bar{\theta}^j, q_j})_{\bar{\lambda}, q} = (F_{(R_i), v_i})_{\bar{\theta}, q} = B_{p, q, (q)}^s,$$

если $\bar{\theta} = \sum_{j=0}^m \lambda_j \bar{\theta}^j$.

Сформулируем интерполяционную теорему для пространств Бесова, использующую слабые условия вида $T: F_{(M), 1, (1)} \rightarrow F_{(N), \infty, (\infty)}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть заданы два невырожденных треугольника $\Delta M_j(1/p_j, s_j)$, $\Delta N_j(1/r_j, u_j)$ и вектор $\bar{\theta} \in H_+^2$. Для линейного оператора T выполняются слабые условия $T: F_{(M_j), 1, (1)} \rightarrow F_{(N_j), \infty, (\infty)}$, $j = 0, 1, 2$, $1/p = \sum_{j=0}^2 \theta_j/p_j$, $s = \sum_{j=0}^2 \theta_j s_j$, $1/r = \sum_{j=0}^2 \theta_j/r_j$, $u = \sum_{j=0}^2 \theta_j u_j$. Тогда оператор $T: B_{p, q, (q)}^s \rightarrow B_{r, q, (q)}^u$. Если, кроме того, выполняется условие $r \geq p$, то оператор $T: B_p^s \rightarrow B_r^u$.

4. Связь между функторами Спарра и Петре. Все приведенные выше доказательства можно было бы существенно упростить, если вместо теоремы С мы имели бы более простую формулу для связи между функторами Спарра и Петре. В качестве гипотезы можно рассмотреть формулу

$$(\bar{A})_{\bar{\theta}, q} = ((A_0, A_1)_{\eta, q}, (A_2, A_3)_{\eta, q})_{\lambda, q} \quad (6)$$

при $n = 3$, $\eta = \theta_1 + \theta_3$, $\lambda = \theta_2 + \theta_3$. Из результатов данной статьи и [7] вытекает, что это равенство действительно имеет место при $A_i = F_{p_i, q_i}^{s_i}$ или $B_{p_i, q_i}^{s_i}$, где $s_0 = s_1$, $s_2 = s_3$, $p_0 = p_2$, $p_1 = p_3$, $1 < q < \infty$. Однако равенство (6) справедливо не всегда. В статье [2] приведен соответствующий контрпример. Показано, что для метода Фернандеса (“многомерный” интерполяционный метод, аналогичный методу Спарра [8]) отсюда следует отношение $(\bar{A})_{\bar{\theta}, q; K, \text{Ферн}} \neq (\bar{A})_{\bar{\theta}, q; J, \text{Ферн}}$. Здесь рассматривается пример, в котором справедливо равенство $(\bar{A})_{\bar{\theta}, q; K, \text{Спарр}} = (\bar{A})_{\bar{\theta}, q; J, \text{Спарр}}$, но формула (6) неверна.

ПРИМЕР. Пусть $A_0 = L_{p_0}[\ell_r^{s_0}](\mathbb{R}^1)$, $A_1 = L_{p_1}[\ell_r^{s_1}](\mathbb{R}^1)$, $A_2 = A_3 = L_{p_2}[\ell_r^{s_2}](\mathbb{R}^1)$, $\bar{\theta} \in H_+^3$, $1 < p_0, p, p_1 < \infty$, $q = p$, $p_2 \neq p$, $\eta = \theta_1 + \theta_2$, $\lambda = \theta_2 + \theta_3$, $1/p = (1 - \eta)/p_0 + \eta/p_1$, $s = (1 - \lambda)s_0 + \lambda s_1$.

Легко видеть, что функтор Спарра не зависит от порядка нумерации пространств A_1, A_2, A_3 , т.е.

$$(A_0, A_1, A_2, A_3)_{\bar{\theta}, q} = (A_0, A_2, A_1, A_3)_{\bar{\theta}^*, q},$$

где $\bar{\theta}^* = (\theta_0, \theta_2, \theta_1, \theta_3)$. Применим формулу (6) к правой части этого равенства. Тогда

$$(A_0, A_2, A_1, A_3)_{\bar{\theta}^*, q} = ((A_0, A_2)_{\eta^*, q}, (A_1, A_3)_{\eta^*, q})_{\lambda^*, q},$$

где $\eta^* = \theta_2 + \theta_3 = \lambda$, $\lambda^* = \theta_1 + \theta_3 = \eta$, т.е. если формула (6) верна, то должно выполняться равенство

$$((A_0, A_1)_{\eta, q}, (A_2, A_3)_{\eta, q})_{\lambda, q} = ((A_0, A_2)_{\lambda, q}, (A_1, A_3)_{\lambda, q})_{\eta, q}.$$

Покажем, что в нашем случае это неверно. Так как $A_2 = A_3$, то по формуле (C)

$$((A_0, A_2)_{\lambda, q}, (A_1, A_3)_{\lambda, q})_{\eta, q} = ((A_0, A_2)_{\lambda, q}, (A_1, A_2)_{\lambda, q})_{\eta, q} = (A_0, A_1, A_2)_{\bar{\nu}, q},$$

где $\nu_0 = (1 - \lambda)(1 - \eta)$, $\nu_1 = \eta(1 - \lambda)$, $\nu_2 = \lambda$. Заметим, что все формулы для интерполяции пар пространств $(F_{p_0, q_0}^{s_0}, F_{p_1, q_1}^{s_1})$ имеют аналоги для пространств $L_{p_i}[\ell_{q_i}^{s_i}]$. При этом вместо утверждения теоремы 1 мы получаем равенство $(L_{p_i}[\ell_{q_i}^{s_i}])_{\bar{\theta}, q} = \ell_q^s[L_{p, q}]$. В нашем случае это означает, что $(A_0, A_1, A_2)_{\bar{\nu}, q} = \ell_q^s[L_{p^*, q}]$, где $1/p^* = \sum_{i=0}^2 \nu_i/p_i$.

Найдем пространства $((A_0, A_1)_{\eta, q}, (A_2, A_3)_{\eta, q})_{\lambda, q}$. На первом этапе

$$(A_0, A_1)_{\eta, q} = (L_{p_0}[\ell_r^{s_0}], L_{p_1}[\ell_r^{s_0}])_{\lambda, q} = L_q[\ell_r^{s_0}],$$

так как $q = p = (1 - \lambda)/p_0 + \lambda/p_1$, и

$$(A_2, A_3)_{\eta, q} = A_2 = L_{p_2}[\ell_r^{s_1}],$$

так как $A_2 = A_3$.

Осталось найти $(L_q[\ell_r^{s_0}], L_{p_2}[\ell_r^{s_1}])_{\lambda, q}$. Получаются пространства [6]

$$L_{p^*, q}^{s, k} := L_{p^*, q}(2^{j(s-k/p^*)}, 2^{jk} \nu \times m_1),$$

т.е. пространства Лоренца на $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}_1$ с весом $2^{j(s-k/p^*)}$ и мерой $2^{jk} \nu \times m_1$, ν – атомическая мера на $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ с мерой атома, равной единице, k – угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(1/p, s_0)$ и $(1/p_2, s_1)$,

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1 - \lambda}{q} + \frac{\lambda}{p_2} \neq \frac{1}{p}, \quad s = (1 - \lambda)s_0 + \lambda s_1.$$

Докажем, что $\ell_q^s[L_{p^*, q}] \neq L_{p^*, q}^{s, k}$. Для этого рассмотрим последовательность функций

$$h_n = (h_j^{(n)})_{j=0}^\infty,$$

$$h_j^{(n)} = \begin{cases} 2^{-j(s-k/p^*)} \chi_{[0, 2^{-j}k]}(x) & \text{при } j \leq n, \\ 0 & \text{при } j > n, \end{cases}$$

определенных на $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}_1$, $n, j \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}_1$. Оценим нормы

$$\begin{aligned} \|h_n | L_{p^*, q}^{s, k}\| &= \left(\int_0^\infty (t^{1/p^*} (\{\chi_{[0, 2^{-j}k]}(x) 2^{j(s-k/p^*)} 2^{-j(s-k/p^*)}\}_{j=0}^n)^*)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty (t^{1/p^*} \chi_{[0, n]}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \left(\int_0^n t^{q/p^* - 1} dt \right)^{1/q} \\ &= C(t^{q/p^*} |_0^n)^{1/q} = Cn^{1/p^*}, \end{aligned}$$

$$\|h_n | \ell_q^s[L_{p, q}]\| = C \|\{2^{-j(s-k/p^*)} 2^{-jk/p^*}\}_{j=0}^n | \ell_q^s\| = C \|\{2^{-js} 2^{js}\}_{j=0}^n | \ell_q\| = Cn^{1/q}.$$

Так как $q = p \neq p^*$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|h_n | L_{p^*, q}^{s, k}\|}{\|h_n | \ell_q^s[L_{p^*, q}]\|} = 0 \text{ или } \infty.$$

Следовательно,

$$\left((A_0, A_1)_{\eta, q}, (A_2, A_3)_{\eta, q}\right)_{\lambda, q} \neq \left((A_0, A_2)_{\lambda, q}, (A_1, A_3)_{\lambda, q}\right)_{\eta, q}$$

и формула (6) в данном случае неверна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Sparr G. Interpolation of several Banach spaces // Ann. Mat. Pura Appl. 1976. V. 99. P. 247–316.
- [2] Cobos F., Peetre J. Interpolation of compact operators: the multidimensional case // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1991. V. 63. P. 371–400.
- [3] Carro M. J. Real interpolation for families of Banach spaces // Studia Math. 1994. V. 59. № 1. P. 1–21.
- [4] Asekritova I., Krugljak N. On equivalence of K - and J -methods for $(n + 1)$ -tuples of Banach spaces // Studia Math. 1997. V. 122. № 2. P. 99–115.
- [5] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [6] Крепкогорский В. Л. Интерполяция в пространствах Лизоркина–Трибеля и Бесова // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 7. С. 63–76.
- [7] Крепкогорский В. Л. О многомерных методах интерполяции // Изв. вузов. Матем. 1999. № 11. С. 41–49.
- [8] Fernandez D. L. Interpolation of 2^d Banach spaces and the Calderon space $X(E)$ // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1988. V. 56. P. 143–162.

Казанский филиал военного артиллерийского университета

Поступило
27.01.2000