Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Р. Каюмов, О голоморфных движениях n -симметричных функций, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 848–854

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:31:01

О голоморфных движениях n -симметричных функций

И. Р. Каюмов

В данной работе мы обобщаем одну задачу, рассмотренную П. Дюреном, об однолиственности одного семейства n -симметричных функций, порожденных интегралами от функций вида $\exp(\lambda \zeta^n)$. Наш подход основан на использовании обратного преобразования Фабера, критерия однолиственности Мартио–Сарваса и λ -леммы Мане, Сада и Сулливана. В работе также сформулирована гипотеза об однолиственности некоторого семейства n -симметричных функций, которая является ослабленной формой гипотезы Даникаса–Рушевея об однолиственности одного интегрального преобразования голоморфных функций.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Предположим, что функция f голоморфна в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Беккер в работе [1] показал, что если для любого $z \in \mathbb{D}$

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{1}{1 - |z|^2},$$

то функция f однолистна в $\mathbb{D}$. Под *однолистностью* отображения понимается инъективность.

Дюрен [2; с. 274], используя этот критерий однолиственности, показал, что при $|\lambda| \leq e/2$ функции

$$f_n(z) = \int_0^z e^{\lambda t^n} dt \quad (1)$$

однолистны в $\mathbb{D}$. В связи с этим возникает естественный вопрос: при каких λ функция (1) однолистна в $\mathbb{D}$? При $n \leq 10$ данная задача была численно решена Гайдуком в [3].

Основной целью данной работы является исследование однолиственности более общего класса n -симметричных голоморфных в единичном круге функций при больших значениях n .

2. Основные результаты. Предположим, что $\Phi(z)$ голоморфна в $\mathbb{D}$ и $\Phi(0) = 1$. Определим последовательность n -симметричных функций

$$f_n(z) = \int_0^z \Phi(t^n) dt. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-00381, 09-01-12188-офи-м) и Федерального агентства по образованию (госконтракт № П944).

Напомним, что голоморфная в $\mathbb{D}$ функция g называется n -симметричной, если $g(e^{i2\pi/n}z) = e^{i2\pi/n}g(z)$ для всех $z \in \mathbb{D}$.

Нетрудно показать, что любая n -симметричная функция может быть представлена в виде (2). Например, функции (1) являются функциями вида (2) при $\Phi(z) = e^{\lambda z}$.

Основная проблема нашей работы может быть сформулирована так: для каких функций Φ найдется натуральное N такое, что функции (2) однолиственны в $\mathbb{D}$ для всех $n \geq N$?

Оказывается, что определяющую роль играет функция

$$\varphi(z) = z \exp \int_0^z \frac{\Phi(t) - 1}{t} dt,$$

а именно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. а) Если существует натуральное N такое, что для всех $n \geq N$ функции f_n однолиственны в $\mathbb{D}$, то φ также однолиственна в $\mathbb{D}$.

б) Обратно, если φ отображает круг $\mathbb{D}$ на односвязную область с квазиконформной границей, то найдется натуральное N такое, что функции f_n однолиственны в $\mathbb{D}$ при любом $n \geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства а) определим последовательность голоморфных функций $\varphi_n(z) = f_n(\sqrt[n]{z})^n$, другими словами рассмотрим обратное преобразование Фабера однолистных n -симметричных функций f_n . В [4; с. 55] доказывалось, что преобразование Фабера переводит однолистные функции в однолистные. Аналогичным образом, нетрудно показать, что обратное преобразование Фабера также сохраняет однолиственность. Следовательно, функции $\varphi_n(z)$ будут однолиственными в единичном круге.

Пусть $\Phi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$. Тогда

$$\varphi_n(z) = z \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{nk+1} z^k \right)^n \rightarrow z \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} z^k = \varphi(z) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Несложно показать, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ (ниже мы убедимся, что в квазиконформном случае имеет место равномерная сходимость в $\mathbb{D}$). Поскольку функции φ_n однолиственны при больших n , то в силу теоремы Гурвица φ также однолиственна в $\mathbb{D}$.

Для доказательства б) нам понадобится один результат Мартио и Сарваса [5], являющийся следствием результатов, полученных Альфорсом и Берсом. Они доказали, что если Ω – односвязная область с квазиконформной границей, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что условие

$$\left| \frac{\psi''(z)}{\psi'(z)} \right| \leq \varepsilon \rho(z, \Omega) \quad (3)$$

гарантирует однолиственность голоморфной в Ω функции ψ . Здесь $\rho(z, \Omega)$ – плотность гиперболической метрики в Ω .

Из цепочки равенств

$$\varphi'_n(z) = f'_n(\sqrt[n]{z}) z^{1/n-1} f_n(\sqrt[n]{z})^{n-1} = \Phi(z) \left(\frac{\varphi_n(z)}{z} \right)^{1-1/n} = \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)} \left(\frac{\varphi_n(z)}{z} \right)^{1-1/n}$$

следует, что

$$|\ln \varphi'_n - \ln \varphi'| = \left| \ln \frac{\varphi_n}{z} - \ln \frac{\varphi}{z} - \frac{1}{n} \ln \frac{\varphi_n}{z} \right| \leq \left| \ln \frac{\varphi_n}{z} - \ln \frac{\varphi}{z} \right| + \frac{1}{n} \left| \ln \frac{\varphi_n}{z} \right|. \quad (4)$$

Мы хотим показать, что

$$|\ln \varphi'_n - \ln \varphi'| \rightarrow 0 \quad \text{равномерно в } \overline{\mathbb{D}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

С этой целью докажем, что

$$\left| \ln \frac{\varphi_n}{z} - \ln \frac{\varphi}{z} \right| \rightarrow 0 \quad \text{равномерно в } \overline{\mathbb{D}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Выше было замечено, что $\Phi(z) = z\varphi'(z)/\varphi(z)$. Следовательно $a_k = k\gamma_k$, где γ_k — логарифмические коэффициенты однолистной функции φ , т.е. коэффициенты Тейлора функции $\ln(\varphi(z)/z)$. Из результатов Смита и Стегенги [6] следует, что существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1+\alpha} |\gamma_k|^2 < \infty,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty. \quad (7)$$

Следует отметить, что Смит и Стегенга доказали неравенство для коэффициентов гёльдеровых функций (а следовательно, и для квазиконформных) отображений φ , оценивая интегральные средние от модулей производных с использованием классических неравенств между интегральными средними и коэффициентами, восходящими к Литтлвуду. В силу того, что φ отделено от нуля и бесконечности, неравенство (7) останется справедливым, если заменить коэффициенты функции на логарифмические, поскольку интегральные средние от $|\varphi'|$ и $|z\varphi'/\varphi|$ сравнимы.

Из (7) следует, что

$$\ln \frac{\varphi_n(z)}{z} = n \ln \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{nk+1} z^k \right) = n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{nk+1} z^k + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Несложный анализ показывает, что последнее выражение сходится к

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} z^k = \ln \frac{\varphi(z)}{z}$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно в $\overline{\mathbb{D}}$, что доказывает (6), и как следствие (5), потому, что функция $\ln(\varphi(z)/z)$ отделена от нуля и бесконечности, так что второе слагаемое последнего выражения в (4) равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Применяя лемму Шварца к (5), получаем, что

$$\|\ln \varphi'_n - \ln \varphi'\|_{\mathbb{B}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $\|h\|_{\mathbb{B}} = \sup_{|z| < 1} (1 - |z|^2)|h'(z)|$ – норма Блоха. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное N такое, что для всех $n \geq N$ и $z \in \mathbb{D}$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{\varphi_n''(z)}{\varphi_n'(z)} - \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{1 - |z|^2}. \quad (8)$$

Полагая $\psi_n = \varphi_n \circ \varphi^{-1}$ и применяя (8), получаем (3), что доказывает однолиственность функции ψ_n , а следовательно, и φ_n в $\mathbb{D}$ при достаточно больших n . Теорема 1 доказана.

В дальнейшем нам потребуется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть r – некоторое положительное число, E – некоторое подмножество $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}_r = \{\lambda : |\lambda| < r\}$. *Голоморфным движением E* называется отображение $h : \mathbb{D}_r \times E \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям

- (a) для любого фиксированного $z \in E$ функция $h(\lambda, z)$ голоморфна в круге $\mathbb{D}_r$;
- (b) для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{D}_r$ функция $h(\lambda, z)$ инъективна в E ;
- (c) $h(0, z) = z$ для всех $z \in E$.

Определение 1 дано в работе Мане, Сада и Сулливана [7] для $r = 1$. Параметр $r > 0$ введен нами для удобства.

Пусть функция $\Phi(\lambda, z)$ голоморфна в $\mathbb{D}_r \times \mathbb{D}$ и $\Phi(0, z) = 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Положим

$$f_n(\lambda, z) = \int_0^z \Phi(\lambda, t^n) dt. \quad (9)$$

Выше нами была сформулирована основная проблема, которую мы теперь уточним (в связи с появлением дополнительно параметра λ): найти максимальное $\lambda(n)$ такое, что функции (9) однолиственны в $\mathbb{D}$ при любых значениях параметра λ , удовлетворяющего неравенству $|\lambda| \leq \lambda(n)$.

Положим

$$\varphi(\lambda, z) = z \exp \int_0^z \frac{\Phi(\lambda, t) - 1}{t} dt, \quad (10)$$

$$\lambda_{\min} = \inf\{|\lambda| : \varphi(\lambda, z) \text{ не однолистна в } \mathbb{D}\},$$

$$\lambda_{\max} = \max\{|\lambda| : \varphi(\lambda, z) \text{ однолистна в } \mathbb{D}\}.$$

Следующая теорема дает “асимптотическое решение” поставленной проблемы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть λ – некоторое комплексное число. Если существует натуральное N такое, что функции $f_n(\lambda, z)$ однолиственны (по переменному z) в $\mathbb{D}$ для всех $n \geq N$, то $|\lambda| \leq \lambda_{\max}$.

Обратно, если $|\lambda| < \lambda_{\min}$, то найдется натуральное число N такое, что функции $f_n(\lambda, z)$ однолиственны в $\mathbb{D}$ при $n \geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует натуральное N такое, что функции $f_n(\lambda, z)$ однолиственны (по переменной z) в $\mathbb{D}$ для всех $n \geq N$. Тогда часть а) теоремы 1 влечет, что функции (10) однолиственны (по переменной z) в круге $\mathbb{D}$. Следовательно, $|\lambda| \leq \lambda_{\max}$, что доказывает первую часть теоремы 2.

Докажем теперь вторую часть теоремы 2. Для этого предположим, что $|\lambda| < \lambda_{\min}$. Нетрудно видеть, что функция $\varphi(\lambda, z)$ является голоморфным движением на $\mathbb{D}_r \times E$,

где $r = \lambda_{\min}$ и $E = \mathbb{D}$. В силу λ -леммы Мане, Сада и Сулливана [7], функция $\varphi(\lambda, z)$ является квазиконформным отображением круга $\mathbb{D}$ для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_{\min}}$. Теперь из части б) теоремы 1 следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_{\min}}$ найдется натуральное N такое, что функции (9) однолиственны в круге $\mathbb{D}$. Теорема 2 доказана.

Заметим, что, используя теорему 2, легко проверить, что функция $f_n(\lambda, z)$ является голоморфным движением на множестве $\mathbb{D}_{\lambda_{\min}} \times \mathbb{D}$ для достаточно большого n . Снова применяя λ -лемму Мане, Сада и Сулливана заключаем, что если $|\lambda| < \lambda_{\min}$, то найдется натуральное N такое, что функции $f_n(\lambda, z)$ являются квазиконформными отображениями $\mathbb{D}$ для любых $n \geq N$.

Чтобы определить $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ нужно исследовать однолиственность однопараметрического семейства функций (10), для чего нужно задать Φ . Во многих случаях $\lambda_{\min} = \lambda_{\max}$. Например, в исходной задаче $\Phi(\lambda, t) = \exp(\lambda t)$,

$$\varphi(\lambda, z) = z \exp \int_0^z \frac{e^{\lambda t} - 1}{t} dt.$$

Ясно, что $\lambda_{\min} = \lambda_{\max}$. В работе [8] показано, что функция $\varphi(\lambda, z)$ однолиственна в $\mathbb{D}$ для любого λ такого, что $|\lambda| \leq \lambda_{\min}$, где

$$\lambda_{\min} = \frac{\pi}{2 \sin \theta}.$$

Здесь θ – единственный корень уравнения

$$\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \exp(-x \operatorname{ctg} \theta) dx$$

на интервале $(0, \pi/2)$. Следовательно, $\lambda_{\min} = \lambda_{\max} = 1.7646 \dots$.

Теорема 1, доказанная выше, позволяет сформулировать такую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Пусть $\Phi(z)$ голоморфна в $\mathbb{D}$ и $\Phi(0) = 1$. Тогда функция

$$\varphi(z) = z \exp \int_0^z \frac{\Phi(t) - 1}{t} dt$$

однолиственна в круге $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда существует натуральное N такое, что функции

$$f_n(z) = \int_0^z \Phi(t^n) dt$$

однолиственны в круге $\mathbb{D}$ при всех $n \geq N$.

Другими словами, эта гипотеза утверждает, что квазиконформность в теореме 1 может быть ослаблена до однолиственности.

Интересно отметить, что наша гипотеза следует из гипотезы, сформулированной Даникасом и Рушеевем в [9]. Они предположили, что если голоморфная функция f однолиственна в круге $\mathbb{D}$, то функция

$$g(z) = \int_0^z t \frac{f'(t)}{f(t)} dt$$

также однолистка в этом круге. Применяя преобразование Фабера $\sqrt[n]{f(z^n)}$ к этим функциям, заключаем, что функция

$$g(z) = \int_0^z t^n \frac{f'(t^n)}{f(t^n)} dt$$

будет однолистной для всех n .

Предполагая справедливость гипотезы Даникаса–Рушевея, применим ее к функции

$$f(z) = \int_0^z t^n \frac{\varphi'(t^n)}{\varphi(t^n)} dt = \int_0^z \Phi(t^n) dt.$$

Это дает однолистность $f_n(z)$ в круге $\mathbb{D}$ для всех натуральных n , в то время как наша гипотеза утверждает, что эти функции однолистки для достаточно больших значений n . Таким образом, наша гипотеза немного слабее гипотезы Даникаса–Рушевея. Преимущество нашей гипотезы заключается в том, что утверждение является симметричным, в то время как обратное утверждение к гипотезе Даникаса–Рушевея является неверным.

Нетрудно показать, что если функция $f_n(z)$ почти выпукла в круге $\mathbb{D}$ для некоторого натурального n , то $f_1(z)$ однолистка в круге $\mathbb{D}$. Мы предполагаем, что данный факт справедлив во всем классе однолистных функций. Гипотеза Даникаса–Рушевея следует из этого предположения. Для доказательства этого утверждения можно считать, что функция

$$\varphi(z) = z \exp \int_0^z \frac{\Phi(t) - 1}{t} dt$$

отображает круг $\mathbb{D}$ на односвязную область с квазиконформной границей, что позволяет использовать часть b) теоремы 1. Таким образом, $f_n(z)$ однолистка в круге $\mathbb{D}$ для некоторого натурального n . В силу нашего предположения $f_1(z)$ также однолистка в этом круге. Для вывода отсюда гипотезы Даникаса–Рушевея остается только заметить, что $f_1'(z) = z\varphi'(z)/\varphi'(z)$.

Часть b) теоремы 1 может быть слегка усилена, если вместо достаточного условия однолистности (3) использовать другое условие. Пусть Ω – односвязная область с квазиконформной границей. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что если голоморфная функция ψ удовлетворяет в Ω условию

$$|\arg \psi'| < \varepsilon, \quad (11)$$

то ψ однолистка в Ω . Достаточное условие однолистности (11) может быть получено из условия однолистности (3). Однако, области с квазиконформными границами являются естественным классом применения условия (3), т.е. если квазиконформности нет, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется неоднолистная в области Ω функция, удовлетворяющая условию (3). Достаточное условие однолистности (11) является более гибким, т.е. может применяться к областям, чьи границы не обязательно квазиконформны. Авхадиев [10] показал, что во многих случаях условие квазиконформности может быть заменено условием отсутствия внешних нулевых углов границы области.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Becker, “Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen”, *J. Reine Angew. Math.*, **255** (1972), 23–43.

- [2] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Grundlehren Math. Wiss., **259**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [3] В. Н. Гайдук, “Об однолиственности решений обратных краевых задач”, Тр. сем. по краев. задачам, **9**, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1972, 39–48.
- [4] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Гостехиздат, М.–Л., 1952.
- [5] O. Martio, J. Sarvas, “Injectivity theorems in plane and space”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **4**:2 (1979), 383–401.
- [6] W. Smith, D. A. Stegenga, “Exponential integrability of the quasi-hyperbolic metric on Hölder domains”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **16**:2 (1991), 345–360.
- [7] R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan, “On the dynamics of rational maps”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **16**:2 (1983), 193–217.
- [8] I. Kayumov, “Lower estimate for the integral means spectrum for $p = -1$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130**:4 (2002), 1005–1007.
- [9] N. Danikas, S. Ruscheweyh, “Semi-convex hulls of analytic functions in the unit disk”, *Analysis (Munich)*, **19**:4 (1999), 309–318.
- [10] Ф. Г. Авхадиев, *Конформные отображения и краевые задачи*, Монографии по математике, **2**, Казанский фонд “Математика”, Казань, 1996.

И. Р. Каюмов

Казанский государственный университет

E-mail: ikayumov@mail.ru

Поступило

19.02.2010

Исправленный вариант

22.04.2010