Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И Сяолан, Л. А. Шеметков, Формация конечных групп со сверхразрешимой π -холловой подгруппой, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 280–286

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:26:03

Формация конечных групп со сверхразрешимой π -холловой подгруппой

И Сяолан, Л. А. Шеметков

Пусть G – группа, имеющая такую π -подгруппу H , что $|G : H|$ не делится на числа из π . В этом случае подгруппу H называют π -холловой подгруппой, а саму группу G называют E_π -группой. Если к тому же H сверхразрешима, то G называют E_π^u -группой. В работе доказано что класс всех E_π^u -групп является разрешимо насыщенным формацией причем доказательство проводится без использования классификации простых групп.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Мы будем рассматривать только конечные группы. Пусть π – некоторое фиксированное множество простых чисел. Пусть G – группа, имеющая такую π -подгруппу H , что $|G : H|$ не делится на числа из π . В этом случае подгруппу H называют π -холловой подгруппой, а саму группу G называют E_π -группой. Если к тому же H сверхразрешима, то G называют E_π^u -группой. Группу, имеющую нильпотентную π -холлову подгруппу, называют E_π^n -группой. Символы E_π , E_π^n и E_π^u будут также использоваться для обозначения класса всех E_π -групп, класса всех E_π^n -групп и класса всех E_π^u -групп соответственно. Эти удобные обозначения предложены Холлом [1].

Следуя Гашюцу [2], *формацией* называют всякий класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется:

- 1) *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$;
- 2) *разрешимо насыщенной*, если из $G/\Phi(G_\infty) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$ (здесь G_∞ – разрешимый радикал группы G).

Легко показать, что E_π^n – формация. В работе [3] установлено, что формация E_π^n является разрешимо насыщенной, но не всегда насыщенной (например, формация $E_{\{3,11\}}^n$ не насыщена). Работа Ведерникова [4] была посвящена доказательству того, что класс E_π является формацией (вопрос о справедливости этого утверждения был поставлен в [5; проблема 18] и [6; вопрос 5.65]). В процессе доказательства Ведерников использует классификацию простых групп.

В настоящей работе без использования классификации простых групп будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Класс E_π^u – разрешимо насыщенная формация.*

СЛЕДСТВИЕ. Пусть K – такая нормальная подгруппа группы G , что группа $K/K \cap \Phi(G_{\mathfrak{S}})$ обладает сверхразрешимой π -холовой подгруппой. Тогда и K обладает сверхразрешимой π -холовой подгруппой.

В конце статьи мы покажем, что для некоторых множеств π формация E_{π}^u может оказаться ненасыщенной.

2. Предварительные сведения. Мы используем стандартные обозначения (см. [5], [7]): $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини, $G_{\mathfrak{S}}$ – наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G . Ограничение функции ε на S обозначается через $\varepsilon|_S$. Делитель m натурального числа n называется π -делителем, если π содержит множество всех простых делителей числа m ; наибольший π -делитель числа n обозначается через n_{π} . Через $\text{Con}(G)$ обозначается класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G . Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G . *Монолитической группой* называют группу, имеющую единственную минимальную нормальную подгруппу. Для удобства читателя приведем некоторые известные конструкции и факты.

2.1. Говорят, что группа R есть *подпрямое произведение* групп G_1 и G_2 , если $R \leq (G_1 \times G_2)$ и проекции

$$\delta_1: (g_1, g_2) \mapsto g_1, \quad \delta_2: (g_1, g_2) \mapsto g_2, \quad \text{где } (g_1, g_2) \in R,$$

являются эпиморфизмами группы R на G_1 и G_2 соответственно. Согласно Ремаку, если A и B – нормальные подгруппы группы G , то отображение

$$f: g(A \cap B) \mapsto (gA, gB), \quad g \in G,$$

является изоморфизмом группы $G/A \cap B$ на подпрямое произведение $\{(gA, gB) \mid g \in G\}$ групп G/A и G/B (см. [7; лемма A.4.17]).

2.2. Пусть G_1, G_2 и H – группы и даны эпиморфизмы $\varepsilon_i: G_i \rightarrow H, i = 1, 2$. Пусть $D = G_1 \times G_2, R = \{(g_1, g_2) \in D \mid g_1^{\varepsilon_1} = g_2^{\varepsilon_2}\}$. Тогда R – подпрямое произведение групп G_1, G_2 и, кроме того,

$$R/\text{Ker}(\varepsilon_1) \times \text{Ker}(\varepsilon_2) \simeq H.$$

Группа R обозначается через $G_1 \varepsilon_1 \lambda_{\varepsilon_2} G_2$ и называется *прямым произведением* групп G_1 и G_2 с объединенной факторгруппой H (см. [7; с. 73]).

2.3. Пусть R – подпрямое произведение групп G_1 и G_2 . Пусть $D = G_1 \times G_2$, и пусть K_i – ядро проекции δ_i группы R на $G_i, i = 1, 2$. Если $g_1 \in G_1$, то найдется $(g_1, g_2) \in R$. Если $(g_1, y) \in R$ для некоторого другого элемента y из G_2 , то выполнено $(g_1, g_2)(g_1, y)^{-1} = (1, g_2 y^{-1}) \in K_1$ и, значит,

$$(g_1, g_2)K_1 K_2 = (g_1, y)K_1 K_2.$$

Таким образом, ясно, что

$$\varepsilon_1: g_1 \mapsto (g_1, g_2)K_1 K_2, \quad \text{где } g_1 \in G_1, \quad (g_1, g_2) \in R,$$

является эпиморфизмом группы G_1 на $R/K_1 K_2$ (определение ε_1 , как мы заметили, не зависит от выбора g_2). Аналогично определяем эпиморфизм $\varepsilon_2: G_2 \rightarrow R/K_1 K_2$.

Пусть (x, y) – такой элемент из D , что $x^{\varepsilon^1} = y^{\varepsilon^2}$. Так как $x^{\varepsilon^1} = (x, g_2)K_1K_2$, $y^{\varepsilon^2} = (g_1, y)K_1K_2$, где (x, g_2) и (g_1, y) – элементы из R , то мы получаем равенство

$$(x, g_2) = (g_1, y)(1, k_2)(k_1, 1) = (g_1k_1, yk_2),$$

где $(1, k_2) \in K_1$, $(k_1, 1) \in K_2$. Но тогда $x = g_1k_1$ и $(x, y) = (g_1, y)(k_1, 1) \in R$. Таким образом,

$$R = G_{1\varepsilon_1} \lambda_{\varepsilon_2} G_2.$$

2.4. Пусть f – функция, сопоставляющая каждой группе G некоторую формацию $f(G)$ так, что из $\text{Com}(G_1) = \text{Com}(G_2)$ всегда следует $f(G_1) = f(G_2)$. Если P – группа простого порядка p , то вместо $f(P)$ мы будем писать также $f(p)$. Такая функция f называется *композиционным спутником*. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс всех групп G , у которых каждый главный фактор H/K обладает следующим свойством:

$$G/C_G(H/K) \in f(H/K).$$

В этом случае пишут $\mathfrak{F} = CF(f)$ и говорят, что f – *композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$.

Согласно теореме Бэра (см. [7; теорема IV.4.17]) непустая формация разрешимо насыщена тогда и только тогда, когда она имеет композиционный спутник.

ЛЕММА 2.5 (см. [1; теорема A1]). Пусть группа G имеет две сверхразрешимые π -холловы подгруппы S_1 и S_2 . Тогда $S_1 = S_2^x$ для некоторого $x \in G$.

ЛЕММА 2.6 (см. [1; с. 296, лемма 1]). Пусть S – π -холлова подгруппа группы G . Если $K \trianglelefteq G$, то $S \cap K$ – π -холлова подгруппа в K , а SK/K – π -холлова подгруппа в G/K .

Следующая лемма является простым следствием того, что стабильная группа автоморфизмов p -группы является p -группой, а класс абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$, является формацией.

ЛЕММА 2.7. Пусть K – нормальная p -подгруппа сверхразрешимой группы H . Тогда $H/C_H(K)$ является расширением p -группы с помощью абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$.

ЛЕММА 2.8 (см. [5; лемма 4.1]). Пусть A – такая минимальная нормальная p -подгруппа группы G , что $G/C_G(A)$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Тогда $|A| = p$.

Следующая лемма вытекает из свойств универсального фраттиниевого p -элементарного расширения группы (см. [7; с. 853]).

ЛЕММА 2.9. Пусть G – монолитическая группа с неабелевым цоклем, порядок которого делится на простое число p . Тогда существует группа E и в ней элементарная абелева нормальная p -подгруппа $A \neq 1$ такие, что $E/A \simeq G$, $A \leq \Phi(E)$ и $O_{p'}(H) = 1$ для любой подгруппы H с условием $A \leq H \leq E$.

ЛЕММА 2.10 (см. [8]). Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимо насыщенная формация, содержащая все p -группы. Пусть группа G имеет нормальную подгруппу A и нормальную p -подгруппу B такие, что $B \leq A$ и $A/B \in \mathfrak{F}$. Если B содержится в подгруппе Фраттини разрешимого радикала группы G , то $A \in \mathfrak{F}$.

3. Доказательство теоремы. Следующая лемма говорит о том, что подпрямое произведение E_π^u -группы и сверхразрешимой π -группы является E_π^u -группой.

ЛЕММА 3.1. Пусть A и B – такие нормальные подгруппы группы G , что $G/A \in E_\pi^u$, а G/B – сверхразрешимая π -группа. Тогда

$$G/A \cap B \in E_\pi^u.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать без потери общности, что $A \cap B = 1$. Так как G/B – π -группа, то и $A \simeq AB/B$ – π -группа. Пусть S/A – сверхразрешимая π -холлова подгруппа из G/A . Тогда S – π -холлова подгруппа в G . Так как G/B сверхразрешима, а группы AB/B и A являются G -изоморфными, то A обладает G -главным рядом с простыми индексами. Отсюда и из сверхразрешимости S/A следует сверхразрешимость подгруппы S .

ЛЕММА 3.2. Пусть ε – эпиморфизм группы G на некоторую π -группу H . Пусть S – некоторая π -холлова подгруппа из G . Тогда $\varepsilon_1 = \varepsilon|_S$ – эпиморфизм группы S на H и

$$|\text{Ker}(\varepsilon_1)| = |\text{Ker}(\varepsilon)|_\pi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.6 $\text{Ker}(\varepsilon_1) = \text{Ker}(\varepsilon) \cap S$ – π -холлова подгруппа в $\text{Ker}(\varepsilon)$. Так как $G/\text{Ker}(\varepsilon)$ – π -группа, то $G = S \text{Ker}(\varepsilon)$. Отсюда получаем, что

$$|G : S| = |\text{Ker}(\varepsilon) : \text{Ker}(\varepsilon_1)|$$

не делится на числа из π . Теперь ясно, что $\text{Ker}(\varepsilon_1)$ – π -холлова подгруппа в $\text{Ker}(\varepsilon)$.

ЛЕММА 3.3. Пусть A и B – нормальные подгруппы группы G . Если S/B – π -холлова подгруппа в G/B , то SA/AB – π -холлова подгруппа в G/AB .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\bar{S} = S/B$ является π -холловой подгруппой в $\bar{G} = G/B$. Пусть $\bar{A} = AB/B$. Тогда по лемме 2.6 $\bar{S}\bar{A}/\bar{A}$ – π -холлова подгруппа в $\bar{G}/\bar{A}$. Заметим, что

$$\bar{G}/\bar{A} \simeq G/AB, \quad \bar{S}\bar{A}/\bar{A} \simeq SA/AB.$$

Теперь ясно, что SA/AB – π -холлова подгруппа в G/AB .

ЛЕММА 3.4. Пусть A и B – такие нормальные подгруппы группы G , что $G/A \in E_\pi^u$, $G/B \in E_\pi^u$ и $A \cap B = 1$. Тогда $G \in E_\pi^u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S_1/A – сверхразрешимая π -холлова подгруппа из G/A , S_2/B – сверхразрешимая π -холлова подгруппа из G/B . Так как S_1/A сверхразрешима, то группа

$$S_1B/AB \simeq S_1/S_1 \cap AB = S_1/A(S_1 \cap B)$$

также сверхразрешима. Теперь ввиду леммы 3.3 S_1B/AB – сверхразрешимая π -холлова подгруппа в G/AB . Аналогично, S_2A/AB – сверхразрешимая π -холлова подгруппа в G/AB . По лемме 2.5 S_1B/AB и S_2A/AB сопряжены в G/AB . Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $S_1B = S_2A$. Понятно, что S_1/A – сверхразрешимая π -холлова подгруппа в S_1B/A , а S_2/B – сверхразрешимая π -холлова подгруппа в S_2A/B . Поэтому, если $S_1B \neq G$, то по индукции $S_1B \in E_\pi^u$. Так как $|G : S_1B|$ не делится на числа из π , то сверхразрешимая π -холлова подгруппа из S_1B

является π -холловой подгруппой в G . Таким образом, при $S_1B \neq G$ лемма верна. Итак, мы будем считать, что $S_1B = S_2A = G$, а значит, G/AB – сверхразрешимая π -группа.

Рассмотрим теперь прямое произведение $D = (G/A) \times (G/B)$ и в нем подпрямое произведение $G^* = \{(gA, gB) \mid g \in G\}$, изоморфное согласно 2.1 группе G . Тогда существуют эпиморфизмы групп G/A и G/B на G/AB :

$$\varepsilon_1: gA \mapsto gAB, \quad \varepsilon_2: gB \mapsto gAB \ (g \in G).$$

Очевидно,

$$|\text{Ker}(\varepsilon_1)| = |AB/A| = |B|, \quad |\text{Ker}(\varepsilon_2)| = |AB/B| = |A|.$$

Положим

$$\gamma = \varepsilon_2|_{S_2/B}.$$

Согласно лемме 3.2 $\gamma: S_2/B \rightarrow G/AB$ – эпиморфизм, причем $|\text{Ker}(\gamma)| = |\text{Ker}(\varepsilon_2)|_\pi$. Рассмотрим группу

$$X = (G/A)_{\varepsilon_1} \wr_\gamma (S_2/B).$$

Если $(xA, yB) \in X$, то $xAB = yAB$, но тогда $x = yab$, где $a \in A$, $b \in B$. Обозначим $g = xa^{-1} = yb$. Тогда

$$(gA, gB) = (xa^{-1}A, ybB) = (xA, yB) \in G^*.$$

Следовательно, $X \leq G^*$. Согласно 2.2

$$|X| = \frac{|G| \cdot |\text{Ker}(\varepsilon_1)| \cdot |\text{Ker}(\gamma)|}{|A| \cdot |B|} = \frac{|G| \cdot |A|_\pi}{|A|}.$$

Отсюда вытекает, что $|G : X| = |A| : |A|_\pi$ не делится на числа из π . По лемме 3.1 $X \in E_\pi^u$, но тогда и $G \in E_\pi^u$.

ЛЕММА 3.5. Пусть p – простое число, $u(p)$ – класс всех тех групп, которые являются расширением p -группы с помощью абелевой группы экспоненты, делящей $p-1$. Пусть $E_\pi^{u(p)}$ – класс всех таких групп, которые имеют по крайней мере одну π -холлову подгруппу, принадлежащую $u(p)$. Тогда $E_\pi^{u(p)}$ – формация.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.8 следует, что $u(p)$ – подформация формации всех сверхразрешимых групп. Пусть G/A и G/B принадлежат $E_\pi^{u(p)}$, причем выполнено $A \cap B = 1$. По лемме 3.4 G имеет сверхразрешимую π -холлову подгруппу H . Тогда ввиду леммы 2.6 HA/A и HB/B являются π -холловыми подгруппами соответственно в G/A и G/B . Теперь, применяя лемму 2.5, мы видим, что HA/A и HB/B принадлежат $u(p)$. Таким образом, $H/H \cap A$ и $H/H \cap B$ принадлежат $u(p)$. Так как $u(p)$ – формация, то отсюда следует $H \in u(p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из лемм 2.6 и 3.4 следует, что класс E_π^u является формацией. Докажем, что эта формация разрешимо насыщена. Будем использовать обозначение $E_\pi^{u(p)}$ из леммы 3.5. Пусть $\mathfrak{H} = CF(h)$, где h – такой композиционный спутник, что

$$h(X) = \begin{cases} E_\pi^{u(p)}, & \text{если } |X| = p \in \pi, \\ E_\pi^u, & \text{если } |X| \notin \pi, \end{cases}$$

для любой простой группы X . Докажем, что $\mathfrak{H} = E_\pi^u$.

Предположим, что $E_\pi^u \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть G – группа наименьшего порядка из $E_\pi^u \setminus \mathfrak{H}$. Очевидно, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K , причем $G/K \in \mathfrak{H}$. Если $|K|$ не является степенью простого числа из π , то $G/C_G(K) \in E_\pi^u$, а значит, $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $|K|$ является степенью некоторого простого числа p из π . Очевидно, K содержится в сверхразрешимой π -холловой подгруппе H группы G . Но тогда по лемме 2.7 $H/C_H(K)$ является расширением p -группы с помощью абелевой группы экспоненты, делящей $p - 1$. Отсюда следует, что $G/C_G(K) \in h(K)$. Таким образом, в соответствии с 2.4 имеем $G \in \mathfrak{H}$. Справедливость включения $E_\pi^u \subseteq \mathfrak{H}$ установлена.

Пусть теперь G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus E_\pi^u$. Группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , причем $G/N \in E_\pi^u$. Понятно, что порядок подгруппы N делится на некоторое число p из π . Если N неабелева, то $C_G(N) = 1$, а значит, $G \in E_\pi^u$. Пусть теперь N – p -группа, $p \in \pi$. Тогда, ввиду $G/N \in E_\pi^u$, N содержится в такой π -холловой подгруппе T группы G , что T/N сверхразрешима. Так как $G/C_G(N) \in h(N)$, то в $G/C_G(N)$ имеется π -холлова подгруппа $S/C_G(N)$, являющаяся расширением p -группы с помощью абелевой группы экспоненты, делящей $p - 1$. По лемме 2.8 $S/C_G(N)$ сверхразрешима. По лемме 2.5 подгруппы $TC_G(N)/C_G(N)$ и $S/C_G(N)$ сопряжены в $G/C_G(N)$. Отсюда вытекает, что $T/C_T(N)$ является расширением p -группы с помощью абелевой группы экспоненты, делящей $p - 1$. Но тогда по лемме 2.8 все T -главные факторы подгруппы N имеют порядок p . Так как T/N сверхразрешима, то получается, что T сверхразрешима. Справедливость включения $\mathfrak{H} \subseteq E_\pi^u$ установлена.

Справедливость следствия вытекает из теоремы и леммы 2.10.

4. Заключительные замечания.

4.1. Пусть $\pi = \{5, 11\}$, $G = PSL_2(11)$. Группа G имеет ненильпотентную π -холлову подгруппу порядка $5 \cdot 11$. Положим $p = 5$. Пусть теперь E и A такие, как в лемме 2.9, т.е.

$$E/A \simeq G \quad \text{и} \quad A \leq O_p(\Phi(E)).$$

Допустим, что E имеет сверхразрешимую π -холлову подгруппу H . По лемме 2.9 $O_{p'}(H) = 1$. Но тогда ввиду леммы 2.7 H должна быть расширением 5-группы с помощью абелевой группы экспоненты, делящей 4. Полученное противоречие показывает, что формация $E_{\{5, 11\}}^u$ не является насыщенной.

4.2. Теорему можно усилить, рассматривая вместо сверхразрешимых групп дисперсивные группы (группы с силовской башней). Пусть φ – линейный порядок на множестве всех простых чисел и $E_\pi^{\varphi d}$ – класс всех групп, имеющих хотя бы одну φ -дисперсивную π -холлову подгруппу. Применяя аналогичные рассуждения, можно доказать, что $E_\pi^{\varphi d}$ – разрешимо насыщенная формация. При построении композиционного спутника этой формации вместо формации $E_\pi^{u(p)}$ надо использовать формацию $E_\pi^{\varphi d(p)}$, где φd – канонический локальный спутник формации всех φ -дисперсивных групп.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Hall, “Theorems like Sylow’s”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **6** (1956), 286–304.

- [2] W. Gaschütz, “Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen”, *Math. Z.*, **80** (1963), 300–305.
- [3] Л. А. Шеметков, А. Ф. Васильев, “Нелокальные формации конечных групп”, *Докл. НАН Беларуси*, **39**:4 (1995), 5–8.
- [4] В. А. Ведерников, “Подпрямые произведения конечных групп с холловыми π -подгруппами”, *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 311–314.
- [5] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [6] *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, 11-е изд., ред. В. Д. Мазуров, Ин-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1990.
- [7] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [8] L. A. Shemetkov, “On partially saturated formations and residuals of finite groups”, *Comm. Algebra*, **29**:9 (2001), 4125–4137.

И Сяолан

Zhejiang University, Hangzhou, Китай

E-mail: yixiaolan2005@126.com

Поступило

05.05.2009

Исправленный вариант

19.06.2009

Л. А. Шеметков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
Беларусь

E-mail: shemetkov@gsu.by