Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Якимив, Асимптотика моментов числа циклов случайной A -подстановки, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 5, 792–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 11:19:23

Асимптотика моментов числа циклов случайной A -подстановки

А. Л. Якимив

Рассматривается случайная подстановка, равномерно распределенная на множестве всех подстановок степени n , длины циклов которых принадлежат фиксированному множеству A (так называемых A -подстановок). В настоящей заметке установлена асимптотика моментов общего числа циклов и числа циклов определенной длины этой случайной подстановки при $n \rightarrow \infty$.

Библиография: 29 названий.

1. Введение. Пусть A – произвольное непустое подмножество множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. A -подстановками называются подстановки, длины циклов которых принадлежат множеству A (см. книгу Сачкова [1]). Пусть $T_n = T_n(A)$ есть множество A -подстановок степени n и c_n – случайная подстановка, равномерно распределенная на T_n . Через ζ_{mn} обозначим число циклов подстановки c_n , имеющих длину $m \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\zeta_{mn} = 0$ при $m \notin A$. Далее, пусть ζ_n – общее число циклов случайной подстановки c_n , т.е.

$$\zeta_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \zeta_{mn}.$$

Внимание специалистов случайные A -подстановки привлекли примерно 30 лет назад. Одними из первых работ в этом направлении были статьи Бендера [2], Болотникова, Сачкова и Тараканова [3], Минеева и Павлова [4], [5]. Еще раньше Сачковым в работах [6], [7] были рассмотрены более общие объекты – случайные отображения с ограничениями на длины циклов. Имеется 5 монографий, содержащих сведения об A -подстановках: Колчина [8], [9], Сачкова [1], [10], автора [11]. К настоящему моменту получены предельные теоремы (в слабом смысле) для случайных величин ζ_{mn} и ζ_n , а также асимптотика числа элементов множества $T_n(A)$ при $n \rightarrow \infty$ в широком классе множеств A (ссылки имеются в статье [12] и книге [11]). Несмотря на это, асимптотика моментов случайных величин ζ_{mn} и ζ_n для достаточно широкого класса множеств A пока еще не изучена (в том числе и первых двух). Исключение составляет случай, когда множество A совпадает с множеством всех натуральных чисел $\mathbb{N}$. В этом случае Гончаров в работе [13] установил асимптотику первых двух моментов упомянутых случайных величин.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-00583, 09-01-00724).

Отметим также, что в другой вероятностной модели случайной A -подстановки недавно была изучена асимптотика математического ожидания и дисперсии случайной величины ζ_{mn} , см. работу Тимашева [14]. В этой работе рассматривалось равномерное распределение на множестве всех A -подстановок степени n с N циклами. При этом в предположении, что N имеет такой же порядок, что и n , при $n \rightarrow \infty$ установлены локальная нормальная и пуассоновская предельные теоремы для ζ_{mn} . Относительно множества A предполагалось, что $\text{НОД}\{k - \min A \mid k \in A\} = 1$.

В настоящей заметке найден подход, при помощи которого изучена асимптотика первых двух, а также старших моментов случайных величин ζ_{mn} и ζ_n при $n \rightarrow \infty$ и различном характере поведения последовательности $m = m(n)$. При этом рассмотрен широкий класс множеств A .

2. Основные утверждения. Мы будем предполагать, что выполнено следующее соотношение:

$$p(n) \equiv \frac{|T_n(A)|}{n!} = n^{\sigma-1} L(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где функция $L(n)$ – медленно меняется на бесконечности [15], а $\sigma \in (0, 1]$ (здесь и далее $|X|$ обозначает число элементов конечного множества X). Имеется широкий класс примеров множеств A , для которых выполнено (1) (см. работы Бендера [2], Волинец [16], Колчина [17], [18], Павлова [19]–[23], автора [24]–[28]), более подробный обзор этих работ содержится в статье автора [12]. Отметим только, что в качестве примеров множеств A , удовлетворяющих (1), можно привести различные арифметические прогрессии и их объединения, некоторые теоретико-числовые множества, а также реализации случайного множества A , где случайные величины $\xi_n = \chi\{n \in A\}$ независимы и одинаково распределены, причем $P\{\xi_n = 1\} = \sigma$.

Для моментов случайной величины ζ_n справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено соотношение (1). Тогда для произвольного фиксированного $k \in \mathbb{N}$ при $n \rightarrow \infty$

$$M\zeta_n^k = (1 + o(1))(\sigma \ln n)^k. \quad (2)$$

Если выполнено (1), то из (2) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} D\zeta_n &= M\zeta_n^2 - (M\zeta_n)^2 \\ &= (1 + o(1))(\sigma \ln n)^2 - (1 + o(1))(\sigma \ln n)^2 = o((\sigma \ln n)^2) \end{aligned}$$

и вопрос о точной асимптотике дисперсии случайной величины ζ_n остается открытым. Анализ проводимого в разделе 3 доказательства показывает, что для нахождения точной асимптотики $D\zeta_n$ требуется дополнительная информация о медленно меняющейся функции $L(n)$. К настоящему моменту известно только, что в случае $A = \mathbb{N}$ при $n \rightarrow \infty$

$$D\zeta_n = \ln n + \gamma - \frac{\pi^2}{6} + o(1),$$

где $\gamma = 0,5772\dots$ – постоянная Эйлера (см. работу Гончарова [13] или книгу Сачкова [1; раздел 5.1.1]).

Приступим к формулировке утверждений, касающихся асимптотики моментов случайной величины ζ_{mn} .

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено соотношение (1). Тогда существует последовательность $b(n) \geq 0$ такая, что $b(n) = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$M\zeta_{mn} = (1 + o(1)) \frac{1}{m} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{\sigma-1} \quad (3)$$

равномерно по $m \in [1, n - b(n)] \cap A$. При $n - m = c = \text{const}$

$$M\zeta_{mn} = (1 + o(1)) \frac{p(c)}{n^\sigma L(n)} \chi\{m \in A\}. \quad (4)$$

Относительно старших моментов ζ_{mn} справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено (1). Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Тогда при фиксированном $m \in A$

$$M\zeta_{mn}^k = (1 + o(1)) \sum_{r=1}^k \frac{a(r, k)}{m^r}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где числа $a(r, k)$, $r = 1, \dots, k$, задаются соотношениями

$$a(r, j+1) = a(r-1, j) + ra(r, j), \quad a(0, j) = 0, \quad a(1, 1) = 1 \quad (6)$$

при $j \in \mathbb{N}$, $r = 1, 2, \dots, j$. Если $m, n \rightarrow \infty$, $m \in A$, $m \leq n$, то

$$M\zeta_{mn}^k = (1 + o(1)) M\zeta_{mn}. \quad (7)$$

Приведем также утверждение, касающееся асимптотики дисперсии ζ_{mn} .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнено соотношение (1). Тогда при $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $m \in A$, $m \leq n$

$$D\zeta_{mn} = (1 + o(1)) M\zeta_{mn}. \quad (8)$$

3. Доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно формуле (0.13) книги Сачкова [1; гл. V], для произвольных $t \in [0, 1]$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$

$$f(t, \lambda) \equiv \sum_{n \geq 0} p(n) t^n M \exp(\lambda \zeta_n) = \exp(e^\lambda u(t)), \quad (9)$$

где

$$u(t) = \sum_{n \in A} \frac{t^n}{n}, \quad p(0) = 1. \quad (10)$$

Продифференцируем (9) k раз по λ . Пользуясь формулой Бруно (0.430) из [29] для k -й производной от сложной функции, получаем, что

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(t, \lambda) = f(t, \lambda) \sum_{j_1, \dots, j_k} C(j_1, \dots, j_k) \prod_{s=1}^k \left(\frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} (u(t) e^\lambda) \right)^{j_s},$$

где суммирование в последней сумме производится по всем упорядоченным наборам целых неотрицательных чисел $j_1, \dots, j_k$ таких, что $\sum_{s=1}^k s j_s = k$, $C(j_1, \dots, j_k)$ – некоторые постоянные, причем $C(0, \dots, 0, 1) = 1$. Отсюда находим

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(t, \lambda) = f(t, \lambda) \sum_{j_1, \dots, j_k} C(j_1, \dots, j_k) (u(t) e^\lambda)^{\sum_{s=1}^n j_s} = f(t, \lambda) \sum_{r=1}^k a(r, k) u^r(t) e^{\lambda r}, \quad (11)$$

где $a(r, k)$, $r = 1, \dots, k$, – некоторые постоянные, причем $a(k, k) = 1$. Стало быть,

$$\left. \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} f(t, \lambda) \right|_{\lambda=0} = \exp(u(t)) \sum_{r=1}^k a(r, k) u^r(t).$$

Отсюда и из формулы (9) следует, что

$$p(n) M_{\zeta_n}^k = \text{coef}_{t^n} \exp(u(t)) \sum_{r=1}^k a(r, k) u^r(t). \quad (12)$$

Из (9) при $\lambda = 0$ получаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) t^n = \exp(u(t)). \quad (13)$$

Из формул (10), (12) и (13) следует, что

$$p(n) M_{\zeta_n}^k = \sum_{r=1}^k a(r, k) \sum_{i_1, \dots, i_r \in A} \frac{1}{i_1 \cdots i_r} p(n - i_1 - \cdots - i_r)$$

(мы полагаем $p(x) = 0$ при $x < 0$). Поэтому при $p(n) \neq 0$

$$M_{\zeta_n}^k = \sum_{r=1}^k a(r, k) \sum_{i_1, \dots, i_r \in A} \frac{1}{i_1 \cdots i_r} \cdot \frac{p(n - i_1 - \cdots - i_r)}{p(n)}.$$

Стало быть, так как $a(k, k) = 1$, для доказательства теоремы 1 нам достаточно показать, что для произвольного фиксированного $k \in \mathbb{N}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\Sigma \equiv \sum_{i_1, \dots, i_k \in A} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} \cdot \frac{p(n - i_1 - \cdots - i_k)}{p(n)} \sim (\sigma \ln n)^k. \quad (14)$$

Займемся этим. Положим

$$\Sigma_1 = \sum_{i_1, \dots, i_k \in A(n/\sqrt{\ln n})} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} \cdot \frac{p(n - i_1 - \cdots - i_k)}{p(n)}, \quad (15)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{i_1, \dots, i_k \in A \text{ } \exists j \text{ } i_j > n/\sqrt{\ln n}} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} \cdot \frac{p(n - i_1 - \cdots - i_k)}{p(n)} \quad (16)$$

(здесь и далее $A(r) = A \cap [1, r]$). Из (1) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$l(n) \equiv \sum_{i \in A(n)} \frac{1}{i} \sim \sigma \ln n \quad (17)$$

(см. работу Павлова [21]). Так как в условиях суммирования в (15) $i_1 + \dots + i_k \leq kn/\sqrt{\ln n} = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$, в силу (1) и (17)

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\sim (1 + o(1)) \sum_{i_1, \dots, i_k \in A(n/\sqrt{\ln n})} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} = (1 + o(1)) \left(\sum_{i \in A(n/\sqrt{\ln n})} \frac{1}{i} \right)^k \\ &= (1 + o(1)) \left(l \left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}} \right) \right)^k \end{aligned} \quad (18)$$

(при нецелых r мы полагаем $l(r) = l([r])$). Согласно (17) и (18) при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= (1 + o(1)) \left(\sigma \ln \left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}} \right) (1 + o(1)) \right)^k \\ &= (1 + o(1)) \sigma^k \left(\ln n - \frac{1}{2} \ln \ln n \right)^k = (1 + o(1)) (\sigma \ln n)^k. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{i_1, \dots, i_k \in A} \sum_{\exists j \ i_j > n/\sqrt{\ln n}} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} \cdot \frac{p(n - i_1 - \dots - i_k)}{p(n)} \\ &\leq k \sum_{i_1, \dots, i_k \in A(n), \ i_k > n/\sqrt{\ln n}} \frac{1}{i_1 \cdots i_k} \cdot \frac{p(n - i_1 - \dots - i_k)}{p(n)} \\ &\leq \frac{k}{p(n)} \cdot \frac{\sqrt{\ln n}}{n} \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in A(n)} \frac{1}{i_1 \cdots i_{k-1}} \cdot p(n - i_1 - \dots - i_{k-1}). \end{aligned} \quad (20)$$

В последней сумме введем замену переменных $r = n - i_1 - \dots - i_{k-1}$. Из (20) следует, что

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq \frac{k}{p(n)} \cdot \frac{\sqrt{\ln n}}{n} \sum_{r=0}^n p(r) \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in A(n)} \frac{1}{i_1 \cdots i_{k-1}} \\ &= \frac{k}{p(n)} \cdot \frac{\sqrt{\ln n}}{n} \sum_{r=0}^n p(r) \left(\sum_{i \in A(n)} \frac{1}{i} \right)^{k-1} = \frac{k}{p(n)} \cdot \frac{\sqrt{\ln n}}{n} \sum_{r=0}^n p(r) (l(n))^{k-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (1) следует, что

$$\sum_{r=0}^n p(r) = O(np(n)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Из (21) и (22), учитывая асимптотику (17), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\Sigma_2 = \frac{k\sqrt{\ln n}}{np(n)} O(np(n)) O((\ln n)^{k-1}) = O((\ln n)^{k-1/2}) = o((\ln n)^k). \quad (23)$$

Соотношение (14) следует из (15), (16), (19) и (23). Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующее утверждение из [11; лемма 3.5.9].

ЛЕММА 1. Пусть функция $L(t)$ медленно меняется на бесконечности. Тогда существуют функции $r(t) \geq 0$ и $s(t) \geq 0$ такие, что $r(t) \rightarrow \infty$, $s(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, и

$$\frac{L(\lambda t)}{L(t)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно по $\lambda \in [s(t), r(t)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Согласно формуле (0.14) из книги Сачкова [1; гл. V] при $m \in A$ для произвольных $t \in [0, 1]$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$

$$F_m(t, \lambda) \equiv \sum_{n \geq 0} p(n) \text{Mexp}(\lambda \zeta_{mn}) = \exp\left(u(t) + (e^\lambda - 1) \frac{t^m}{m}\right). \quad (24)$$

Из (24) имеем

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} F_m(t, \lambda) \right|_{\lambda=0} = \exp(u(t)) \frac{t^m}{m},$$

откуда с учетом (13) получаем, что

$$p(n) \text{M}\zeta_{mn} = \text{coef}_{t^n} \exp(u(t)) \frac{t^m}{m} = \frac{p(n-m)}{m},$$

или же при $p(n) \neq 0$

$$\text{M}\zeta_{mn} = \frac{1}{m} \cdot \frac{p(n-m)}{p(n)}. \quad (25)$$

Согласно лемме 1 положим $b(n) = s(n) \cdot n$. Тогда $b(n) = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Из (1) и (25) следует, что

$$\text{M}\zeta_{mn} = \frac{1}{m} \cdot \frac{p(n-m)}{p(n)} = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{\sigma-1} \frac{L(n-m)}{L(n)} = (1 + o(1)) \frac{1}{m} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{\sigma-1}$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $m \in [1, n - b(n)] \cap A$ в силу леммы 1. Соотношение (3) доказано. Далее, пусть $n \rightarrow \infty$ и $n - m = c = \text{const}$. Тогда согласно (1) и (25)

$$\begin{aligned} \text{M}\zeta_{mn} &= \frac{1}{m} \cdot \frac{p(n-m)}{p(n)} \chi\{m \in A\} = \frac{1}{n-c} p(c) \frac{n^{1-\sigma}}{L(n)} \chi\{m \in A\} \\ &= (1 + o(1)) \frac{p(c)}{n^\sigma L(n)} \chi\{m \in A\}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Продифференцируем (24) j раз по λ . Точно так же, как и в соотношении (11), получаем, что

$$\frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} F_m(t, \lambda) = F_m(t, \lambda) \sum_{r=1}^j a(r, j) \frac{t^{mr}}{m^r} e^{\lambda r}. \quad (26)$$

Продифференцируем (26) еще раз по λ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{j+1}}{\partial \lambda^{j+1}} F_m(t, \lambda) &= \frac{t^m}{m} e^\lambda F_m(t, \lambda) \sum_{r=1}^j a(r, j) \frac{t^{mr}}{m^r} e^{\lambda r} + F_m(t, \lambda) \sum_{r=1}^j r a(r, j) \frac{t^{mr}}{m^r} e^{\lambda r} \\ &= F_m(t, \lambda) \left(\sum_{r=2}^{j+1} a(r-1, j) \frac{t^{mr}}{m^r} e^{\lambda r} + \sum_{r=1}^j r a(r, j) \frac{t^{mr}}{m^r} e^{\lambda r} \right), \end{aligned}$$

откуда следует рекуррентное соотношение (5) для чисел $a(r, j)$. При $j = k$ из (26) с учетом (24) получаем, что

$$p(n)M\zeta_{mn}^k = \text{coef}_{t^n} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} F_m(t, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = \sum_{r=1}^k a(r, k) \frac{p(n-rm)}{m^r}. \quad (27)$$

Соотношение (5) следует непосредственно из (1) и (27). В силу (27) для доказательства (7) достаточно показать, что при $m, n \rightarrow \infty$, $m \leq n$ и фиксированном $r \geq 2$

$$\frac{p(n-rm)}{m^r} = o\left(\frac{p(n-m)}{m}\right). \quad (28)$$

Если $m \rightarrow \infty$ так, что $m = o(n)$, то соотношение (28) выполнено, поскольку при этих условиях $p(n) \sim p(n-m) \sim p(n-rm)$. Пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что $m \in [\varepsilon n, n/r]$. Тогда в силу (1)

$$\frac{p(n-rm)}{m^{r-1}p(n-m)} \leq \frac{1}{m^{r-1}p(n-m)} = O\left(\frac{1}{n^{r-1}p(n)}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\sigma+r-2}L(n)}\right) = o(1)$$

при $n \rightarrow \infty$, так как $r \geq 2$, а $\sigma > 0$. Наконец, если $m \in (n/r, n]$, то соотношение (28) также выполнено, так как при этих условиях $p(n-rm) = 0$. Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Пусть $m \in A$. Из (27) с учетом (6) получаем при $p(n) \neq 0$

$$M\zeta_{mn}^2 = \frac{p(n-m)}{mp(n)} + \frac{p(n-2m)}{m^2p(n)}. \quad (29)$$

Из (25) и (29) следует, что

$$D\zeta_{mn} - M\zeta_{mn} = \frac{p(n-2m)}{m^2p(n)} - \frac{p^2(n-m)}{m^2p^2(n)}. \quad (30)$$

Пусть $m = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда в силу (1) и (30) имеем

$$\begin{aligned} D\zeta_{mn} - M\zeta_{mn} &= \frac{1}{m^2}(1+o(1)) - \frac{1}{m^2}(1+o(1)) \\ &= o\left(\frac{1}{m^2}\right) = o\left(\frac{p(n-m)}{mp(n)}\right) = o(M\zeta_{mn}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее, пусть $m \in [\varepsilon n, n/2]$ для некоторого $\varepsilon \in (0, 1/2]$. Тогда согласно (1) и (30)

$$\begin{aligned} D\zeta_{mn} - M\zeta_{mn} &= O\left(\frac{1}{n^2p(n)}\right) - O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2p(n)}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot o(1) = o\left(\frac{p(n-m)}{mp(n)}\right) = o(M\zeta_{mn}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Наконец, при $m \in (n/2, n]$ из (1), (25) и (30) следует, что

$$\frac{D\zeta_{mn} - M\zeta_{mn}}{M\zeta_{mn}} = -\frac{p(n-m)}{mp(n)} = O\left(\frac{1}{np(n)}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\sigma}L(n)}\right) = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

так как в этом случае $p(n-2m) = 0$. Следствие доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Сачков, *Вероятностные методы в комбинаторном анализ*, Наука, М., 1978.
- [2] E. A. Bender, "Asymptotic methods in enumeration", *SIAM Rev.*, **16**:4 (1974), 485–515.
- [3] Ю. В. Болотников, В. Н. Сачков, В. Е. Тараканов, "Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок", *Матем. сб.*, **99**:1 (1976), 121–133.
- [4] М. П. Минеев, А. И. Павлов, "О числе подстановок специального вида", *Матем. сб.*, **99**:3 (1976), 468–476.
- [5] М. П. Минеев, А. И. Павлов, "Об одном уравнении в подстановках", *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР, **142**, Наука, М., 1976, 182–194.
- [6] В. Н. Сачков, "Отображения конечного множества с ограничениями на контур и высоту", *ТВП*, **17**:4 (1972), 679–694.
- [7] В. Н. Сачков, "Случайные отображения ограниченной высоты", *ТВП*, **18**:1 (1973), 122–132.
- [8] В. Ф. Колчин, *Случайные отображения*, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1984.
- [9] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Физматлит, М., 2000.
- [10] В. Н. Сачков, *Комбинаторные методы дискретной математики*, Наука, М., 1977.
- [11] А. Л. Якимив, *Вероятностные приложения тауберовых теорем*, Физматлит, 2005.
- [12] А. Л. Якимив, "Распределение длины m -го максимального цикла случайной A -подстановки", *Дискрет. матем.*, **17**:4 (2005), 40–58.
- [13] В. Л. Гончаров, "Из области комбинаторики", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **8**:1 (1944), 3–48.
- [14] А. Н. Тимашев, "Предельные теоремы в схемах размещений частиц по различным ячейкам с ограничениями на заполнения ячеек", *ТВП*, **49**:4 (2004), 712–725.
- [15] Е. Сенета, "Правильно меняющиеся функции", 1985.
- [16] Л. М. Волынец, "Пример нестандартной асимптотики числа подстановок с ограничениями на длины циклов", *Вероятностные процессы и их приложения*, МИЭМ, М., 1989, 85–90.
- [17] В. Ф. Колчин, "О числе подстановок с ограничениями на длины циклов", *Дискрет. матем.*, **1**:2 (1989), 97–109.
- [18] V. F. Kolchin, "The number of permutations with cycle lengths from a fixed set", *Random Graphs. v. 2* (Poznań, 1989), Wiley-Intersci. Publ., Wiley, New York, 1992, 139–149.
- [19] А. И. Павлов, "О некоторых классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов", *Матем. сб.*, **129**:2 (1986), 252–263.
- [20] А. И. Павлов, "О подстановках с длинами циклов из заданного множества", Резюме докладов, сделанных на заседании семинара «Вероятностные методы в дискретной математике» в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР (апрель–декабрь 1985 г.), *ТВП*, **31**:3 (1986), 618–619.
- [21] А. И. Павлов, "О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества", *Дискрет. матем.*, **3**:3 (1991), 109–123.
- [22] А. И. Павлов, "Асимптотика числа подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов", *Докл. РАН*, **335**:5 (1994), 556–559.
- [23] А. И. Павлов, "О двух классах подстановок с теоретико-числовыми ограничениями на длины циклов", *Матем. заметки*, **62**:6 (1997), 881–891.
- [24] А. Л. Якимив, "О числе A -подстановок", *Матем. сб.*, **180**:2 (1989), 294–303.
- [25] А. Л. Якимив, "О подстановках с длинами циклов из заданного множества", *Дискрет. матем.*, **1**:1 (1989), 125–134.

- [26] А. Л. Якимив, “О некоторых классах подстановок с длинами циклов из заданного множества”, *Дискрет. матем.*, **4**:3 (1992), 128–134.
- [27] A. L. Yakymiv, “Limit theorems for random A -permutations”, *Probabilistic Methods in Discrete Mathematics* (Petrozavodsk, 1992), Progr. Pure Appl. Discrete Math., **1**, VSP, Utrecht, 1993, 459–469.
- [28] А. Л. Якимив, “О подстановках с длинами циклов из случайного множества”, *Дискрет. матем.*, **12**:4 (2000), 53–62.
- [29] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1962.

А. Л. Якимив

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: arsen@mi.ras.ru

Поступило

27.02.2009