Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Шананин, О слоевой структуре множеств симметричной инвариантности решений квазилинейных уравнений, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 924–934

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:21:52

УДК 517.85

О слоевой структуре множеств симметричной инвариантности решений квазилинейных уравнений

Н. А. Шананин

На основе полученных ранее результатов об однозначном продолжении решений анизотропных линейных и слабо-нелинейных дифференциальных уравнений и продолжении свойств инвариантности этих решений доказываются теоремы о слоевой квазианалитичности и слоевой структуре множеств симметричной инвариантности решений квазилинейных уравнений.

Библиография: 11 названий.

Заметка дополняет результаты статей автора [1], [2] и [3]. В работе [1] для решений линейных и слабо нелинейных дифференциальных уравнений со взвешенными производными доказан аналог теоремы Кальдерона [4] о локальной единственности решения задачи Коши для изотропного дифференциального уравнения с частными производными. Обзор основных результатов о локальной единственности продолжений решений изотропных дифференциальных уравнений можно найти в монографиях Хёрмандера [5] и Егорова [6]. Кроме уже отмеченного результата, в [1] получены достаточные условия на тип уравнения, при выполнении которых ростки решений имеют не более одного продолжения вдоль слоев, порожденных сдвигами по переменным наименьшего веса. Этот эффект характерен для уравнений со взвешенными производными. Из него, в частности, следуют послойная квазианалитичность ростков решений [2] и послойное продолжение симметричной инвариантности ростков решений [3]. В работе [2] показано, что в рассматриваемый класс уравнений входят основные уравнения распространения нелинейных волн. Отметим также, что свойствами пространственной послойной квазианалитичности и пространственным послойным продолжением симметричной инвариантности обладают ростки решений нестационарной системы Навье–Стокса [7].

1. Однозначное продолжение ростков решений и квазианалитичность по части переменных. Пусть $u(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, определенная на открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Обозначим через $[u]_m(x)$ совокупность всех частных производных $\partial^\alpha u(x)$, взвешенный порядок

$$\langle \varrho, \alpha \rangle = \varrho_1 \alpha_1 + \varrho_2 \alpha_2 + \cdots + \varrho_n \alpha_n$$

которых не превышает числа $m \in \mathbb{Z}_+$. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_+)^n$ – целочисленный мультииндекс, $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in \mathbb{N}^n$ – весовые коэффициенты.

Взвешенным пучком символов квазилинейного оператора

$$P(u) = \sum_{m-\mu < \langle \varrho, \alpha \rangle \leq m} a_\alpha(x, [u]_{m-\mu}(x)) D^\alpha u, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mu = \min_j \varrho_j, \quad (1)$$

на функции $u \in C^\infty(\Omega)$ называется многочлен

$$\mathcal{H}_u(x, \xi, h) = \sum_{k=0}^{\mu-1} h^k \sum_{\langle \varrho, \alpha \rangle = m-k} a_\alpha(x, [u]_{m-\mu}(x)) \xi^\alpha, \quad (x, \xi, h) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

а его старшая часть

$$p_{u,m}(x, \xi) = \mathcal{H}_u(x, \xi, 0) = \sum_{\langle \varrho, \alpha \rangle = m} a_\alpha(x, [u]_{m-\mu}(x)) \xi^\alpha$$

называется *взвешенным главным символом*.

Будем говорить, что ростки u_{x^0} и v_{x^0} двух бесконечно дифференцируемых функций имеют равные ростки k -сужений на росток гиперповерхности S_{x^0} , и писать

$$u|_{S_{x^0}, k} = v|_{S_{x^0}, k},$$

если для некоторых (а значит, и для любых) их представителей u, v и

$$S = \{x \in U_{x^0} \mid \varphi(x) = 0, \varphi_{x'}(x^0) \neq 0\},$$

где U_{x^0} – окрестность точки x^0 , найдется окрестность V_{x^0} , в которой

$$\partial_x^\alpha (u - v)|_{S \cap V_{x^0}} = 0$$

при $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < k$.

Положим $x' = \{x_j \mid \varrho_j = \mu\}$ и $x'' = \{x_j \mid \varrho_j > \mu\}$, аналогично, $\xi = (\xi', \xi'')$. Росток S_{x^0} назовем *нехарактеристическим* для P на u , если для некоторого (а значит, и для любого) его представителя, заданного локально уравнением $\varphi(x) = 0$, справедливо

$$p_{u,m}(x^0, \varphi_{x'}(x^0), 0) \neq 0.$$

Оператор (1) назовем ξ' -квазиэллиптическим на u в точке x , если из равенств $p_{u,m}(x, \xi) = 0$ и $\xi'' = 0$ следует, что $\xi' = 0$. Для ξ' -квазиэллиптического на u в точке x^0 оператора росток гиперповерхности S_{x^0} является нехарактеристическим тогда и только тогда, когда для его представителей $S = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0, \varphi_{x'}(x^0) \neq 0\}$ справедливо неравенство $\varphi_{x'}(x^0) \neq 0$. Если P – ξ' -квазиэллиптический на u в точке x^0 оператор, то $m/\mu \in \mathbb{N}$.

Для ростков решений квазилинейного уравнения

$$(Pu =) \sum_{m-\mu < \langle \varrho, \alpha \rangle \leq m} a_\alpha(x, [u]_{m-\mu}(x)) D^\alpha u = f(x, [u]_{m-\mu}(x)), \quad (2)$$

справедлива следующая теорема кальдероновского типа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u, v \in C^\infty(\Omega)$ – решения уравнения (2) и $x^0 \in \Omega$. Предположим, что $P - \xi'$ -квазиэллиптический на u в x^0 оператор и его взвешенный пучок символов удовлетворяет в x^0 условию

(Р) для любых неколлинеарных векторов (ξ'^0, ξ''^0) и $(\eta'^0, 0)$ существует окрестность W точки $(x^0, \eta'^0, \xi^0, 0)$, в которой характеристическое уравнение

$$\mathcal{H}_u(x, z\eta' + \xi', \xi'', h) = 0$$

имеет только простые корни, причем мнимая часть каждого из корней либо тождественно равна нулю в W , либо отлична от нуля во всех точках W . Тогда из равенства k -суждений

$$u|_{S_{x^0, k}} = v|_{S_{x^0, k}}, \quad k = \frac{m}{\mu},$$

на росток нехарактеристической гиперповерхности S_{x^0} следует равенство

$$u_{x^0} = v_{x^0}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Требование о ξ' -квазиэллиптичности на u оператора P в условиях теоремы 1 можно опустить, если потребовать, чтобы для некоторого представителя $S = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0, \varphi_x(x^0) \neq 0\}$ нехарактеристического для P на решении u ростка гиперповерхности для любого вектора $\xi^0 = (\xi'^0, \xi''^0)$, неколлинеарного $(\varphi_{x'}(x^0), 0)$, существовала окрестность W точки $(x^0, \xi^0, 0)$, в которой уравнение $\mathcal{H}_u(x, z\varphi_{x'}(x) + \xi', \xi'', h) = 0$ имело только простые корни, удовлетворяющие указанному в (Р) условию на мнимые части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разность решений $v - u = w$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\sum_{m-\mu < \langle \varrho, \alpha \rangle \leq m} a_\alpha(x, [u]_{m-\mu}) D^\alpha w = \sum_{\langle \varrho, \alpha \rangle \leq m-\mu} c_{\alpha, v, u}(x) D^\alpha w, \quad (3)$$

где $c_{\alpha, v, u}(x)$ – бесконечно дифференцируемые коэффициенты, зависящие от u и v . Пусть $S = \{x \in U_{x^0} \mid \varphi(x) = 0\}$ – представитель ростка гиперповерхности S_{x^0} , на котором $\partial_x^\alpha w|_S = 0$ при $|\alpha| < k$, а значит, и при $\langle \varrho, \alpha \rangle \leq m - \mu$.

Утверждение теоремы следует из теоремы 1.4 статьи [1], если доказать, что для любых неколлинеарных векторов (ξ'^0, ξ''^0) и $(\varphi_{x'}(x^0), 0)$ найдется окрестность V точки $(x^0, \xi^0, 0)$, в которой уравнение

$$\mathcal{H}_u(x, zh^{e-\mu}\varphi_x(x) + \xi, h) = 0, \quad (h^{e-\mu}\varphi_x(x))_j = h^{e_j-\mu}\varphi_{x_j}(x), \quad (4)$$

имеет только простые корни $\tilde{z}_1(x, \xi, h), \dots, \tilde{z}_k(x, \xi, h)$, причем мнимая часть каждого из корней либо тождественно равна нулю в V , либо отлична от нуля во всех точках V . Поскольку при $x = x^0$ и $h = 0$ уравнения (4) и

$$\mathcal{H}_u(x, z\varphi_{x'}(x^0) + \xi', \xi'', h) = 0, \quad (5)$$

совпадают, то равенство $\tilde{z}_j(x^0, \xi^0, 0) = z_j(x^0, \xi^0, 0)$ определяет взаимно однозначное соответствие между корнями $z_1(x, \xi, h), \dots, z_k(x, \xi, h)$ уравнения (5) и корнями уравнения (4). При этом $\tilde{z}_j(x, \xi, h)$ есть корень уравнения (4) тогда и только тогда, когда $\tilde{z}_j(x, \xi, h)$ – решение уравнения

$$z - z_j(x, \xi' + z(\varphi_{x'}(x) - \varphi_{x'}(x^0)), \xi'' + zh^{e-\mu}\varphi_{x''}(x), h) = 0.$$

Теперь, применяя к последнему уравнению теорему о неявной функции (соответственно вещественный или аналитический варианты), нетрудно показать, что для корней уравнения (4) выполняются условия теоремы 1.4 из [1]. Теорема доказана.

Пусть $x^0 \in \Omega$. Обозначим через $\mathcal{F}_\Omega(x^0)$ связную компоненту слоя $\{x \in \Omega \mid x'' = x''^0\}$, содержащую x^0 . В следующей теореме приведены достаточные условия для однозначного послыоного продолжения ростков решений.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u, v \in C^\infty(\Omega)$ – решения уравнения (2). Предположим, что в каждой точке слоя $\mathcal{F}_\Omega(x^0)$ оператор P является ξ' -квазиэллиптическим на u и его взвешенный пучок символов удовлетворяет условию (Р). Тогда из равенства $u_{x^0} = v_{x^0}$ следует $u_x = v_x$ для всех $x \in \mathcal{F}_\Omega(x^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Окрестность W , в которой определены корни z_j уравнения

$$\mathcal{H}_u(x, z\eta' + \xi', \xi'', h) = 0, \quad (6)$$

можно считать конической по переменным η' , а корни z_j положительно однородными функциями степени -1 по η' . Далее, из положительной квазиоднородности пучка $\mathcal{H}_u(x, \xi, h)$ по совокупности переменных (ξ, h) следует, что окрестность W можно считать квазиконической по (ξ, h) , а корни z_j – положительно квазиоднородными степени μ .

Покажем, что существует открытая окрестность слоя $\mathcal{F}_\Omega(x^0)$, в которой оператор P является ξ' -квазиэллиптическим на u . Для этого, очевидно, достаточно доказать, что для каждой точки, в которой оператор P является ξ' -квазиэллиптическим на u , найдется окрестность, в каждой точке которой P обладает этим свойством. Предположим противное. Тогда для точки x^0 , в которой оператор P является ξ' -квазиэллиптическим на u , найдется последовательность (x^l, ξ^l) такая, что $x^l \rightarrow x^0$ при $l \rightarrow +\infty$, $p_{u,m}(x^l, \xi^l, 0) = 0$ и $|(\xi^l, 0)|_\varrho = 1$. Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $\xi^l \rightarrow \xi'^0 \neq 0$. Отсюда $p_{u,m}(x^0, \xi'^0, 0) = 0$, что противоречит ξ' -квазиэллиптичности P на u в точке x^0 . Таким образом, существует открытая окрестность $\Omega_1 \subset \Omega$ слоя $\mathcal{F}_\Omega(x^0)$, в которой оператор P является ξ' -квазиэллиптическим на u .

Теперь покажем, что существует открытая окрестность $\mathcal{F}_\Omega(x^0)$, в каждой точке которой оператор P удовлетворяет условию (Р). Из свойств однородности корней уравнения (6) следует, что для выполнения условия (Р) в точке x^0 необходимо и достаточно, чтобы оно было выполнено для любой пары векторов η'^0 и $\xi^0 = (\xi'^0, \xi''^0)$, принадлежащей компактному множеству

$$\mathcal{V} = \left\{ (\eta', \xi) \mid |(\eta', 0)|_\varrho = 1, |\xi|_\varrho = 1, \sum_{j \in J'} \eta'_j \xi'_j = 0 \right\},$$

где

$$|\xi|_\varrho = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^{2M_j} \right)^{1/(2M)}, \quad M = \prod_{j=1}^n \varrho_j, \quad M_j = \frac{M}{\varrho_j}.$$

Если условие (Р) выполнено в x^0 , то для каждого вектора $(\eta'^0, \xi^0) \in \mathcal{V}$ найдется окрестность W точки $(x^0, \eta'^0, \xi^0, 0)$, в которой уравнение (6) имеет только простые корни, мнимая часть которых удовлетворяет требованиям условия (Р). Сужая

в случае необходимости окрестности W , можно считать, что они имеют вид произведений $W = U \times \Gamma \times I$, где U – открытая окрестность x^0 , Γ – открытая окрестность (η^0, ξ^0) , I – открытая окрестность 0 в $\mathbb{R}$. В силу компактности произведения $\{x^0\} \times \mathcal{V} \times \{0\}$ найдется его конечное покрытие открытыми окрестностями $U_l \times \Gamma_l \times I_l$, $l = 1, 2, \dots, N$. Очевидно, в каждой точке окрестности $\bigcap_l U_l$ точки x^0 выполнено условие (P). Сужая при необходимости окрестность Ω_1 слоя $\mathcal{F}_\Omega(x^0)$, можно считать, что в точках Ω_1 выполнено условие (P).

Для завершения доказательства достаточно применить теорему 4.4. из [1] к разности $v - u = w$, которая является решением линейного уравнения (3).

ПРИМЕР 1. В уравнении фильтрации газа в пористом грунте

$$u_t - u\Delta_x u = a^2 |\nabla_x u|^2, \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

операции дифференцирования по t припишем вес 2, а по x – вес 1, $\varrho = (2, 1, \dots, 1)$. Таким образом, $x' = (x_1, \dots, x_n)$ и $x'' = t$. Пусть τ – переменная, двойственная к t , а $\xi \in \mathbb{R}^n$ – двойственные к $x \in \mathbb{R}^n$. Поскольку $\mu = 1$, то взвешенный пучок символов совпадает со взвешенным главным символом

$$\mathcal{H}_u(t, x, \tau, \xi, h) = p_{u,2}(t, x, \tau, \xi) = i\tau + u|\xi|^2.$$

Если $\operatorname{Re} u(t, x) \neq 0$, то из равенств $p_{u,2}(t, x, \tau, \xi) = 0$ и $\tau = 0$ следует $\xi = 0$. Следовательно, оператор $P = \partial_t - u(t, x)\Delta_x$ является ξ -квазиэллиптическим на функции $u(t, x)$ в тех точках, где $\operatorname{Re} u(t, x) \neq 0$. Далее, если z^0 – вещественный корень многочлена $\mathcal{H}_u(t, x, \tau, \xi, h) = i\tau + u(t, x)|z\eta + \xi|^2$ и $\operatorname{Re} u(t, x) \neq 0$, то $z^0\eta + \xi = 0$ и $\tau = 0$, что означает линейную зависимость векторов $(0, \eta)$ и (τ, ξ) . Если z^0 – кратный корень многочлена $\mathcal{H}_u(t, x, \tau, \xi, h)$, $\eta \neq 0$ и $\operatorname{Re} u(t, x) \neq 0$, то $z^0 = -\langle \eta, \xi \rangle / |\eta|^2$, $\tau = 0$ и $\langle \eta, \xi \rangle^2 = |\eta|^2 |\xi|^2$. Последнее равенство влечет линейную зависимость векторов η и ξ , а значит, и линейную зависимость $(0, \eta)$ и (τ, ξ) . Нетрудно проверить, что для каждой точки $(t^0, x^0) \in \Omega$, в которой $\operatorname{Re} u(t, x) \neq 0$, для каждой пары неколлинеарных векторов $(0, \eta^0)$ и (τ^0, ξ^0) найдется окрестность W точки $(t^0, x^0, \eta^0, \tau^0, \xi^0)$, в каждой точке которой квадратный многочлен $i\tau + u(t, x)|z\eta + \xi|^2$, $z \in \mathbb{C}$, имеет простые корни с нетривиальными мнимыми частями. Таким образом, если $\operatorname{Re} u(t, x) \neq 0$ для всех $(t, x) \in \Omega$, то оператор $P = \partial_t - u(t, x)\Delta_x$ является ξ -квазиэллиптическим на функции u и удовлетворяет условию (P) во всех точках этого множества.

Бесконечно дифференцируемая функция

$$u(t, x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x_1^2}\right), & x_1 \neq 0; \\ 0, & x_1 = 0, \end{cases}$$

где $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, является решением уравнения

$$u_t - u\Delta_x u = \left(1 - \frac{3}{2}x^2\right)|\nabla_x u|^2,$$

старшая часть которого $\partial_t - u(t, x)\Delta_x$ равна старшей части уравнения (7). Условия теоремы 3 для решения $u(t, x)$ выполнены всюду за исключением точек гиперплоскости $x_1 = 0$. Точки этой гиперплоскости служат препятствием для однозначного

продолжения ростков решений вдоль слоев вида $t = t^0$. В самом деле, функция

$$v(t, x) = \begin{cases} u(t, x), & x_1 < 0, \\ 0, & x_1 \geq 0, \end{cases}$$

также есть решение данного уравнения, причем $u(t, x) = v(t, x)$ при $x_1 \leq 0$, но $u(t, x) \neq v(t, x)$ при $x_1 > 0$.

ПРИМЕР 2. В качестве второго примера рассмотрим встречающееся в задачах гидродинамики уравнение

$$u_{x_2}u_{x_1x_2} - u_{x_1}u_{x_2x_2} - \nu u_{x_2x_2x_2} = f(x, u, u_{x_1}, u_{x_2}), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (8)$$

где ν – вещественное, отличное от нуля число. Положим $\varrho = (2, 1)$. Тогда $x' = x_2$ и $x'' = x_1$. Поскольку $\mu = 1$, то

$$\mathcal{H}_u(x, \xi, h) = p_{u,3}(x, \xi) = -u_{x_2}\xi_1\xi_2 + i\nu\xi_2^3 = \xi_2(i\nu\xi_2^2 - u_{x_2}\xi_1).$$

Очевидно, оператор $P = u_{x_2}\partial_{x_1}\partial_{x_2} - \nu\partial_{x_2}^3$ является ξ_2 -квазиэллиптическим в Ω на всех функциях. Предположим, что $u(x)$ – вещественнозначная функция. Тогда, если $u_{x_2}(x^0) \neq 0$, то для каждой пары неколлинеарных векторов $(0, \eta_2^0)$ и (ξ_1^0, ξ_2^0) найдется окрестность W точки $(x^0, \eta_2^0, \xi_1^0, \xi_2^0)$, в любой точке которой многочлен $(z\eta_2 + \xi_2)(i\nu(z\eta_2 + \xi_2)^2 - u_{x_2}\xi_1)$ имеет один вещественный корень и два различных комплексных с нетривиальными мнимыми частями. Таким образом, если $u(x)$ – вещественнозначная функция и $u_{x_2}(x) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, то оператор $P = u_{x_2}\partial_{x_1}\partial_{x_2} - \nu\partial_{x_2}^3$ является ξ_2 -квазиэллиптическим и удовлетворяет условию (P) во всех точках этого множества.

Уравнение (8) в примере 2 можно заменить более общим уравнением

$$u_{x_2}u_{x_1x_2} - \nu u_{x_2x_2x_2} = f(x, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_2x_2})$$

с теми же взвешенным пучком символов и взвешенным главным символом.

Совокупность функций $u(x)$, на которых оператор P является ξ' -квазиэллиптическим и удовлетворяет условию (P) во всех точках Ω , обозначим через $\Phi(P, \Omega)$. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (2). Будем говорить, что $u(x)$ является x' -квазианалитическим в Ω , если для любого другого решения $v(x)$ из равенства ростков $u_{x^0} = v_{x^0}$ в любой точке $x^0 \in \Omega$ следует равенство $u_x = v_x$ во всех точках x , принадлежащих $\mathcal{F}_\Omega(x^0)$. Из теоремы 3, очевидно, вытекает следующее достаточное условие x' -квазианалитичности.

ТЕОРЕМА 4. Если решение уравнения (2) принадлежит $\mathcal{P}_{P, \Omega}$, то оно является x' -квазианалитическим в Ω .

Возвращаясь к примерам, можно утверждать, что для x -квазианалитичности на множестве Ω решения $u(t, x)$ уравнения (7) достаточно, чтобы вещественная часть $u(t, x)$ была отлична от нуля в точках Ω , а для x_2 -квазианалитичности на множестве Ω вещественнозначного решения $u(x_1, x_2)$ уравнения (8) достаточно, чтобы производная $u_{x_2}(x)$ была отлична от нуля в точках Ω .

2. Дискретные симметрии и слоевая структура множеств инвариантности решений. Пусть $\Omega_j \subseteq \Omega$, $j = 1, 2$, и $g: C^\infty(\Omega_1) \rightarrow C^\infty(\Omega_2)$. Говорят, что g сохраняет решения уравнения (2), если из того, что $u(x)$ является решением уравнения на множестве Ω_1 , следует, что $g \circ u = g(u)$ является решением уравнения (2) на Ω_2 . Пусть $x^0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Будем говорить, что функция $u(x) \in C^\infty(\Omega_1)$ g -инвариантна в точке x^0 , если функции $(g \circ u)$ и u имеют в точке x^0 равные ростки: $(g \circ u)_{x^0} = u_{x^0}$. Заметим, что g -инвариантность функции в точке равносильна g -инвариантности этой функции в каждой точке некоторой открытой окрестности этой точки.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что g сохраняет решения уравнения (2), u – решение (2), причем в каждой точке $\mathcal{F}_\Omega(x^0)$ оператор P является ξ' -квазиэллиптическим на u и его пучок $\mathcal{H}_u$ удовлетворяет условию (P). Тогда*

- 1) *если $(g \circ u)_{x^0} = u_{x^0}$, то $(g \circ u)_x = u_x$ для всех $x \in \mathcal{F}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(x^0)$;*
- 2) *если k -сужения ростков u_{x^0} и $(g \circ u)_{x^0}$ на росток нехарактеристической гиперповерхности S_{x^0} равны, то $(g \circ u)_x = u_x$ для всех точек $x \in \mathcal{F}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(x^0)$, $k = m/\mu$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На пересечении $\Omega_1 \cap \Omega_2$ обе функции $u(x)$ и $g(u)(x)$ являются решениями уравнения. Поэтому первое утверждение вытекает из теоремы 3. Для доказательства второго вначале следует воспользоваться теоремой 1, а затем первым утверждением этой теоремы.

Проиллюстрируем теорему 5 примерами. В качестве первого приложения рассмотрим вопрос о *распространении четности* решений уравнения (7). Пусть $u(t, x)$ – вещественнозначное решение, определенное в слое $\Omega = (t^1, t^2) \times \mathbb{R}^n$, причем $u(t, x) \neq 0$ в точках Ω . Пусть $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и связная открытая окрестность U точки x^0 таковы, что множество

$$\Gamma = \{(t, x) \mid \langle a, x - x^0 \rangle + c(t - t^0) = 0, x \in U\} \subset \Omega.$$

В каждой точке Γ касательная плоскость определяет нехарактеристический росток гиперповерхности.

Множество индексов $\{1, 2, \dots, n\}$ разобьем на две непересекающиеся совокупности J_+ и J_- . Обозначим через σ оператор частичной инверсии в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$, отображающий точку x в точку

$$\sigma \circ x = (\sigma_1(x_1), \sigma_2(x_2), \dots, \sigma_n(x_n)),$$

где $\sigma_j(x_j) = x_j$ при $j \in J_+$ и $\sigma_j(x_j) = 2x_j^1 - x_j$ при $j \in J_-$. Говорят, что функция $v(t, x)$ является σ -четной на σ -инвариантном множестве Ω' , если $v(t, \sigma \circ x) = v(t, x)$ для всех $(t, x) \in \Omega'$. Определим отображение $g: C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$, действующее на функции $u(t, x) \in C^\infty(\Omega)$ по правилу

$$(g \circ u)(t, x) = u(t, \sigma \circ x).$$

Очевидно, g сохраняет решения уравнения (7).

Если на множестве Γ решение $u(t, x)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} (u(t, \sigma \circ x) - u(t, x))|_\Gamma &= 0, \\ (u_{x_j}(t, \sigma \circ x) - u_{x_j}(t, x))|_\Gamma &= 0, & j \in J_+, \\ (u_{x_j}(t, \sigma \circ x) + u_{x_j}(t, x))|_\Gamma &= 0, & j \in J_-, \end{aligned}$$

то в силу теоремы 5 $u(t, x)$ является σ -четной функцией на множестве

$$(t_*, t^*) \times \mathbb{R}^n, \quad \text{где } t_* = \inf_{(t, x) \in \Gamma} t, \quad t^* = \sup_{(t, x) \in \Gamma} t.$$

В качестве второго приложения рассмотрим вопрос о *распространении пространственной периодичности* решений уравнения (7). Пусть область Ω и поверхность Γ те же, что и в первом приложении, решение $u(t, x)$ удовлетворяет указанным в нем требованиям и $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Если, помимо того, $u(t, x)$ удовлетворяет на Γ условиям

$$\begin{aligned} (u(t, x + h) - u(t, x))|_{\Gamma} &= 0, \\ (u_{x_j}(t, x + h) - u_{x_j}(t, x))|_{\Gamma} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

то из теоремы 5 следует, что $u(t, x)$ на множестве $(t_*, t^*) \times \mathbb{R}^n$ является h -периодической функцией.

3. Групповые симметрии и слоевая структура множеств инвариантности решений. Изложение основ группового анализа дифференциальных уравнений можно найти в книгах [8]–[11]. В этой части статьи доказывается, что свойство решений рассматриваемого класса уравнений быть локально инвариантными относительно групповых симметрий уравнений распространяется вдоль слоев по части переменных. Иными словами, приведены достаточные условия на квазилинейное уравнение и его решение, при которых множество точек локальной инвариантности решений относительно действия локальной группы симметрий уравнения имеет слоевую структуру.

Пусть G – группа симметрий уравнения вида (2). Тогда для каждого решения u , определенного на Ω , и каждой точки $x^0 \in \Omega$ найдутся открытая окрестность U точки x^0 и открытая окрестность V единицы группы такие, что $g \circ u$ есть решение уравнения (2) на U для всех $g \in V$. Будем говорить, что решение u *G -инвариантно в точке x^0* , если существуют такие открытые окрестности U' точки x^0 и V' единицы группы, что $(g \circ u)(x) = u(x)$ для всех $x \in U'$ и $g \in V'$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Отметим, что G -инвариантность решения в точке влечет его G -инвариантность в каждой точке некоторой открытой окрестности этой точки.

ТЕОРЕМА 7. Пусть u – решение уравнения (2), $x^0 \in \Omega$. Предположим, что в каждой точке слоя $\mathcal{F}_{\Omega}(x^0)$ оператор P является ξ' -квазиэллиптическим на u и его взвешенный пучок символов удовлетворяет на u условию (P). Если решение u G -инвариантно в точке x^0 , то оно G -инвариантно во всех точках слоя $\mathcal{F}_{\Omega}(x^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x^1 – произвольная точка $\mathcal{F}_{\Omega}(x^0)$. Покажем, что решение u G -инвариантно в x^1 . Пусть $\gamma[0, 1] \rightarrow \mathcal{F}_{\Omega}(x^0)$ – непрерывный путь, соединяющий x^0 и x^1 , $\gamma(0) = x^0$ и $\gamma(1) = x^1$.

Для каждой точки $y = (y', x''^0) \in \mathcal{F}_{\Omega}(x^0)$ найдутся число $\delta_y > 0$, связанная открытая в $\mathbb{R}^{n'}$ окрестность $U'_{y'} \subset \mathbb{R}^{n'}$ точки y' и окрестность V единицы группы G такие, что $U'_{y'} \times \{x''^0\} \subset \mathcal{F}_{\Omega}(x^0)$ и для всех $g \in V$ на произведении $U'_{y'} \times B_{\delta_y}(x''^0)$ определена функция $u_g(x) = (g \circ u)(x)$, где n' – количество переменных x' в разбиении $x = (x', x'')$,

$$B_{\delta_y}(x''^0) = \{x'' \mid |x'' - x''^0| < \delta_y\}, \quad |x'' - x''^0|^2 = \sum_{j \in J''} (x''_j - x''^0_j)^2.$$

Уменьшив в случае необходимости δ_y и сузив $U'_{y'}$, можно добиться того, что в каждой точке $U'_{y'} \times B_{\delta_y}(x''^0)$ оператор P будет ξ' -квазиэллиптическим на u , а его взвешенный пучок символов будет удовлетворять условию (Р). Это следует из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 3.

Далее, используя покрытие пути $\gamma([0, 1])$ множествами $U'_{y'} \times B_{\delta_y}(x''^0)$ и его компактность, нетрудно убедиться в том, что найдутся связное открытое в $\mathbb{R}^{n'}$ множество u' , число $\delta > 0$ и окрестность V единицы группы G такие, что $\gamma([0, 1]) \in U' \times \{x''^0\} \subset \mathcal{F}_\Omega(x^0)$, в каждой точке $\Omega_1 = U' \times B_\delta(x''^0)$ оператор P является ξ' -квазиэллиптическим на u , а его взвешенный пучок символов удовлетворяет условию (Р) и, кроме того, для всех $g \in G$ на Ω_1 определены функции $u_g(x)$. Так как G – группа симметрий уравнения (2), то каждая функция $u_g(x)$ есть решение уравнения (2) на множестве Ω_1 .

Росток u_{x^0} G -инвариантен, поэтому, уменьшив при необходимости δ и сузив V , можно найти такую открытую окрестность $U'_0 \subset U'$ точки x''^0 , что $u_g(x) = u(x)$ для всех $x \in U'_0 \times B_\delta(x''^0)$ и $g \in V$. Отсюда следует равенство ростков функций u_g и u во всех точках $y \in U'_0 \times B_\delta(x''^0)$. Тогда вследствие теоремы 3 в каждой точке $x \in \mathcal{F}_{\Omega_1}(y)$ ростки функций u_g и u равны, а значит, и значения функций также равны. Поскольку $\Omega_1 = \bigcup_{y \in U'_0 \times B_\delta(x''^0)} \mathcal{F}_{\Omega_1}(y)$, то отсюда получаем $u_g(x) = u(x)$ для всех $x \in \Omega_1$ и $g \in V$. В частности, u G -инвариантно в точке x^1 . Теорема доказана.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМЕРА 1. Пусть $\Omega = (t_1, t_2) \times \mathbb{R}^n$, $u(t, x)$ – вещественнозначное решение уравнения (7), причем $u(t, x) \neq 0$ для всех $(t, x) \in \Omega$, A – кососимметрическая $(n \times n)$ -матрица с вещественными коэффициентами. Тогда отображение $\lambda \circ : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$, ставящее в соответствие функции $u(t, x)$ функцию $(\lambda \circ u)(t, x) = u(t, e^{\lambda A} x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, определяет действие аддитивной группы $\mathbb{R}$ на $C^\infty(\Omega)$, которое является группой симметрий этого уравнения. Предположим, что решение $u(t, x)$ инвариантно относительно действия группы в точке (t^0, x^0) . Тогда, применяя теорему 7 и учитывая замечание 6, нетрудно показать, что найдется слой вида $(t_*, t^*) \times \mathbb{R}^n$, содержащий (t^0, x^0) , в точках которого $(\lambda \circ u)(t, x) = u(t, x)$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМЕРА 2. Пусть $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, $u(x_1, x_2)$ – вещественнозначное решение уравнения (8), причем $u_{x_2}(x_1, x_2) \neq 0$ в Ω . В рассматриваемом случае $\mathcal{F}_\Omega(x^0) = \{x_1^0\} \times (a_2, b_2)$ для любой точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \Omega$. Предположим сначала, что $u(x_1, x_2)$ локально инвариантно относительно сдвигов по переменной x_1 в точке x^0 , т.е. существуют числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что

$$U = (x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1) \times (x_2^0 - \delta_1, x_2^0 + \delta_1) \subset \Omega, \quad U + (h, 0) \subset \Omega$$

при $|h| < \delta_2$ и $u(x_1 + h, x_2) = u(x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in U$ и $|h| < \delta_2$. Тогда из теоремы 7 и замечания 6 следует, что $u(x_1, x_2)$ локально инвариантно относительно сдвигов по переменной x_1 в каждой точке некоторой полосы $\Pi = (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times (a_2, b_2)$, где $\delta > 0$. Итак, если вещественнозначное решение уравнения (8) с отличной от нуля в прямоугольнике $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ производной u_{x_2} локально инвариантно относительно сдвигов по переменной x_1 в некоторой точке, оно локально инвариантно относительно сдвигов по x_1 в целой полосе Π , содержащей эту точку. Поэтому $u_{x_1}(x_1, x_2) = 0$ в Π . Теперь из того, что $u(x_1, x_2)$ является решением уравнения (8),

следует, что

$$u(x_1, x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c \quad \text{в } \Pi.$$

Обозначим через $\mathbb{R}_+$ мультипликативную группу вещественных положительных чисел. При любом фиксированном числе $m \in \mathbb{R}$ отображение

$$(\lambda \circ u)(x_1, x_2) = \lambda^{m-1}u(\lambda x_1, \lambda^m x_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

является группой симметрий уравнения (8). Предположим теперь, что решение $u(x_1, x_2)$ локально инвариантно относительно действия $\mathbb{R}_+$ в точке x^0 . Тогда подобно случаю инвариантности относительно сдвигов можно показать, что найдется полоса $\Pi = (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times (a_2, b_2)$, в которой $u(x_1, x_2)$ локально инвариантно относительно действия $\mathbb{R}_+$: в любой точке $(x_1, x_2) \in \Pi$ при λ , близких к единице, справедливо равенство $\lambda^{m-1}u(\lambda x_1, \lambda^m x_2) = u(x_1, x_2)$. Отсюда дифференцированием по λ получаем, что $x_1 u_{x_1} + m x_2 u_{x_2} + (m-1)u = 0$ в Π . Из (8) и последнего равенства вытекает, что в Π решение $u(x_1, x_2)$ удовлетворяет по переменной x_2 обыкновенному дифференциальному уравнению

$$x_1 \nu u_{x_2 x_2 x_2} + u_{x_2}^2 - (m-1)u u_{x_2 x_2} = 0,$$

зависящему от параметра x_1 .

Завершая статью, приведем еще один вариант достаточных условий, при которых множество симметричной локальной инвариантности решения имеет слоевую структуру.

ТЕОРЕМА 8. Пусть u – решение уравнения (2), $x^0 \in \Omega$ и Γ – нехарактеристическая в точке x^0 гиперповерхность. Предположим, что в каждой точке слоя $\mathcal{F}_\Omega(x^0)$ оператор P является ξ' -квазиэллиптическим на u и его взвешенный пучок символов удовлетворяет условию (P). Предположим, что существуют такие окрестности U точки x^0 и V единицы группы симметрий G , что

$$\partial^\alpha(g \circ u - u)|_{\Gamma \cap U} = 0$$

при $|\alpha| < m/\mu$ и $g \in V$. Тогда u G -инвариантно во всех точках слоя $\mathcal{F}_\Omega(x^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для рассматриваемой точки $x^0 = (x'^0, x''^0)$ найдутся связная открытая окрестность $U' \subset \mathbb{R}^{n'}$ точки x'^0 , число $\delta > 0$ и окрестность единицы группы G такие, что

- 1) функции $u_g(x) = (g \circ u)(x)$ определены на области $\Omega_1 = U' \times B_\delta(x''^0)$ для всех $g \in V$ и являются решениями уравнения (2) на Ω_1 ;
- 2) $\mathcal{F}_{\Omega_1}(y) = U' \times \{y''\}$ для всех $y = (y', y'') \in \Omega_1$ и $\Omega_1 = \bigcup_{y \in \Gamma_1} \mathcal{F}_{\Omega_1}(y)$, где $\Gamma_1 = \Gamma \cap \Omega_1$;
- 3) $\partial^\alpha(g \circ u - u)|_{\Gamma_1} = 0$ при $|\alpha| < m/\mu$ и $g \in V$;
- 4) в каждой точке Ω_1 оператор P является ξ' -квазиэллиптическим на u и его взвешенный пучок символов удовлетворяет условию (P).

Последнему условию нетрудно удовлетворить, используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3.

Пусть y – произвольная точка Γ_1 и $g \in V$. Тогда в силу теоремы 1 ростки функций u_g и u в точке y равны, а в силу теоремы 3 они равны в каждой точке слоя $\mathcal{F}_{\Omega_1}(y) = U' \times \{y''\}$. Отсюда для значений функций имеем

$$u_g(x) = u(x) \quad \text{для всех } x \in \mathcal{F}_{\Omega_1}(y).$$

Поскольку $\Omega_1 = \bigcup_{y \in \Gamma_1} \mathcal{F}_{\Omega_1}(y)$, то $u_g(x) = u(x)$ для любых $x \in \Omega_1$ и $g \in V$. Следовательно, росток решения u G -инвариантен в точке x^0 . Применение теоремы 7 завершает доказательство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. А. Шананин, “Об однозначном продолжении решений дифференциальных уравнений со взвешенными производными”, *Матем. сб.*, **191**:3 (2000), 113–142.
- [2] Н. А. Шананин, “О частичной квазианалитичности обобщенных решений слабо нелинейных дифференциальных уравнений со взвешенными производными”, *Матем. заметки*, **68**:4 (2000), 608–619.
- [3] Н. А. Шананин, “О распространении инвариантности ростков решений слабо нелинейных дифференциальных уравнений со взвешенными производными”, *Матем. заметки*, **71**:1 (2002), 135–143.
- [4] A. P. Calderón, “Uniqueness in Cauchy problem for partial differential equations”, *Amer. J. Math.*, **80**:1 (1958), 16–36.
- [5] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, В 4-х т., Мир, М., 1986–1988.
- [6] Ю. В. Егоров, *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, М., 1984.
- [7] N. A. Shananin, “On partial quasi-analyticity of the set of solutions of a set of the Navier–Stokes-type equations”, *J. Math. Sci. (New York)*, **110**:2 (2002), 2467–2475.
- [8] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [9] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [10] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [11] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, М., 1997.

Н. А. Шананин

Государственный университет управления
E-mail: nashananin@inbox.ru

Поступило
30.03.2009