Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Папин, И. Г. Ахмерова, Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 246–261

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:02:50

Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси

А. А. Папин, И. Г. Ахмерова

Для системы уравнений одномерного нестационарного движения теплопроводной двухфазной смеси (газ – твердые частицы) доказана локальная разрешимость начально-краевой задачи. В случае постоянства истинных плотностей фаз установлена разрешимость “в целом” по времени.

Библиография: 6 названий.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial(\rho_1^0 s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1^0 s v_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho_2^0(1-s))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2^0(1-s)v_2)}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho_1^0 s \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = - \frac{\partial(sp_1)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(s) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + F + \rho_1^0 s g, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial((1-s)p_2)}{\partial x} + F = 0, \quad F = B(s)(v_2 - v_1) + p_2 \frac{\partial s}{\partial x}, \quad p_1 - p_2 = p_c(s), \quad (1.3)$$

$$c_1 \rho_1^0 s \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (1.4)$$

решаемая в области $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, 1)$, при краевых и начальных условиях ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} v_i|_{x=0, x=1} &= 0, & \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= 0, & v_i|_{t=0} &= v_i^0(x), \\ p_2|_{t=0} &= p^0(x), & \theta|_{t=0} &= \theta^0(x), & s|_{t=0} &= s^0(x). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное движение между непроницаемыми теплоизолированными стенками двухфазной смеси, состоящей из твердых частиц и газа [1]. Здесь ρ_i^0 , v_i – соответственно истинная плотность и скорость i -й фазы ($i = 1$ – твердые частицы, $i = 2$ – газ), s – объемная концентрация твердых

Работа выполнена при поддержке программы “Развитие научного потенциала высшей школы”, 2009–2010, (грант № 4278).

частиц, θ – абсолютная температура смеси, p_1 – эффективное давление твердых частиц, p_2 – внутреннее давление газа, g – плотность массовых сил, $c_1 = \text{const} > 0$ – теплоемкость при постоянном объеме первой фазы; кроме того, $\mu(s)$ – вязкость первой фазы, $B(s)$ – коэффициент взаимодействия фаз, $\chi(s)$ – коэффициент теплопроводности смеси, $p_c(s)$ – разность давлений (заданные функции). Задача записана в эйлеровых координатах x, t . Истинная плотность твердых частиц ρ_1^0 принимается постоянной. Искомыми являются величины $s, \theta, \rho_2^0, v_i, p_i, i = 1, 2$. Система уравнений (1.1)–(1.4) замыкается либо заданием уравнения состояния газа $p_2 = R\rho_2^0\theta$, $R = \text{const} > 0$, либо предположением о несжимаемости газа, т.е. $\rho_2^0 = \text{const} > 0$ [1].

Локальная по времени разрешимость задачи Коши для уравнений (1.1)–(1.3) установлена в работе [2] при дополнительных условиях $p_1 = p_2, \theta = \text{const}, \rho_i^0 = \text{const}, i = 1, 2$.

Система (1.1)–(1.4) близка по структуре системе уравнений вязкого газа [3; гл. 2] с зависящей от плотности вязкостью [4]. Особенностью задачи (1.1)–(1.5) является наличие двух скоростей v_1 и v_2 , а также необходимость обоснования физического принципа максимума для концентрации s вида $0 \leq s \leq 1$.

В настоящей работе доказана локальная классическая разрешимость задачи (1.1)–(1.5) в случае, когда ρ_2^0 – функция давления и температуры. В предположениях работы [2] установлена разрешимость “в целом”.

Рассмотрим на Ω и Ω_T ряд функциональных пространств, придерживаясь обозначений, принятых в [5; гл. 1]. Пусть $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ – норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty]$. Положим для краткости $\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{q,\Omega}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,\Omega}$. Также используются пространства Гёльдера $C^\alpha(\Omega)$, $C^{k+\alpha}(\Omega)$, k – натуральное, $\alpha \in (0, 1]$, и пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, l – натуральное, $p \in [1, \infty]$, с нормами:

$$\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} \equiv |f|_{\alpha,\Omega} = |f|_{0,\Omega} + H_x^\alpha(f), \quad |f|_{0,\Omega} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

$$H_x^\alpha(f) = \sup_{x_1, x_2 \in \Omega} |f(x_1) - f(x_2)| |x_1 - x_2|^{-\alpha},$$

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\Omega)} \equiv |f|_{k+\alpha,\Omega} = \sum_{m=0}^k \|D_x^m f\|_{0,\Omega} + H_x^\alpha(D_x^k f),$$

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \sum_{m=0}^l \|D_x^m f\|_{p,\Omega}.$$

Для функций, определенных на Ω_T , нам потребуется пространство $L_{q,r}(\Omega_T)$ с нормой

$$\|\|\cdot\|_{q,\Omega}\|_{r,G}, \quad G = (0, T), \quad q, r \in [1, \infty],$$

пространство $L_r(0, T; W_p^l(\Omega))$ с нормой

$$\|\cdot\|_{L_r(0,T;W_p^l(\Omega))} = \|\|\cdot\|_{W_p^l(\Omega)}\|_{r,G},$$

а также пространство $C^{k+\alpha, m+\beta}(\Omega_T)$, k, m – натуральные, $\alpha, \beta \in (0, 1]$, с нормой

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{k+\alpha, m+\beta}(\Omega_T)} \equiv |f|_{k+\alpha, m+\beta, \Omega_T} &= \sum_{l=0}^k \|D_x^l f\|_{0, \Omega_T} + \sum_{j=1}^m \|D_t^j f\|_{0, \Omega_T} + H_x^\alpha(D_x^k f) \\ &\quad + H_t^\beta(D_x^k f) + H_x^\alpha(D_t^m f) + H_t^\beta(D_t^m f), \end{aligned}$$

где

$$H_x^\alpha(f(x, t)) = \sup_{x_1, x_2 \in \Omega} |f(x_1, t) - f(x_2, t)| |x_1 - x_2|^{-\alpha} \quad \text{для всех } t \in (0, T),$$

$$H_t^\beta(f(x, t)) = \sup_{t_1, t_2 \in (0, T)} |f(x, t_1) - f(x, t_2)| |t_1 - t_2|^{-\beta} \quad \text{для всех } x \in \Omega.$$

В случае $k = m$ и $\alpha = \beta$ используется обозначение $C^{k+\alpha}(\Omega_T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Классическим решением* задачи (1.1)–(1.5) называется совокупность функций $s, v_i, p_i, \theta, \rho_2^0, i = 1, 2, s \in C^{1+\alpha}(Q_T)$, где $v_i, p_i, \theta, \rho_2^0 \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T)$, удовлетворяющих уравнениям (1.1)–(1.4) и начальным и граничным условиям (1.5) как непрерывные в $\overline{Q_T}$ функции.

В случае постоянства истинной плотности второй фазы система уравнений (1.1)–(1.3) становится замкнутой относительно неизвестных функций $s, v_i, p_i, i = 1, 2$. Уравнение для температуры рассматривается отдельно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обобщенным решением* задачи (1.1)–(1.5) при $\rho_i^0 = \text{const}$ называется совокупность функций $s, \theta, v_i, p_i, i = 1, 2$, где

$$s \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial s}{\partial t} \in L_2(Q_T),$$

$$v_i, \theta \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \quad \frac{\partial v_i}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial p_i}{\partial x} \in L_2(Q_T),$$

удовлетворяющих уравнениям (1.1)–(1.4) п.в. в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Сформулируем основные результаты статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть данные задачи (1.1)–(1.5) подчиняются следующим условиям:

- 1) функции $\mu(s), B(s), p_c(s), \chi(s)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s \in (0, 1)$ и удовлетворяют условиям

$$k_0^{-1} s^{q_1} (1-s)^{q_2} \leq \mu(s) \leq k_0 s^{q_3} (1-s)^{q_4},$$

$$k_0^{-1} s^{q_5} (1-s)^{q_6} \leq p_c(s) \leq k_0 s^{q_7} (1-s)^{q_8},$$

$$k_0^{-1} s^{q_9} (1-s)^{q_{10}} \leq B(s) \leq k_0 s^{q_{11}} (1-s)^{q_{12}},$$

$$k_0^{-1} s^{q_{13}} (1-s)^{q_{14}} \leq \chi(s) \leq k_0 s^{q_{15}} (1-s)^{q_{16}},$$

где $k_0 = \text{const} > 0$, $q_1, \dots, q_{16}$ – фиксированные вещественные параметры;

- 2) функция g и начальные функции $s^0, \theta^0, p^0, v_i^0$ удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$g \in C^{1+\alpha, \alpha/2}(\overline{Q_T}), \quad s^0 \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad v_1^0, v_2^0, \theta^0, p^0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$$

и условиям согласования

$$v_i^0|_{x=0, x=1} = \frac{d\theta^0}{dx} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{dp^0}{dx} \Big|_{x=0, x=1} = 0,$$

а также удовлетворяют неравенствам

$$0 < m_0 \leq s^0(x) \leq M_0 < 1, \quad 0 < m_1 \leq p^0(x), \quad \theta^0(x) \leq M_1 < \infty, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1.6)$$

где m_0, M_0, m_1, M_1 – известные положительные постоянные.

Тогда задача (1.1)–(1.5) имеет классическое локальное решение, т.е. существует значение t_0 такое, что

$$s(x, t) \in C^{1+\alpha}(Q_{t_0}), \quad v_i(x, t), p_i(x, t), \theta(x, t), \rho_2^0 \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_{t_0}), \quad i = 1, 2.$$

Более того,

$$0 < s(x, t) < 1, \quad p_2(x, t) > 0, \quad \theta(x, t) > 0, \quad \rho_2^0(x, t) > 0 \quad (x, t) \in Q_{t_0}.$$

Уточняя свойства заданных функций (см. [1]), приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\rho_2^0 = \text{const} > 0$ и данные подчиняются следующему условию:

- 1) функции $\mu(s), B(s), p_c(s), \chi(s)$ и их производные непрерывны для $s \in (0, 1)$ и удовлетворяют условиям

$$\mu(s) = \mu_0 s^{\alpha_1}, \quad \mu_0 = \text{const} > 0, \quad \alpha_1 \in (0, 1],$$

$$B(s) = B_0 \frac{s}{(1-s)^\beta}, \quad B_0 = \text{const} > 0, \quad \beta = \text{const} \geq 2,$$

$$p_c(s) = p_c^0 \frac{s}{(1-s)^\gamma}, \quad p_c^0 = \text{const} > 0, \quad 0 < \gamma = \text{const} < \beta,$$

$$\chi(s) = \chi^0(s) s^{q_{17}} (1-s)^{q_{18}}, \quad 0 < k_0^{-1} \leq \chi^0 \leq k_0 = \text{const},$$

где q_{17}, q_{18} – фиксированные вещественные параметры;

- 2) функция g и начальные функции s^0, θ^0, v_i^0 удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$g \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad s^0, v_i^0, \theta^0 \in W_2^1(\Omega),$$

условиям согласования

$$v_i^0|_{x=0, x=1} = \frac{d\theta^0}{dx} \Big|_{x=0, x=1} = 0$$

и дополнительно к (1.6) выполнено условие

$$\int_0^1 p_2(x, t) dx = 0.$$

Тогда для всех $t \in [0, T]$, $T < \infty$, существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.5), причем существуют числа $0 < m < M < 1$, $0 < m^{(1)} < M^{(1)} < \infty$ такие, что

$$m \leq s(x, t) \leq M, \quad m^{(1)} \leq \theta(x, t) \leq M^{(1)}, \quad (x, t) \in Q_T.$$

2. Локальная разрешимость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Системе уравнений (1.1)–(1.5) можно придать следующий вид:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(sv_1) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^0(1-s)) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2^0(1-s)v_2) = 0, \quad (2.2)$$

$$\rho_1^0 s \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x}(p_2 + sp_c(s)) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(s) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \rho_1^0 sg, \quad (2.3)$$

$$B(s)(v_2 - v_1) + (1-s) \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0, \quad p_1 = p_2 + p_c, \quad p_2 = R\rho_2^0 \theta, \quad (2.4)$$

$$c_1 \rho_1^0 s \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right). \quad (2.5)$$

При доказательстве теоремы 1 удобно использовать переменные Лагранжа [3; с. 47]. Пусть $y = y(\zeta, x, t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = u(y, \zeta), \quad y|_{\zeta=t} = x.$$

Положим $\xi = y(\zeta, x, t)|_{\zeta=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t . Тогда $s(\xi, t) = s^0(\xi)J(\xi, t)$, где $J(\xi, t) = \partial \xi / \partial x$ – якобиан перехода. Система уравнений (2.1)–(2.5) в новых переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{s^2}{s^0} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0, \\ \rho_1^0 \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{1}{s^0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{s\mu(s)}{s^0} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{s^0} \frac{\partial}{\partial \xi} (p_2 + sp_c(s)) + \rho_1^0 g, \\ B(s)(v_2 - v_1) + \frac{s(1-s)}{s^0} \frac{\partial p_2}{\partial \xi} &= 0, \quad p_1 = p_2 + p_c(s), \quad p_2 = R\rho_2^0 \theta, \\ c_1 \rho_1^0 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{s^0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{s}{s^0} \chi(s) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_2^0(1-s)) + \frac{s}{s^0} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho_2^0(1-s)v_2) - v_1 \frac{s}{s^0} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho_2^0(1-s)) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку

$$v_1 \frac{s}{s^0} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho_2^0(1-s)) = \frac{s}{s^0} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho_2^0(1-s)v_1) - \frac{s}{s^0} \rho_2^0(1-s) \frac{\partial v_1}{\partial \xi},$$

то последнее уравнение этой системы можно привести к виду

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial t}((1-s)\rho_2^0) + \frac{1}{s^0} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho_2^0(1-s)(v_2 - v_1)) + \frac{1}{s^0} \rho_2^0(1-s) \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0.$$

Используя уравнение неразрывности для первой фазы, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1-s}{s} \rho_2^0 \right) + \frac{1}{s^0} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho_2^0(1-s)(v_2 - v_1)) = 0.$$

Наконец, переходя от (ξ, t) к массовым лагранжевым переменным $(\bar{x}, t)$ по правилу

$$s^0(\xi)d\xi = d\bar{x}, \quad \bar{x}(\xi) = \int_0^\xi s^0(\eta)d\eta \in [0, 1]$$

и сохраняя затем для переменной $\bar{x}$ обозначение x , получим

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad (2.6)$$

$$\rho_1^0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(s)s \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (p_2 + sp_c(s)) + \rho_1^0 g, \quad (2.7)$$

$$c_1 \rho_1^0 \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(s\chi(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (a(s, \theta)p_2) = \frac{\partial}{\partial x} \left(b(s, \theta)p_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \right), \quad (2.9)$$

где

$$a(s, \theta) = \frac{1-s}{sR\theta}, \quad b(s, \theta) = \frac{(1-s)^2 s}{B(s)R\theta}.$$

Краевые и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} v_1|_{x=0, x=1} &= 0, & \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= 0, & \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= 0, \\ v_1|_{t=0} &= v_1^0(x), & p_2|_{t=0} &= p^0(x), & \theta|_{t=0} &= \theta^0(x), & s|_{t=0} &= s^0(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Разрешимость задачи (2.6)–(2.10) устанавливается с помощью теоремы Тихонова–Шаудера о неподвижной точке: если V – компактное выпуклое замкнутое множество банахова пространства B и оператор Λ отображает V в себя непрерывно в норме B , то на V имеется неподвижная точка [6; с. 227].

Положим

$$v(x, t) = v_1(x, t) - v_2^0(x), \quad p(x, t) = p_2(x, t) - p^0(x)$$

и представим уравнения (2.6), (2.7), (2.9) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v_1^0}{\partial x}, \quad (2.11)$$

$$\rho_1^0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(s)s \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(s)s \frac{\partial v_1^0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (p + p^0 + sp_c) + \rho_1^0 g, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (a(s, \theta)(p + p^0)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(b(s, \theta)(p + p^0) \frac{\partial (p + p^0)}{\partial x} \right). \quad (2.13)$$

Причем

$$v|_{t=0} = v|_{x=0, x=1} = 0, \quad p|_{t=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = 0.$$

В качестве банахова пространства выберем пространство $C^{2+\beta, 1+\beta/2}(\overline{Q}_{t_0})$, где β – любое число из отрезка $(0, \alpha)$, $\alpha \in [0, 1)$. Положим

$$V = \left\{ \bar{v}(x, t), \bar{p}(x, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}) \mid \right. \\ \left. \bar{v}|_{t=0} = \bar{v}|_{x=0, x=1} = 0, \bar{p}|_{t=0} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \right. \\ \left. 0 < \frac{m_1}{2} - p^0(x) \leq \bar{p}(x, t) \leq 2M_1 - p^0(x) < \infty, \right. \\ \left. |\bar{v}|_{1+\alpha, (1+\alpha)/2, Q_{t_0}}, |\bar{p}|_{1+\alpha, (1+\alpha)/2, Q_{t_0}} \leq K_1, \right. \\ \left. |\bar{v}|_{2+\alpha, (2+\alpha)/2, Q_{t_0}}, |\bar{p}|_{2+\alpha, (2+\alpha)/2, Q_{t_0}} \leq K_1 + K_2 \right\},$$

где K_1 – произвольная положительная постоянная, а положительная постоянная K_2 будет указана позже.

Построим оператор Λ , отображающий V в V . Пусть $\bar{v}, \bar{p} \in V$. Используя (2.11), определим функцию $s_0(x, t)$ равенством

$$\frac{1}{s_0(x, t)} = \frac{1}{s^0(x)} + t \frac{\partial v_1^0}{\partial x} + \int_0^t \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(x, \tau) d\tau. \quad (2.14)$$

Пусть

$$t_0 \leq t_1 = C_1^{-1} \min \left(\frac{1}{m_0}, \frac{1 - M_0}{M_0(1 + M_0)} \right), \quad C_1 = \left(K_1 + \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{\partial v_1^0(x)}{\partial x} \right| \right).$$

Тогда из (2.14) следует

$$0 < \frac{m_0}{2} \leq s_0(x, t) \leq \frac{M_0 + 1}{2} < 1, \quad (x, t) \in Q_{t_0}. \quad (2.15)$$

Из (2.14) также имеем

$$|s_0|_{\alpha, Q_{t_0}} \leq C_2(T, |s^0|_{\alpha, \Omega}, |\bar{v}|_{1+\alpha, (1+\alpha)/2, Q_{t_0}}, |v_1^0|_{1+\alpha, \Omega}), \quad (2.16)$$

$$|s_{0x}|_{\alpha, Q_{t_0}} \leq C_3(K_1)(1 + a_0|\bar{v}_{xx}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}}), \quad (2.17)$$

$$|s_{0t}|_{\alpha, Q_{t_0}} \leq C_4(m_0, M_0)|\bar{v}_x|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}}. \quad (2.18)$$

Используя (2.8), $\bar{v}(x, t)$ и $s_0(x, t)$, найдем функцию $\theta_0(x, t)$ как решение задачи (здесь и далее предполагается, что начальные и граничные условия согласованы):

$$c_1 \rho_1^0 \frac{\partial \theta_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(s_0 \chi(s_0) \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad \theta_0(x, t)|_{t=0} = \theta^0(x). \quad (2.19)$$

Из теории линейных равномерно параболических уравнений следует, что для фиксированной функции $s_0(x, t) \in C^{1+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_{t_0})$ существует единственное решение задачи (2.19), причем верны оценки [5; гл. 7]

$$0 < m_1 \leq \min_{0 \leq x \leq 1} \theta^0(x) \leq \theta_0(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \theta^0(x) \leq M_1,$$

$$|\theta_0|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} \leq C_5, \quad |\theta_0|_{1+\alpha, 1+\alpha/2, Q_{t_0}} \leq C_6(|\theta_0|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} + |\theta_{0x}s_{0x}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}}),$$

где постоянные C_5 , C_6 зависят от m_0 , M_0 и не зависят от K_2 . Используя далее интерполяционные неравенства Ниренберга–Гальярдо [3; с. 35] вида

$$\begin{aligned} |u_x|_{0, Q_t} &\leq C |u|_{2+\alpha, 1+\alpha/2, Q_t}^a |u|_{\alpha, \alpha/2, Q_t}^{1-a}, & a &= (3+2\alpha)^{-1}, \\ |u_x|_{\alpha, \alpha/3, Q_t} &\leq C |u|_{2+\alpha, 2+\alpha/2, Q_t}^b |u|_{\alpha, \alpha/2, Q_t}^{2-b}, & b &= (1+2\alpha)(6+2\alpha)^{-1}, \end{aligned}$$

и учитывая оценки (2.15)–(2.18), окончательно получим

$$|\theta_0|_{2+\alpha, 1+\alpha/2, Q_{t_0}} \leq C_7(m_0, M_0, K_1)(1+t^q |\bar{v}_{xx}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}}^q), \quad q = 3+2\alpha. \quad (2.20)$$

Используя (2.13), $\bar{v}(x, l)$, $\bar{p}(x, t)$, $s_0(x, t)$ и $\theta_0(x, t)$ найдем функцию $p(x, t)$ как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(a(s_0, \theta_0)(p+p^0)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(b(s_0, \theta_0)(\bar{p}+p^0) \frac{\partial(p+p^0)}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= p|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Уравнение для $p(x, t)$ является равномерно параболическим. С учетом свойств $s_0(x, t)$, $\theta_0(x, t)$ и $p^0(x)$ задача (2.21) имеет классическое решение. Кроме того, в силу (2.18), (2.20) имеем следующую оценку:

$$\left| \frac{1}{a(s_0, \theta_0)} \frac{\partial a(s_0, \theta_0)}{\partial t} \right| \leq C_8(m_0, M_0, m_1, M_1, K_1)(1+t_0^q(K_1+K_2)^q).$$

При дополнительном условии малости на величину t_0 справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. При $t_0 \leq \min(t_1, t_2)$, $t_2 = \ln 2 / (C_8(1+T_0^q(K_1+K_2)^q))$ классическое решение задачи (2.21) удовлетворяет в Q_{t_0} неравенству

$$0 < \frac{m_1}{2} \leq p(x, t) + p^0(x) \leq 2M_1 < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая

$$U(x, t) = p(x, t) + p^0(x), \quad U_0(x, t) = \bar{p}(x, t) + p^0(x),$$

задачу (2.21) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(a(s_0, \theta_0)U) = \frac{\partial}{\partial x} \left(b(s_0, \theta_0)U_0 \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad U|_{t=0} = p^0(x). \quad (2.22)$$

Сначала покажем, что $U(x, t) \geq 0$, $(x, t) \in Q_{t_0}$. В уравнении (2.22) сделаем замену $U(x, t) = -z(x, t)$. Тогда

$$z \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(bU_0 \frac{\partial z}{\partial t} \right).$$

Положим

$$z^{(0)}(x, t) = \max\{z, 0\}, \quad z^{(0)}(x, t)|_{t=0} = \max\{-p^0, 0\} = 0, \\ \sigma_\varepsilon(x, t) = z^{(0)}(x, t)(|z^{(0)}(x, t)|^2 + \varepsilon)^{-1/2}.$$

Уравнение для функции z умножим на σ_ε и результат проинтегрируем по Ω . Получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 a(|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{1/2} dx + \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} (z\sigma_\varepsilon - (|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{1/2}) dx \\ + \varepsilon \int_0^1 p_0 b \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z^{(0)}}{\partial x} (|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{-3/2} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Положим

$$A^+(t) = \{x \in \Omega \mid z(x, t) > 0\}, \quad A^-(t) = \{x \in \Omega \mid z(x, t) \leq 0\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} (z\sigma_\varepsilon - (|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{1/2}) dx &= -\varepsilon \int_{A^+(t)} \frac{\partial a}{\partial t} (|z|^2 + \varepsilon)^{-1/2} dx - \varepsilon^{1/2} \int_{A^-(t)} \frac{\partial a}{\partial t} dx, \\ \int_0^1 a(|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{1/2} dx &= \int_{A^+(t)} a(|z|^2 + \varepsilon)^{1/2} dx + \varepsilon^{1/2} \int_{A^-(t)} a dx, \\ \int_0^1 a(|z^{(0)}|^2 + \varepsilon)^{1/2}|_{t=0} dx &= \varepsilon^{1/2} \int_0^1 a|_{t=0} dx, \\ \int_{A^+(t)} a(|z|^2 + \varepsilon)^{1/2} dx &\geq \int_{A^+(t)} a|z| dx = \int_0^1 a z^{(0)} dx. \end{aligned}$$

Проинтегрировав равенство (2.23) по времени, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 a(|z|^2 + \varepsilon)^{1/2} dx + \varepsilon^{1/2} \int_0^1 a dx + \varepsilon \int_0^t \int_{A^+(\tau)} p_0 b \left| \frac{\partial z^{(0)}}{\partial x} \right|^2 dx d\tau \\ = \varepsilon \int_0^t \int_{A^+(\tau)} \frac{\partial a}{\partial \tau} (|z|^2 + \varepsilon)^{-1/2} dx d\tau + \varepsilon^{1/2} \int_{A^-(\tau)} \frac{\partial a}{\partial \tau} dx d\tau + \varepsilon^{1/2} \int_0^1 a|_{t=0} dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq x \leq 1} a \int_0^1 z^{(0)} dx &\leq \int_0^1 a z^{(0)} dx \\ &\leq \varepsilon^{1/2} \int_{A^-(t)} a dx + \varepsilon^{1/2} \int_0^t \int_0^1 \left| \frac{\partial a}{\partial \tau} \right| dx d\tau + \varepsilon^{1/2} \int_0^1 a|_{t=0} dx. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что $z^{(0)} = 0$, т.е. $U \geq 0$.

Уравнение (2.22) после умножения на $U^l(x, t)$, $l > 1$, можно представить в виде

$$\frac{1}{l} \frac{\partial(aU^l)}{\partial t} + (l-1)bU_0U^{l-2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{l-1}{l} U^l \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(bU_0U^{l-1} \frac{\partial U}{\partial x} \right).$$

Тогда

$$\frac{1}{l} \frac{d}{dt} \int_0^1 a U^l dx \leq \frac{l-1}{l} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right| \int_0^1 a U^l dx.$$

Следовательно,

$$y'(t) \leq \frac{l-1}{l} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right| y(t), \quad y^l(t) = \int_0^1 (a^{1/l} p)^l dx$$

и

$$y(t) \leq y(0) \exp \left\{ \frac{l-1}{l} \int_0^t \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right| d\tau \right\}.$$

После предельного перехода при $l \rightarrow \infty$, получим

$$\max_{0 \leq x \leq 1} U(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} p^0(x) \exp \left\{ \int_0^t \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right| d\tau \right\}.$$

Учитывая, что $\max_{0 \leq x \leq 1} p^0(x) \leq M_1$ и выбирая t из условия

$$t \leq t_2, \quad \exp \left\{ \int_0^{t_2} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right| d\tau \right\} \leq 2,$$

приходим к утверждению леммы об оценке сверху. Для получения оценки снизу уравнение (2.22) представим в виде $(z(x, t) = 1/U(x, t))$

$$\frac{1}{l} \frac{\partial (az^l)}{\partial t} + (l+1)bU_0 z^{l-2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \frac{l+1}{l} z^l \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(bU_0 z^{l-1} \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Откуда сначала получим неравенство

$$\frac{1}{l} \frac{d}{dt} \int_0^1 az^l dx \leq \frac{l+1}{l} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right| \int_0^1 az^l dx,$$

а затем и оценку

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \frac{1}{U(x, t)} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{1}{p^0(x)} \exp \left\{ \int_0^t \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right| d\tau \right\} \leq \frac{2}{m_1}.$$

Лемма 1 доказана.

С учетом леммы 1 имеем следующие оценки [5; гл. 7]:

$$\begin{aligned} |p|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} &\leq C_9, \\ |p|_{2+\alpha, 1+\alpha/2, Q_{t_0}} &\leq C_9 \left(1 + |p^0|_{2+\alpha, \Omega} + |\theta_{0x} p_x|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} + |\theta_{0t}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} \right. \\ &\quad \left. + |p_x s_{0x}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} + |\theta_{0x}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} + |s_{0x}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} \right), \end{aligned}$$

в которых постоянная C_9 зависит от m_0, M_0, m_1, M_1, K_1 . Используя (2.20), получим

$$|p|_{2+\alpha, 1+\alpha/2, Q_{t_0}} \leq C_{10}(K_1)(1 + t_0^q |\bar{v}_{xx}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}}^q), \quad q = 3 + 2\alpha.$$

Наконец, используя (2.12), $\bar{v}(x, t)$, $\bar{p}(x, t)$ и $s_0(x, t)$, найдем функцию $v(x, t)$ как решение задачи

$$\rho_1^0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(s_0) s_0 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(s_0) s_0 \frac{\partial v_1^0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p^0 + s_0 p_c(s_0)) + \rho_1^0 g, \quad (2.24)$$

$$v|_{x=0, x=1} = 0, \quad v|_{t=0} = 0.$$

Единственное решение задачи (2.24) удовлетворяет оценкам [5; гл. 7]

$$|v|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} \leq C_{11},$$

$$|v|_{2+\alpha, 1+\alpha/2, Q_{t_0}} \leq C_{11} (1 + |v^0|_{2+\alpha, \Omega} + |g|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} + |s_{0x}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}} + |v_x s_{0x}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}}),$$

в которой постоянная C_{11} зависит от m_0 , M_0 , m_1 , M_1 , K_1 . Следовательно,

$$|v|_{2+\alpha, 1+\alpha/2, Q_{t_0}} \leq C_{12}(K_1)(1 + t^q |\bar{v}_{xx}|_{\alpha, \alpha/2, Q_{t_0}}^q), \quad q = 3 + 2\alpha.$$

Без ограничения общности можно считать, что $C_{10} < C_{12}$. Выберем K_2 таким образом, чтобы $C_{12} \leq (K_1 + K_2)/2$. Тогда при $t_0 < \min(t_1, t_2, (K_1 + K_2)^{-1})$ получим

$$|p|_{2+\alpha, 1+\alpha/2, Q_{t_0}} \leq K_1 + K_2, \quad |v|_{2+\alpha, 1+\alpha/2, Q_{t_0}} \leq K_1 + K_2,$$

т.е. остается проверить условия

$$|p|_{1+\alpha, (1+\alpha)/2, Q_{t_0}} \leq K_1, \quad |v|_{1+\alpha, (1+\alpha)/2, Q_{t_0}} \leq K_1.$$

Интегрируя уравнения (2.21), (2.24) по времени, получим

$$|p|_{0, Q_{t_0}} \leq C_{13} t_0, \quad |v|_{0, Q_{t_0}} \leq C_{14} t_0.$$

Затем, используя неравенство вида [3; с. 35]

$$|v|_{1+\alpha, (1+\alpha)/2, Q_{t_0}} \leq C |v|_{2+\alpha, 1+\alpha/2, Q_{t_0}}^c |v|_{0, Q_{t_0}}^{1-c}, \quad c = (1 + \alpha)(2 + \alpha)^{-1},$$

выводим, что существует достаточно малое значение t_0 , зависящее от K_1 и K_2 , такое, что справедливы искомые оценки

$$|p|_{1+\alpha, (1+\alpha)/2, Q_{t_0}} \leq K_1, \quad |v|_{1+\alpha, (1+\alpha)/2, Q_{t_0}} \leq K_1.$$

Таким образом, оператор Λ отображает множество V в себя при достаточно малых t_0 . Используя полученные выше оценки, легко показать непрерывность оператора Λ в норме пространства $C^{2+\beta, 1+\beta/2}(\bar{Q}_{t_0})$. Согласно теореме Тихонова–Шаудера существует неподвижная точка $(v, p) \in V$ оператора Λ . Единственность решения доказывается стандартным образом [3; с. 74]. Теорема 1 доказана.

3. Случай несжимаемых сред.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В случае $\rho_i^0 = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$, из уравнений неразрывности (2.1), (2.2) имеем равенство $sv_1 + (1 - s)v_2 = 0$. Полагая $v_1 \equiv u$,

получим $v_2 = su/(1-s)$, $v_2 - v_1 = -u/(1-s)$. Система уравнений (2.1)–(2.5) принимает вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(su) = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho_1^0 s \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{B(s)u}{(1-s)^2} - \frac{\partial(sp_c)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho_1^0 sg, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{B(s)u}{(1-s)^2}, \quad p_1 = p_2 + p_c, \quad (3.3)$$

$$c_1 \rho_1^0 s \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right). \quad (3.4)$$

В системе (3.1)–(3.4) основными являются уравнения (3.1) и (3.2). После нахождения s и u , давления p_1 и p_2 определяются из (3.3) (дополнительное условие для однозначного определения p_2 можно взять в виде $\int_0^1 p_2(x, t) dx = 0$), а температура – из (3.4) при условиях $\partial\theta/\partial x|_{x=0, x=1} = 0$, $\theta|_{t=0} = \theta^0$. Поэтому в дальнейшем основное внимание уделяется системе (3.1), (3.2) при условиях

$$u|_{x=0, x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = u^0(x), \quad s|_{t=0} = s^0(x). \quad (3.5)$$

Обобщенным решением задачи (3.1), (3.2), (3.5) будем называть совокупность функций s , u таких, что

$$\begin{aligned} s &\in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial s}{\partial t} \in L_2(Q_T), \\ u &\in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T), \end{aligned}$$

удовлетворяющих уравнениям (3.1), (3.2) п.в. в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Теорема существования на малом промежутке времени $[0, t_0]$ и теорема единственности обобщенного решения доказывается с минимальными изменениями так же, как в книге [3; гл. 2] для системы вязкого теплопроводного газа. Поэтому будем считать, что на промежутке $[0, t_0]$ существует обобщенное решение задачи (3.1), (3.2), (3.5), причем $0 < s(x, t) < 1$, $x \in \Omega$, $t \in [0, t_0]$. После получения необходимых априорных оценок, не зависящих от величины t_0 , локальное решение можно продолжить на весь отрезок $[0, T]$. Основными являются оценки снизу и сверху для концентрации $s(x, t)$. Оценка $s(x, t) \leq M < 1$ вытекает из первых априорных оценок и свойств функции $B(s)$, имеющей при $s = 1$ особенность нужного порядка. Оценка $0 < m \leq s(x, t)$ доказывается на основе принципа максимума для $u(x, t)$ и использует ограниченность функций $B(s)/s$, $\mu(s)/s$ при $s(x, t) < 1$.

Система уравнений (3.1), (3.2) в массовых переменных Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.6)$$

$$\rho_1^0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(s) s \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial(sp_c(s))}{\partial x} - \frac{B(s)u}{s(1-s)^2} + \rho_1^0 g. \quad (3.7)$$

ЛЕММА 2. При выполнении условий теоремы 2 для всех $t \in [0, T]$ имеют место соотношения

$$\int_0^1 \frac{dx}{s(x, t)} = \int_0^1 \frac{dx}{s^0(x)}, \quad (3.8)$$

а также

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(u^2 + \left(\frac{\mu(s)}{s} \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{(1-s)^\beta} \right) dx \\ & + \int_0^t \int_0^1 \left(\mu(s)s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{B(s)u^2}{s(1-s)^2} + \frac{\mu(s)}{s} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial(sp_c(s))}{\partial s} \right) dx d\tau \\ & \leq C_{15} \left(1 + \int_0^1 \left((u^0)^2 + \frac{1}{(1-s^0)^\beta} + \left(\frac{\mu(s^0)}{s^0} \frac{\partial s^0}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \int_0^T \int_0^1 g^2 dx dt \right) \equiv N_1, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где постоянная C_{15} зависит от ρ_1^0 , β , μ_0 , B_0 , p_c^0 , γ , T и не зависит от t_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.8) следует из уравнения (3.6). Пусть функция $a(s)$ удовлетворяет равенству $a'(s) \equiv da(s)/ds = p_c(s)/s$. Умножая уравнение (3.7) на $u(x, t)$ и используя (3.6), стандартным образом получим [3; гл. 2]

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\frac{\rho_1^0}{2} u^2 + a(s) \right) dx + \int_0^1 \left(\mu(s)s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{B(s)u^2}{s(1-s)^2} \right) dx = \rho_1^0 \int_0^1 gu dx. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.7) представим в виде

$$\rho_1^0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial(sp_c(s))}{\partial x} - \frac{B(s)u}{s(1-s)^2} + \rho_1^0 g, \quad z(x, t) = \frac{\mu(s)}{s} \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (3.11)$$

Умножая (3.11) на $z(x, t)$ и интегрируя, выводим

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} z^2 + \rho_1^0 uz \right) dx + \int_0^1 z \frac{\partial(sp_c(s))}{\partial x} dx = \int_0^1 \rho_1^0 \mu(s)s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \rho_1^0 \int_0^1 gz dx - I, \quad (3.12)$$

где

$$I = \int_0^1 uz \frac{B(s)}{s(1-s)^2} dx = \frac{d}{dt} \int_0^1 G(s) dx$$

и функция $G(s)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{dG(s)}{ds} \right) = \frac{\mu(s)B(s)}{s^2(1-s)^2}.$$

Из последнего равенства с учетом предположений теоремы 2 выводим, что существуют такие постоянные $A_1(\beta, B_0, \mu_0)$, $A_2(\beta, B_0, \mu_0)$ и $A_3(\beta, B_0, \mu_0) > 0$, что справедлива оценка

$$G(s) \geq A_1 - A_2 \frac{1}{s} + A_3 \frac{1}{(1-s)^\beta}.$$

Равенство (3.10) умножим на $2\rho_1^0$ и результат сложим с равенством (3.12). Учитывая, что

$$(sp_c(s))' \geq 0, \quad (\rho_1^0 u)^2 + \frac{1}{2} z^2 + \rho_1^0 u z \geq \frac{1}{4} (\rho_1^0 u)^2 + \frac{1}{6} z^2,$$

$$2\rho_1^0 |a(s)| \leq \frac{1}{2} A_3 \frac{1}{(1-s)^\beta} + A_4, \quad A_4 = \text{const},$$

приходим к (3.9). Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существует ограниченная измеримая функция $a(t) \in [0, 1]$ такая, что $s(a(t), t) = s^0(a(t))$, $t \in [0, T]$ [3; с. 50]. Поэтому из (3.8), (3.9) имеем

$$\left| \ln \frac{1-s(x, t)}{1-s^0(a(t))} \right| \leq \left(\int_0^1 z^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left(\frac{s}{\mu(s)(1-s)} \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{N_1}{\mu_0} \equiv N_2,$$

т.е. $s(x, t) \leq M < 1$, $M = 1 - (1 - m_0)e^{-N_2}$.

Оценим концентрацию $s(x, t)$ сверху. Поскольку $s(x, t) \leq M < 1$, в силу условий теоремы 2 функции $B(s)/s(1-s)^2$, $(sp_c(s))'$ и $r(s) \equiv (s/\mu(s))(sp_c(s))'$ оцениваются некоторой постоянной N_3 , зависящей только от ρ_1^0 , β , μ_0 , B_0 , p_c^0 , γ , T и не зависящей от t_0 .

Уравнение (3.11) представим в виде

$$-\rho_1^0 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{B(s)u}{s(1-s)^2} + \rho_1^0 g = \frac{\partial z}{\partial t} + r(s)z = e^{-\varphi(x, t)} \frac{\partial}{\partial t} (z \cdot e^{\varphi(x, t)}),$$

$$\varphi(x, t) = \int_0^t r(s(x, y)) dy.$$

Откуда $(z^0(x) \equiv z(x, 0))$

$$z(x, t) = \left(\rho_1^0 u^0(x) + z^0(x) + \rho_1^0 \int_0^t g e^{\varphi(x, \tau)} d\tau \right) e^{-\varphi(x, t)} - \rho_1^0 u(x, t)$$

$$+ e^{-\varphi(x, t)} \int_0^t \left(\rho_1^0 r(s(x, \tau)) - \frac{B(s(x, \tau))}{s(x, \tau)(1-s(x, \tau))^2} \right) u(x, \tau) e^{\varphi(x, \tau)} d\tau$$

и, следовательно,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |z(x, t)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |\rho_1^0 u^0(x) + z^0(x)| + \rho_1^0 \int_0^T \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x, t)| dt$$

$$+ N_4 \left(\max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| + \int_0^t \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, \tau)| d\tau \right), \quad (3.13)$$

где $N_4 = \max\{\rho_1^0, \rho_1^0 N_3, N_3\}$.

ЛЕММА 3. При выполнении условий теоремы 2 для всех $t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| \leq N \left(\max_{0 \leq x \leq 1} |u^0(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |z^0(x)| + \int_0^T \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x, t)| dt \right), \quad (3.14)$$

зде

$$N = e^{(1+N_5)T}, \quad N_5 = \max \left\{ 1, N_3 T, N_3, \frac{N_3 T}{\rho_1^0}, \frac{N_3 N_4}{\rho_1^0} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая уравнение (3.7) на u^{2m-1} и интегрируя, с учетом неравенства Гёльдера получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1^0}{2m} \frac{d}{dt} \int_0^1 u^{2m} dx + (2m-1) \int_0^1 \mu(s) u^{2m-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^1 \frac{B(s) u^{2m}}{s(1-s)^2} dx \\ & \leq \left(\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial(sp_c)}{\partial x} \right)^{2m} dx \right)^{1/2m} + \rho_1^0 \left(\int_0^1 g^{2m} dx \right)^{1/2m} \right) \left(\int_0^1 u^{2m} dx \right)^{(2m-1)/2m}. \end{aligned}$$

Откуда следует

$$\|u\|_{2m, \Omega} \leq \|u^0\|_{2m, \Omega} + \frac{1}{\rho_1^0} \int_0^t \left\| \frac{\partial(sp_c)}{\partial x} \right\|_{2m, \Omega} d\tau + \int_0^t \|g\|_{2m, \Omega} d\tau.$$

После предельного перехода при $m \rightarrow \infty$ приходим к неравенству

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u^0(x)| + \frac{1}{\rho_1^0} \int_0^t \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{\partial(sp_c)}{\partial x} \right| d\tau + \int_0^t \max_{0 \leq x \leq 1} |g| d\tau. \quad (3.15)$$

Поскольку $\max_{0 \leq x \leq 1} |\partial(sp_c)/\partial x| \leq N_3 \max_{0 \leq x \leq 1} |z(x, t)|$, в силу (3.13) и (3.15) имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| & \leq N_4 \left(\max_{0 \leq x \leq 1} |u^0(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |z^0(x)| + \int_0^T \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x, t)| dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, \tau)| d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, y)| dy d\tau \right). \end{aligned}$$

Положим

$$v(t) = \int_0^t \int_0^\tau \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, y)| dy d\tau, \quad v'(t) \equiv \frac{dv(t)}{dt}, \quad v(0) = v'(0) = 0.$$

Тогда неравенство для $\max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)|$ принимает вид

$$v''(t) \leq N_5(\delta + v'(t) + v(t)), \quad \delta = \max_{0 \leq x \leq 1} |u^0(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |z^0(x)| + \int_0^T \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x, t)| dt.$$

Умножив это неравенство на e^t и проинтегрировав по времени от 0 до текущего значения t , получим, что $v'(t) \leq N_5 \delta + (1 + N_5)v(t)$. Откуда следует

$$v(t) \leq \frac{N_5 \delta}{1 + N_5} (e^{(1+N_5)t} - 1),$$

т.е. приходим к неравенству (3.14). Лемма 3 доказана.

Из (3.13), (3.14) получим, что $\max_{0 \leq x \leq 1} |z(x, t)| \leq N_6(N, T)$. Поэтому

$$\left| \ln \frac{s(x, t)}{s^0(a(t))} \right| \leq \int_0^1 \frac{|z|}{\mu(s)} dx \leq \max_{(x, t) \in \bar{Q}_T} |z(x, t)| \int_0^1 \frac{dx}{\mu} \leq \frac{N_6}{\mu_0} \int_0^1 \frac{dx}{s^0(x)} = N_7$$

и, следовательно, $s(x, t) \geq m > 0$, $m = m_0 e^{-N_7}$. Таким образом, $0 < m \leq s(x, t) \leq M < 1$, т.е. уравнение (3.2) является равномерно параболическим. Проверка остальных утверждений теоремы 2 становится стандартной [3; гл. 2], [5; гл. 5]. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. K. Garg, J. W. Pritchett, “Dynamics of gas-fluidized beds”, *J. Appl. Phys.*, **46**:10 (1975), 4493–4500.
- [2] M. Göz, “Existence and uniqueness of time-dependent spatially periodic solutions of fluidized bed equations”, *Z. Angew. Math. Mech.*, **71**:6 (1991), T750–T751.
- [3] С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов, *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Новосибирск, Изд-во «Наука», Сиб. отд., 1983.
- [4] Я. И. Канель, “Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа”, *Дифферен. уравнения*, **4**:4 (1968), 721–734.
- [5] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М., Наука, 1967.
- [6] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, М., Мир, 1969.

А. А. Папин

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

E-mail: papin@ab.ru

Поступило

17.02.2009

Исправленный вариант

14.06.2009

И. Г. Ахмерова

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

E-mail: iakhmerova@mail.ru