Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Шабозов, Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 616–623

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:23:01

УДК 517.5

Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$

М. Ш. Шабозов

В работе найдены точные значения различных n -поперечников для классов дифференцируемых периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$, удовлетворяющих ограничению

$$\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/p} \leq \Phi(h),$$

где $0 < h < \infty$, $1/r < p \leq 2$, $r \in \mathbb{N}$, а $\omega_m(f^{(r)}; t)$ – модуль непрерывности m -го порядка производной $f^{(r)}(x) \in L_2[0, 2\pi]$.

Библиография: 16 названий.

1. Обозначим через $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ пространство 2π -периодических суммируемых по Лебегу действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть

$$\mathfrak{S}_{n-1} = \left\{ T_{n-1}(x) : T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\}$$

– подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$. Общеизвестно, что для произвольной функции $f(x) \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathfrak{S}_{n-1}$ равна

$$E_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathfrak{S}_{n-1} \} = \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

– частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_k^2 \stackrel{\text{def}}{=} a_k^2 + b_k^2$.

Через L_2^r , $r \in \mathbb{N}$, обозначим множество функций $f(x) \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а $f^{(r)}(x) \in L_2$. Символом $\Delta_m(f; h)$ обозначим норму конечной разности m -го порядка функции $f(x) \in L_2$ с шагом h :

$$\Delta_m(f; h) = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + kh) \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

и равенством

$$\omega_m(f; t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \Delta_m(f; h) : |h| \leq t \}$$

определим модуль непрерывности m -го порядка функции $f(x) \in L_2$.

Ниже в п. 2 при вычислении n -поперечников на классах функций структурные свойства функции $f(x) \in L_2$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности r -й производной $f^{(r)}(x)$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усредненной величины $\omega_m(f^{(r)}; t)$. В данном сообщении рассматривается экстремальная аппроксимационная характеристика вида

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \sup \left\{ \frac{2^m n^r E_n(f)}{(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t) dt)^{1/p}} : f(t) \in L_2^r, f^{(r)}(t) \neq \text{const} \right\}, \quad (2)$$

где $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$. Здесь и далее отношение $0/0$ полагается равным нулю.

Отметим, что величины вида (2) при различных значениях указанных параметров изучались в работах [1]–[14]. В частности, Тайков [3] показал, что

$$\chi_{1,n,r,2}(h) = \left\{ \frac{2n}{nh - \sin nh} \right\}^{1/2}, \quad 0 < nh \leq \frac{\pi}{2}.$$

Вакарчук [11], обобщая результат Тайкова [3], доказал, что

$$\chi_{m,n,r,2/m}(h) = \left\{ \frac{2n}{nh - \sin nh} \right\}^{m/2}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 0 < nh \leq \frac{\pi}{2}.$$

Целью данного сообщения является распространение результатов работы Вакарчука [11] на более общий случай и использование полученных результатов для вычисления точных значений различных n -поперечников.

ТЕОРЕМА 1. Для произвольных $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$ справедливо равенство

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \left\{ \int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенством [15; с. 32]

$$\left(\int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^h |f_k(t)|^p dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}, \quad 0 < p \leq 2,$$

и, имея в виду, что для произвольной $f(x) \in L_2^r$ имеет место соотношение

$$\omega_m^2(f^{(r)}; t) = 2^m \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \cos ku)^m : |u| \leq t \right\},$$

получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/p} &\geq \left(\int_0^h \left\{ 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \cos kt)^m \right\}^{p/2} dt \right)^{1/p} \\ &\geq 2^{m/2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \left\{ k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} dt \right\}^{2/p} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция

$$\varphi(y) = y^{rp} \int_0^h (1 - \cos yt)^{mp/2} dt$$

возрастает по $y > 0$, поскольку при $rp > 1$, $r \in \mathbb{N}$, ее производная

$$\varphi'(y) = y^{rp-1} \left\{ h(1 - \cos hy)^{mp/2} + (rp - 1) \int_0^h (1 - \cos yt)^{mp/2} dt \right\} > 0.$$

Таким образом,

$$\min\{\varphi(k) : k \geq n\} = \varphi(n) = n^{rp} \int_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} dt.$$

С учетом последнего соотношения и (1) продолжим неравенство (4):

$$\begin{aligned} \dots &\geq 2^{m/2} n^r \left(\int_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} dt \right)^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2} \\ &= 2^m n^r \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right)^{1/p} E_n(f). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$E_n(f) \leq 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/p} \left(\int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p}. \quad (5)$$

Из (5) сразу следует, что

$$\chi_{m,n,r,p}(h) \leq \left\{ \int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}. \quad (6)$$

Чтобы установить равенство (3), достаточно рассмотреть функцию

$$f_0(x) = \cos nx \in L_2,$$

воспользоваться определением (2) величины $\chi_{m,n,r,p}(h)$, а также легко проверяемыми соотношениями

$$E_n(f_0) = 1, \quad \omega_m(f_0^{(r)}; t) = 2^m n^r \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^m, \quad 0 < nt \leq \pi.$$

В самом деле, имеем

$$\chi_{m,n,r,p}(h) \geq \frac{2^m n^r E_n(f_0)}{(\int_0^h \omega_m^p(f_0^{(r)}; t) dt)^{1/p}} = \left\{ \int_0^h \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right\}^{-1/p}. \quad (7)$$

Утверждение теоремы 1 следует из сопоставления (6) и (7).

2. Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем.

Пусть S – единичный шар в L_2 , $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 , $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n , $\mathcal{L}: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n , $\mathcal{L}^\perp: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространство Λ_n . Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \}, \\ d_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\| : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ d^n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \}, \\ \pi_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \} \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n -поперечниками*. Поскольку L_2 является гильбертовым пространством, то справедливы следующие соотношения между перечисленными n -поперечниками (см., например, [15], [16]):

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (8)$$

Пусть $\Phi(u)$ – произвольная непрерывная возрастающая при $u \geq 0$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W(\Phi) := W(r, m, p, \Phi)$ обозначим класс функций $f(x) \in L_2^r$, которые для любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$ и $0 < h \leq \pi/n$ удовлетворяют ограничению

$$\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/p} \leq \Phi(h).$$

Поставим целью вычислить вышеуказанные n -поперечники при некоторых ограничениях на мажоранту $\Phi(u)$. Введем обозначение

$$(\sin t)_* = \begin{cases} \sin t, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Если для всех $\mu > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $0 < u \leq \pi$, $1/r < p \leq 2$ функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условию

$$\Phi^p(u) \int_0^{\mu\pi} \left(\sin \frac{v}{2} \right)_*^{mp} dv \leq \Phi^p(\mu u) \int_0^\pi \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{mp} dv, \quad (9)$$

то для любого натурального n справедливы равенства

$$\rho_{2n-1}(W(\Phi), L_2) = \rho_{2n}(W(\Phi), L_2) = 2^{-m-1/p} \cdot n^{-r+1/p} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{mp} t \, dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\rho_k(\cdot)$ – любой из k -поперечников: колмогоровский $d_k(\cdot)$, бернштейновский $b_k(\cdot)$, линейный $\delta_k(\cdot)$, гельфандовский $d^k(\cdot)$, проекционный $\pi_k(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношения (6), запишем оценку сверху рассматриваемых n -поперечников, полагая в неравенстве (5) $h = \pi/n$:

$$\begin{aligned} \rho_{2n-1}(W(\Phi), L_2) &\leq d_{2n-1}(W(\Phi), L_2) \leq \sup\{E_n(f) : f \in W(\Phi)\} \\ &\leq 2^{-m} n^{-r} \left(\int_0^{\pi/n} \sin^{mp} \frac{nt}{2} \, dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ &= 2^{-m-1/p} \cdot n^{-r+1/p} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{mp} t \, dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

С целью получения оценки снизу бернштейновского n -поперечника класса $W(\Phi)$ вводим в рассмотрение $(2n+1)$ -мерную сферу полиномов

$$\sigma_{2n+1} = \left\{ T_n(x) : \|T_n\| = 2^{-m-1/p} \cdot n^{-r+1/p} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{mp} t \, dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и докажем, что $\sigma_{2n+1} \subset W(\Phi)$. В [5] доказано, что для произвольного полинома $T_n(x) \in \sigma_{2n+1}$ имеет место неравенство

$$\omega_m(T_n^{(r)}; t) \leq 2^m n^r \left(\sin \frac{nt}{2} \right)_*^m \|T_n\|. \quad (11)$$

Обе части неравенства (11) возведем в степень p ($1/r < p \leq 2$) и проинтегрируем полученное соотношение по t в пределах от 0 до μu . Затем в интеграле, расположенном в правой части неравенства, произведем замену переменной $nt = v$, а также заменим норму полинома $T_n(x) \in \sigma_{2n+1}$ ее значением:

$$\begin{aligned} \int_0^{\mu u} \omega_m^p(T_n^{(r)}; t) \, dt &\leq \Phi^p(\pi/n) \int_0^{\mu u} \left(\sin \frac{nt}{2} \right)_*^{mp} \, dt \left\{ \int_0^{\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2} \right)_*^{mp} \, dt \right\}^{-1} \\ &= \Phi^p(\pi/n) \int_0^{\mu u} \left(\sin \frac{v}{2} \right)_*^{mp} \, dv \left\{ \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{v}{2} \right)_*^{mp} \, dv \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Введя обозначение $u = \pi/n$ в правой части неравенства (12) и используя условие (9), приходим к неравенству

$$\int_0^{\mu u} \omega_m^p(T_n^{(r)}; t) \, dt \leq \frac{\Phi^p(u) \int_0^{\mu\pi} (\sin(v/2))_*^{mp} \, dv}{\int_0^{\pi} (\sin(v/2))_*^{mp} \, dv} \leq \Phi^p(\mu u).$$

Отсюда следует включение $\sigma_{2n+1} \subset W(\Phi)$. Используя неравенства (8) и определение бернштейновского n -поперечника, запишем оценку снизу рассматриваемых экстремальных характеристик

$$\begin{aligned} \rho_{2n-1}(W(\Phi), L_2) &\geq \rho_{2n}(W(\Phi), L_2) \geq b_{2n}(W(\Phi), L_2) \geq b_{2n}(\sigma_{2n+1}, L_2) \\ &= 2^{-m-1/p} \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{mp} t \, dt \right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n^{-r+1/p}. \end{aligned} \quad (13)$$

Сопоставляя неравенства (10) и (13), с учетом (8) получим утверждение теоремы 2. Очевидно, что, вычисляя интеграл, утверждение теоремы можно записать в виде

$$\begin{aligned}\rho_{2n-1}(W(\Phi), L_2) &= \rho_{2n}(W(\Phi), L_2) \\ &= \frac{1}{2^m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma((mp/2) + 1)}{\Gamma(mp + 1)/2} \right\}^{1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n^{-r+1/p},\end{aligned}$$

где $\Gamma(u)$ – гамма-функция Эйлера.

На первый взгляд условие (9) в формулировке теоремы 2 выглядит не совсем естественным и труднопроверяемым. Однако, на наш взгляд, это не так.

ТЕОРЕМА 3. *Множество функций Φ , удовлетворяющих условию (9), не пусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим, например, степенную функцию $\Phi_*(u) = u^\alpha$, где

$$\alpha := \frac{\pi}{p \int_0^\pi (\sin v/2)^{mp} dv}. \quad (14)$$

Из (14) получаем

$$\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p}(mp + 1). \quad (15)$$

Условие (9), выполнение которого предстоит доказать для функции Φ_* , в рассматриваемом случае запишется в виде

$$\mu^{\alpha p} \geq \int_0^{\mu\pi} \left(\sin \frac{v}{2} \right)_*^{mp} dv / \int_0^\pi \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{mp} dv.$$

С учетом (14) данное неравенство примет вид

$$\frac{\pi}{\alpha p} \mu^{\alpha p} \geq \int_0^{\mu\pi} \left(\sin \frac{v}{2} \right)_*^{mp} dv, \quad (16)$$

где $0 < \mu < \infty$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$R(\mu) := \frac{\pi}{\alpha p} \mu^{\alpha p} - \int_0^{\mu\pi} \left(\sin \frac{v}{2} \right)_*^{mp} dv. \quad (17)$$

В бесконечно малой окрестности нуля с учетом (17) имеем

$$R(\mu) = \frac{\pi}{\alpha p} \mu^{\alpha p} - \int_0^{\mu\pi} \left(\frac{v}{2} \right)^{mp} dv = \mu^{\alpha p} \left(\frac{\pi}{\alpha p} - \frac{\pi^{mp+1}}{2^{mp}(mp+1)} \mu^{mp+1-\alpha p} \right). \quad (18)$$

Следовательно, при $\mu \rightarrow 0+$ из (18) и (15) получаем $R(\mu) > 0$. Из (17) и (14) имеем $R(0) = R(1) = 0$. Покажем, что на интервале $(0, 1)$ функция (17) является знакопостоянной. Для этого, рассуждая методом от противного, полагаем, что существует некоторая точка $\xi \in (0, 1)$, в которой функция R меняет знак. В силу теоремы Ролля производная первого порядка функции R , т.е.

$$R'(\mu) = \pi \mu^{\alpha p - 1} - \pi \left(\sin \frac{\mu\pi}{2} \right)^{mp}, \quad (19)$$

должна иметь на интервале $(0, 1)$ не менее двух различных нулей. Столько же различных нулей на $(0, 1)$ и в тех же точках, что и R' , должна иметь функция

$$R_*(\mu) := \pi^{1/(mp)} \left(\mu^{(\alpha p - 1)/(mp)} - \sin \frac{\mu \pi}{2} \right). \quad (20)$$

Так как в силу левой части неравенства (15) и соотношения (20) $R_*(0) = R_*(1) = 0$, функция

$$R'_*(\mu) = \pi^{1/(mp)} \left(\frac{\alpha p - 1}{mp} \mu^{(\alpha p - mp - 1)/(mp)} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\mu \pi}{2} \right) \quad (21)$$

на основании теоремы Ролля должна иметь на $(0, 1)$ не менее трех различных нулей. Из (21) и правой части неравенства (15) следует, что на интервале $(0, 1)$ R'_* является разностью двух положительных функций, одна из которых монотонно убывает и выпукла вниз, а другая монотонно убывает и выпукла вверх. Из геометрических соображений очевидно, что R'_* может иметь на $(0, 1)$ не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает, что $R(\mu) > 0$ для любого $\mu \in (0, 1)$.

Пусть теперь $1 \leq \mu < \infty$. Тогда на основании (17) и (14) функция R примет следующий вид:

$$R(\mu) = \mu^{\alpha p} - \alpha p(\mu - 1) - 1. \quad (22)$$

Из (22) получаем

$$R'(\mu) = \alpha p(\mu^{\alpha p - 1} - 1). \quad (23)$$

В силу левой части неравенства (15) из (23) получаем, что $R'(\mu) \geq 0$ на полусегменте $[1, \infty)$. Поскольку, как следует из (22), $R(1) = 0$, то $R(\mu) \geq 0$ на указанном точечном множестве.

Полученное означает, что неравенство (16), а значит, и условие (9), справедливо для функции Φ_* при любом $\mu \in (0, \infty)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \leq 2$ справедливы равенства

$$\rho_{2n-1}(W(\Phi_*), L_2) = \rho_{2n}(W(\Phi_*), L_2) = 2^{-m} \alpha^{1/p} \pi^{\alpha - 1/p} n^{-r - \alpha + 1/p},$$

где $\rho_k(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных k -поперечников.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5, (1967), 513–522.
- [2] Н. И. Черных, “О неравенствах Джексона в L_2 ”, *Приближение функций в среднем*, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **88**, Наука, М., 1967, 71–74.
- [3] Л. В. Тайков, “Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **20**:3, (1976), 433–438.
- [4] Л. В. Тайков, “Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 ”, *Матем. заметки*, **22**:4, (1977), 535–542.
- [5] Л. В. Тайков, “Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **25**:2, (1979), 217–223.
- [6] А. А. Лигун, “Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **24**:6, (1978), 785–792.

- [7] В. В. Шалаев, “О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков”, *Укр. матем. журн.*, **43**:1, (1991), 125–129.
- [8] М. Г. Есмаганбетов, “Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона”, *Матем. заметки*, **65**:6, (1999), 816–820.
- [9] С. Б. Вакарчук, “О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точных значениях их n -поперечников”, *Матем. заметки*, **70**:3, (2001), 334–345.
- [10] С. Б. Вакарчук, “Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 ”, *Матем. заметки*, **78**:5, (2005), 792–796.
- [11] С. Б. Вакарчук, “Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 ”, *Матем. заметки*, **80**:1, (2006), 11–19.
- [12] С. Н. Васильев, “Точное неравенство Джексона–Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами”, *Докл. РАН*, **385**:1, (2002), 11–14.
- [13] С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций”, *Укр. матем. журн.*, **56**:11, (2004), 1458–1466.
- [14] М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, “О поперечниках классов периодических функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ ”, *Докл. АН Республики Таджикистан*, **49**:2, (2006), 111–116.
- [15] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.
- [16] A. Pinkus, *n -Widths in Approximation Theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **7**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

М. Ш. Шабозов

Институт математики АН Республики Таджикистан,

г. Душанбе

E-mail: shabozov@mail.ru

Поступило

09.02.2009