Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Христофоров, О явлении ложной интерполяции эллиптических функций диагональными аппроксимациями Паде, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 4, 604–615

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm7708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:30:20

О явлении ложной интерполяции эллиптических функций диагональными аппроксимациями Паде

Д. В. Христофоров

В работе изучаются диагональные аппроксимации Паде для эллиптических функций. Наличие ложных полюсов аппроксимаций, не соответствующих особенностям приближаемой функции, препятствует их равномерной сходимости в области Шталя. Это явление оказывается тесно связанным с существованием в области Шталя точек ложной интерполяции, в которых аппроксимации Паде интерполируют другую ветвь эллиптической функции. В работе исследуется поведение диагональных аппроксимаций Паде в окрестности точек ложной интерполяции.

Библиография: 14 названий.

1. Введение

Пусть функция f задана сходящимся рядом Лорана в окрестности точки $z = \infty$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}. \quad (1.1)$$

Рассмотрим последовательность аппроксимаций Паде $f_n(z) := p_n(z)/q_n(z)$, где полиномы p_n и q_n имеют степень не выше n , $q_n \not\equiv 0$, и удовлетворяют условию касания

$$R_n(z) := q_n(z)f(z) - p_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Если $\deg q_n = n$, $\deg p_n = n$ и полиномы p_n и q_n взаимно просты, то индекс n называется *нормальным*.

Согласно общим результатам Шталя [1] если ряд (1.1) представляет алгебраическую функцию, то существует “симметричный” компакт (в дальнейшем – *компакт Шталя*) $S = S(f) \subset \mathbb{C}$ со следующими свойствами:

- (1) S состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг и множество $D := \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ – область;
- (2) f продолжается мероморфным образом в область $D = D(f)$;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00317) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3906.2008.1).

- (3) $f_n \xrightarrow{\text{cap}} f$ на компактных подмножествах области D , где f_n – диагональные аппроксимации Паде для функции f в точке $z = \infty$, а $\xrightarrow{\text{cap}}$ означает сходимость по емкости.

Область Шталя $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ является максимальной областью сходимости по емкости последовательности $\{f_n\}$. Основным препятствием (см. [2]–[6]) к равномерной сходимости аппроксимаций Паде является наличие *ложных полюсов* – полюсов рациональных функций f_n , имеющих предельные точки, компактно принадлежащие области D и не совпадающие с особенностями функции f в D . Из теоремы Шталя о сходимости по емкости следует, что асимптотически ложные полюсы совпадают с нулями функций f_n , такие пары называются *дефектами* [7]. Часто полагают [7]–[9], что дефекты аппроксимаций Паде являются случайными и никак не связаны с природой приближаемой функции.

В 1908 г. Дюма [10] исследовал сходимость чебышевской непрерывной дроби для эллиптической функции вида

$$f(z) = w(z) - z^2 + \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{2} z, \quad (1.3)$$

где $w(z) = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)}$, $e_1, \dots, e_4$ – попарно различные точки на комплексной плоскости и выбранная ветвь корня обеспечивает голоморфность функции f в бесконечности. Дюма показал, что в “общем положении” для некоторой бесконечной подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ у диагональных аппроксимаций f_n , $n \in \Lambda$, существуют полюсы, множество которых всюду плотно в $\overline{\mathbb{C}}$, а динамика в зависимости от n подчиняется определенной закономерности.

Результат Дюма был перенесен Суециным [4] на *класс функций*, включающий в себя эллиптические функции (1.3). Было отмечено следующее явление, тесно связанное с наличием ложных полюсов: для каждого n из некоторой бесконечной подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ существует точка $\beta_n \in D$, для которой $f_n(\beta_n) = \tilde{f}(\beta_n)$, где функция $\tilde{f}$ – другая ветвь функции f :

$$\tilde{f}(z) = -w(z) - z^2 + \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{2} z.$$

Это означает, что аппроксимации Паде интерполируют в некоторых точках области Шталя D *другую ветвь* функции f . На этом явлении основан, например, контрпример Буслаева [11] к гипотезе Бейкера–Грейвс–Морриса. В случае рациональной зависимости неких вещественных параметров $\tau_1 = \tau_1(e_1, e_2, e_3, e_4)$, $\tau_2 = \tau_2(e_1, e_2, e_3, e_4)$ и единицы (см. [4]) $\{\beta_n, n \in \Lambda\}' = \overline{\mathbb{C}}$.

Тем самым, в области Шталя последовательность $\{f_n\}$ не может равномерно сходиться к функции f (1.3). Отметим, что задача о равномерном приближении функции f диагональными аппроксимациями Паде в области Шталя рассматривается в [12].

Пусть функция f , заданная рядом (1.1), имеет вид

$$f(z) = \frac{w(z)}{q(z)} - r(z), \quad (1.4)$$

где $w(z)$ из (1.3), $q \in \mathbb{C}[z]$ – полином фиксированной степени m , все нули которого расположены в области Шталя, $r \in \mathbb{C}(z)$ есть сумма главных частей мероморфной в области D функции $w(z)/q(z)$. Таким образом, функция $f \in \mathcal{H}(D)$.

Пусть $\rho(x, y)$ – расстояние в сферической метрике в $\overline{\mathbb{C}}$ между точками x и y . Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Пусть точки $e_1, \dots, e_4$ таковы, что компакт Шталя S для функции

$$w(z) = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)}$$

состоит из двух непересекающихся дуг S_1 и S_2 и заданные вещественные параметры $\tau_1(e_1, \dots, e_4)$, $\tau_2(e_1, \dots, e_4)$ и единица рационально независимы. Предположим, что для эллиптической функции $f(z) = w(z)/q(z) - r(z)$, голоморфной в области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$, все достаточно большие индексы n нормальны, т.е. $\text{ord } f_n = n$. Тогда существует последовательность $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(f)$ натуральных чисел, точки $\beta_n \in \mathbb{C} \setminus S$, $n \in \tilde{\Lambda}$, и числа $\rho_n \downarrow 0$, $n \in \tilde{\Lambda}$, такие, что

$$f_n(\beta_n) = \tilde{f}(\beta_n) \quad \text{и} \quad f_n(K_n^{\rho_n}) = \overline{\mathbb{C}}, \quad \text{где} \quad K_n^{\rho_n} = \{z \in D : \rho(z, \beta_n) < \rho_n\}.$$

Условия теоремы определяют случай “общего положения”, в предположении которого мы будем проводить доказательство в этой работе.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и обозначим через Λ^ε множество $n \in \Lambda$ таких, что $\beta_n \in D^\varepsilon := \overline{\mathbb{C}} \setminus S^\varepsilon$, S^ε – 2ε -окрестность компакта S . В качестве последовательности $\tilde{\Lambda}$ в теореме мы будем брать последовательность Λ^ε .

Данная теорема является уточнением сформулированной в [6] теоремы, в которой радиус ρ_n окрестностей $K_n^{\rho_n}$ фиксирован.

Дальнейшая схема построения работы следующая. В разделе 2 приведены основные понятия и результаты, связанные с теорией римановых поверхностей, которые необходимы при доказательстве теоремы. В разделе 3 выводится явный вид функции остатка R_n из (1.2). Наконец, в разделе 4 доказывается некоторая вспомогательная лемма и затем приводится доказательство сформулированной теоремы.

2. Основные понятия и вспомогательные результаты

2.1. Доказательства будем проводить при помощи стандартных конструкций на эллиптической римановой поверхности X , заданной уравнением $w^2 = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)$. Реализуем X как два экземпляра $\overline{\mathbb{C}}$, разрезанных по дугам S_1 и S_2 компакта Шталя. На каждой из дуг зададим ориентацию: $S_1 = \text{arg}(e_1, e_2)$, положительная ориентация от e_1 к e_2 ; $S_2 = \text{arg}(e_3, e_4)$, положительная ориентация от e_3 к e_4 . Соответствующим образом определяются “верхний” и “нижний” берега разрезов, а два экземпляра расширенной комплексной плоскости оказываются “склеены” накрест. Компакту S при этом на римановой поверхности соответствует пара непересекающихся кривых $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

Зафиксируем однозначную в области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ ветвь квадратного корня соотношением

$$\frac{\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)}}{z^2} \rightarrow 1, \quad z \rightarrow \infty.$$

Точка $\mathbf{z} \in X$ определяется своей проекцией $z = \pi(\mathbf{z})$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$, и номером листа римановой поверхности. На первом открытом листе $D^{(1)}$ выполняется соотношение $w = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)}$, на втором открытом листе $D^{(2)}$ – соотношение

$w = -\sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4)}$. Таким образом, $\mathbf{z} = (z, \pm w)$. С первым листом мы будем отождествлять область D .

Будем использовать обозначение $z^{(1)}$ при $\mathbf{z} \in D^{(1)}$ и $z^{(2)}$ при $\mathbf{z} \in D^{(2)}$.

Зададим базис гомологий на X . Первый из контуров $\mathcal{L}_1$ выберем в качестве базисного a -цикла $\mathbf{a}_1$ и дополним его b -циклом $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_1 = 1$. Пространство голоморфных дифференциалов на X одномерно; обозначим через $d\Omega_1$ a -нормированный абелев дифференциал. Имеем

$$\oint_{\mathbf{a}_1} d\Omega_1(\zeta) = 1, \quad \oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega_1(\zeta) = B_1,$$

где $\text{Im } B_1 > 0$.

2.2. Пусть $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ – произвольные точки римановой поверхности X . Обозначим через $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$ абелев дифференциал третьего рода, голоморфный в $X \setminus \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ и имеющий простые полюсы в выделенных точках с вычетами 1 и -1 соответственно и нормированный условием $\oint_{\mathbf{a}_1} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}) = 0$. Такой дифференциал называется *a -нормированным*. Приведем здесь явный вид некоторых дифференциалов, который будет необходим при доказательстве:

$$\begin{aligned} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_1)}{z - z_1} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} - \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_2)}{z - z_2} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} + \frac{c_1}{w(\mathbf{z})} \right\}, \\ d\Omega(\mathbf{z}_1, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_1)}{z - z_1} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} - \frac{1}{2} \frac{w(\mathbf{z}) - c_2}{w(\mathbf{z})} dz, \\ d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= -\frac{z - c_3}{w(\mathbf{z})} dz, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где константы $c_j \in \mathbb{C}$ обеспечивают a -нормированность дифференциалов.

В дальнейшем будем пользоваться интегралами от абелевых дифференциалов по путям, лежащим в рассеченной римановой поверхности. Рассеченная риманова поверхность $\tilde{X}$ определяется как $\tilde{X} := X \setminus (\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}_1)$ и является связной. Справедливо следующее соотношение Римана (см. [13], [14]), которым будем пользоваться в дальнейшем:

$$\oint_{\mathbf{b}_1} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \zeta) = -2\pi i \int_{\mathbf{z}_1}^{\mathbf{z}_2} d\Omega_1(\zeta), \quad (2.2)$$

где путь интегрирования от $\mathbf{z}_1$ к $\mathbf{z}_2$ лежит в $\tilde{X}$.

Кроме a -нормированных дифференциалов в процессе доказательства нам понадобится дифференциал комплексной функции Грина. Пусть $g_D(z, \infty)$ – функция Грина области D , а $\tilde{g}_D(z, \infty)$ – гармонически сопряженная к ней, $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + i\tilde{g}_D(z, \infty)$ – многозначная комплексная функция Грина. Дифференциал комплексной функции Грина $dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$ имеет полюсы с вычетами ± 1 в обеих бесконечно удаленных точках римановой поверхности и чисто мнимые периоды. Справедливо следующее соотношение [4]:

$$dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + 2\pi i \omega_1(\infty) d\Omega_1(\mathbf{z}) + d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = 0, \quad (2.3)$$

где $\omega_1(\infty)$ – гармоническая мера дуги S_1 относительно области D . Равенство (2.3) вытекает непосредственно из соотношения

$$\omega_1(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{a}_1} dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}). \quad (2.4)$$

В будущем нам понадобится вещественная величина

$$\tau_1(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_1} dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}). \quad (2.5)$$

2.3. *Дивизором* (F) мероморфной на X функции F будем называть формальное выражение

$$(F) = n_1 \mathbf{z}_1 + n_2 \mathbf{z}_2 + \dots + n_p \mathbf{z}_p - k_1 \zeta_1 - k_2 \zeta_2 - \dots - k_q \zeta_q,$$

где $\mathbf{z}_j$ – нули функции F , а n_j – их кратности, ζ_j – полюсы функции F , k_j – их кратности. По теореме Абеля $\deg(F) = 0$ и

$$\sum_{j=1}^p n_j \Omega_1(\mathbf{z}_j) - \sum_{j=1}^q k_j \Omega_1(\zeta_j) \equiv 0, \quad \Omega_1(\mathbf{z}) = \int_{e_3}^{\mathbf{z}} d\Omega_1(\zeta),$$

равенство понимается по модулю периодов базисного голоморфного дифференциала $d\Omega_1(\mathbf{z})$.

3. Явный вид функции остатка

3.1. При фиксированном n рассмотрим функцию R_n как заданную на римановой поверхности X . Исходя из (1.2) и (1.4) имеем

$$\begin{aligned} R_n(z^{(2)}) &= q_n(z) \tilde{f}(z) - p_n(z) = -q_n(z) \frac{w(z)}{q(z)} - q_n(z) r(z) - p_n(z) \\ &= R_n(z^{(1)}) - 2q_n(z) \frac{w(z)}{q(z)}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом условия касания (1.2) имеем

$$R_n(\mathbf{z}) = \begin{cases} O(z^{-(n+1)}), & \mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}, \\ O(z^{n+2-m}), & \mathbf{z} \rightarrow \infty^{(2)}, \\ O((z - a_j^{(2)})^{-k_j}), & \mathbf{z} \rightarrow a_j^{(2)}, j = 1, \dots, m, \end{cases}$$

где $a_j^{(2)} \in D^{(2)}$ соответствуют нулям полинома $q(z)$, а k_j – их кратностям. Задача о нахождении функции R_n переформулируется следующим образом.

ЗАДАЧА. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ найти функцию R_n такую, что

- 1) R_n мероморфная на X ;
- 2) дивизор

$$(R_n) = \mathbf{z}_n + (n+1)\infty^{(1)} - (n+2-m)\infty^{(2)} - a_1^{(2)} - \dots - a_m^{(2)}.$$

Неизвестный нуль $\mathbf{z}_n$ появляется из условия $\deg(R_n) = 0$. Данными условиями искомая функция R_n определяется однозначно с точностью до мультипликативной постоянной.

3.2. Приведем явное решение задачи. Для этого рассмотрим a -нормированные абелевы дифференциалы $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$ и соответствующие им интегралы $\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}) = \int_{e_3}^{\mathbf{z}} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \zeta)$, где интегрирование ведется по рассеченной римановой поверхности $\tilde{X}$. Введем функцию

$$F(z) := \exp \left\{ (n+1-m)\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m \Omega(\infty^{(1)}, a_j^{(2)}; \mathbf{z}) \right\}. \quad (3.1)$$

Имеем $(F) = (R_n)$. В силу a -нормированности используемых дифференциалов период функции F при обходе $\mathbf{a}_1$ -цикла равен нулю. Подправим функцию F таким образом, чтобы ее период при обходе $\mathbf{b}_1$ -цикла также равнялся нулю. Тогда новая функция станет мероморфной на поверхности X и, следовательно, совпадет с функцией R_n .

Из теоремы Абеля следует

$$(n+1)\Omega_1(\infty^{(1)}) + \Omega_1(\mathbf{z}_n) - (n+2-m)\Omega_1(\infty^{(2)}) - \sum_{j=1}^m \Omega_1(a_j^{(2)}) = 0 \pmod{(1, B_1)}, \quad (3.2)$$

где $B_1 - \mathbf{b}_1$ -период дифференциала Ω_1 , $\text{Im } B_1 > 0$. Если правую часть (3.2) представить как линейную комбинацию периодов и использовать интегральное представление $\Omega_1(\mathbf{z}) = \int_{e_3}^{\mathbf{z}} d\Omega(\xi)$, получим

$$\begin{aligned} (n+1) \int_{e_3}^{\infty^{(1)}} d\Omega_1(\mathbf{z}) + \int_{e_3}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\mathbf{z}) - (n+2-m) \int_{e_3}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\mathbf{z}) \\ - \sum_{j=1}^m \int_{e_3}^{a_j} d\Omega_1(\mathbf{z}) - l_n - k_n B_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $l_n, k_n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим новую функцию

$$\begin{aligned} \hat{F}(z) := \exp \left\{ (n+1-m)\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^m \Omega(\infty^{(1)}, a_j^{(2)}; \mathbf{z}) + 2\pi i k_n \Omega_1(z) \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для вычисления ее $\mathbf{b}_1$ -периода T вычислим входящие под знак экспоненты в (3.4) интегралы по $\mathbf{b}_1$ -циклу и применим соотношение Римана (2.2):

$$T = -2\pi i \left\{ (n+1-m) \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\mathbf{z}) + \int_{\mathbf{z}_n}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m \int_{\infty^{(1)}}^{a_j^{(2)}} d\Omega_1(\mathbf{z}) - k_n B_1 \right\}. \quad (3.5)$$

Прибавим к (3.5) равенство (3.3), предварительно умножив его на $-2\pi i$. Получим

$$T = 2\pi i l_n.$$

Отсюда следует, что $\hat{F}$ – мероморфная функция на римановой поверхности X , имеющая требуемый дивизор и, следовательно, $\hat{F} = R_n$ с точностью до мультипликативной константы.

Используя соотношение (2.3), перепишем (3.4) следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{F}(z) := \exp \Big\{ & -(n+1-m)G(\mathbf{z}) + \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m \Omega(\infty^{(1)}, a_j^{(2)}; \mathbf{z}) \\ & + 2\pi i k_n \Omega_1(z) - 2\pi i (n+1-m) \omega_1(\infty) \Omega_1(\mathbf{z}) \Big\}. \end{aligned}$$

Интегрируя соотношение (2.3) по $\mathbf{b}_1$ -циклу, получим

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_1(\mathbf{z}) = \tau_1(\infty) + \omega_1(\infty) B_1. \quad (3.6)$$

Так как в (3.3) нижний предел интегрирования можно выбрать любой фиксированный, заменим e_3 на $\infty^{(1)}$ и используем (3.6):

$$(n+2-m)\tau_1(\infty) + (n+2-m)\omega_1(\infty)B_1 - \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{q}_j} d\Omega_1(\mathbf{z}) = l_n + k_n B_1. \quad (3.7)$$

Взяв мнимую часть этого равенства с учетом $\text{Im } B_1 > 0$, получаем представление для числа k_n :

$$k_n = (n+1-m)\omega_1(\infty) + \gamma_n, \quad \gamma_n \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Заметим, что величина γ_n , возникающая в (3.8), равномерно ограничена по n : $\gamma_n = O(1)$, $n \rightarrow \infty$. Для доказательства этого факта достаточно воспользоваться точным равенством (3.7), рассмотрев его мнимую часть. Так как интегрирование идет по рассеченной римановой поверхности $\widetilde{X}$, то величина $\text{Im} \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_n} d\Omega_1(\mathbf{z})$ равномерно ограничена при $\mathbf{z}_n \in X$. Следовательно, будет равномерно ограничена по n и величина γ_n .

Окончательно получаем

$$R_n(\mathbf{z}) = h_n \Phi^{(n+1-m)}(\mathbf{z}) \exp \left\{ \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m \Omega(\infty^{(1)}, a_j^{(2)}; \mathbf{z}) \right\} \exp \{ 2\pi i \gamma_n \Omega_1(\mathbf{z}) \}, \quad (3.9)$$

где $h_n \neq 0$ – мультипликативная постоянная.

4. Доказательство теоремы

4.1. Пусть $\rho(x, y)$ – сферическая метрика в $\overline{\mathbb{C}}$:

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}.$$

Докажем следующее утверждение, которое потребуется в дальнейшем.

ЛЕММА. Пусть f – алгебраическая функция, заданная и однозначная на компакте E в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, а K – некоторый компакт в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда для любого $a \in K$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное объединение кругов $E_a(\varepsilon) := \bigcup_{k=1}^{s(a)} B_{k, r(\varepsilon)}$ с центрами на компакте E , имеющих в сферической метрике радиус $r(\varepsilon) = r(\varepsilon, a)$, такое, что

(1) $\{z : |f(z) - a| < \varepsilon, z \in E\} \subseteq E_a(\varepsilon)$;

(2) $r(\varepsilon, a) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и равномерно по $a \in K$.

При этом число кругов $s(a)$ равномерно ограничено по $a \in K$.

В силу алгебраичности функции f для любого $a \in K$ множество

$$A := \{z : f(z) - a = 0, z \in E\}$$

состоит из не более чем конечного числа s точек. Это множество для каждого фиксированного a возьмем в качестве центров кругов из утверждения леммы, а радиус $r(\varepsilon, a)$ определим как

$$r(\varepsilon, a) := \sup_{z : |f(z) - a| < \varepsilon} \rho(z, A).$$

Отсюда вытекает утверждение (1) и выполняется равномерная оценка $s(a) \leq s$.

Фиксируем $a \in K$ и покажем, что $r(\varepsilon, a) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предположим противное. Тогда существуют последовательности $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset K$, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ и число $c > 0$ такие, что

$$\rho(z_k, A) > c \quad \text{и} \quad |f(z_k) - a| < \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Так как E – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, мы можем выбрать сходящуюся подпоследовательность $z_k \rightarrow z_0 \in E, k \in \Lambda$. В силу (4.1) получаем, что $f(z_0) = a$ и $\rho(z_0, A) > 0$, что противоречит определению множества A . Таким образом, для любого $\delta > 0$ и $a \in K$ существует $\varepsilon_a(\delta)$ такое, что $r(\varepsilon_a, a) < \delta$.

Перейдем к доказательству равномерной сходимости (2). Для любого $a \in K$ при фиксированном δ рассмотрим окрестность в евклидовой метрике $U_{\varepsilon(\delta)/2}(a)$. Пусть $t \in U_{\varepsilon(\delta)/2}(0)$. В силу того, что $|f(z) - a| \leq |f(z) - a - t| + |t|$, имеем

$$\left\{ z : |f(z) - a - t| < \frac{\varepsilon_a}{2}, z \in E \right\} \subseteq \{z : |f(z) - a| < \varepsilon_a, z \in E\}.$$

Следовательно,

$$r\left(\frac{\varepsilon_a(\delta)}{2}, a + t\right) \leq r(\varepsilon_a(\delta), a) < \delta, \quad t \in U_{\varepsilon_a(\delta)/2}(0).$$

Так как K – компакт, выберем конечное покрытие K такими окрестностями. Взяв минимум по радиусам окрестностей из конечного покрытия, получим $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ такое, что $r(\varepsilon, a) < \delta$ для любого $a \in K$. Лемма доказана.

4.2. Перейдем к доказательству теоремы. Пусть далее $n \in \Lambda^\varepsilon$. Положим последовательность $\{\varepsilon_n\}$ из теоремы равной $1/n$. Обозначим

$$D_n := D^\varepsilon \setminus K_n^{1/n}$$

и покажем, что

$$[f_n(z) - f(z)]I_{D_n} \rightarrow 0,$$

где $n \in \Lambda^\varepsilon$ и через I_M обозначен индикатор множества M .

Из определения функции остатка (1.2) и явного вида функции f (1.4) следует

$$f_n(z) - f(z) = -\frac{w(z)}{q(z)} \frac{2R_n(z^{(1)})}{R_n(z^{(1)}) - R_n(z^{(2)})}.$$

Пусть $T_n(z) := R_n(z^{(2)})/R_n(z^{(1)})$. Тогда

$$f_n(z) - f(z) = -\frac{w(z)}{q(z)} \frac{2}{1 - T_n(z)}. \quad (4.2)$$

Из (3.9) имеем

$$\begin{aligned} T_n(z) &= \Phi^{2(n+1-m)}(z) \exp\{\Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(2)}; z^{(2)}) - \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(2)}; z^{(1)})\} \\ &\quad \times \exp\left\{\sum_{j=1}^m \Omega(\infty^{(1)}, a_j^{(2)}; z^{(2)}) - \sum_{j=1}^m \Omega(\infty^{(1)}, a_j^{(2)}; z^{(1)})\right\} \\ &\quad \times \exp\{2\pi i \gamma_n(\Omega_1(z^{(2)}) - \Omega_1(z^{(1)}))\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что если $\mathbf{z}_n \in D^{(1)}$, то аппроксимации интерполируют искомую функцию f , $f_n(z_n) = f(z_n)$. Если же $\mathbf{z}_n \in D^{(2)}$, то получаются точки ложной интерполяции $f_n(z_n) = \tilde{f}(z_n)$. Таким образом, при $n \in \Lambda^\varepsilon$ имеем $\mathbf{z}_n \in D^{(2)}$ и $\beta_n = z_n$.

Докажем, что правая часть (4.3), помноженная на I_{D_n} , равномерно стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda^\varepsilon$. Рассмотрим n такое, что z принадлежит D_n . Множитель $\Phi^{2(n+1-m)}(z)$ геометрически и равномерно в области D сходится к бесконечности. Два последних множителя, очевидно, равномерно по n и z отделены от нуля. Рассмотрим подробно выражение из первого множителя

$$L_n(z) := \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(2)}; z^{(2)}) - \Omega(\mathbf{z}_n, \infty^{(2)}; z^{(1)}).$$

Имеем из явного представления для абелевых дифференциалов (2.1)

$$L_n(z) = -\int_{e_1}^z \frac{w(\mathbf{z}_n)}{w(\zeta)(\zeta - z_n)} d\zeta + \int_{e_1}^z \frac{\zeta - c_n}{w(\zeta)} d\zeta, \quad (4.4)$$

где константа c_n обеспечивает a -нормированность дифференциала. Из условия a -нормированности $\oint_{\mathbf{a}_1} L_n(z) = 0$ найдем ее явный вид:

$$c_n = \left[-\frac{w(\mathbf{z}_n)}{z_n} \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)(\zeta/z_n - 1)} + \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{\zeta}{w(\zeta)} d\zeta \right] / \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{\zeta}{w(\zeta)} d\zeta. \quad (4.5)$$

Рассмотрим случай

$$|z_n| \leq C, \quad C \in (0, \infty), \quad \text{и} \quad |z - z_n| > \frac{1}{n}, \quad z \in D^\varepsilon.$$

Первый интеграл в (4.4) оценивается сверху через $K_1 \log n$, где K_1 – некая постоянная. Второй интеграл состоит из двух слагаемых. То, что включает в себя константа c_n , ограничено сверху по z и с учетом (4.5) ограничено сверху по n . Другое слагаемое от n не зависит, ведет себя в бесконечности как $\log |z|$, оставаясь ограниченным при остальных значениях z . Из этого анализа следует, что функция $|\exp\{L_n(z)\}|$ оценивается снизу как $|\exp\{L_n(z)\}| > K_2/n$, где K_2 – некая постоянная. В сумме с геометрическим возрастанием первого множителя из (4.3) получаем сходимость к бесконечности функции $T_n(z)$.

Теперь рассмотрим случай, когда

$$|z_n| > C.$$

Подставляя (4.5) в (4.4), получаем

$$L_n(z) = -\frac{w(\mathbf{z}_n)}{z_n} \int_{e_1}^z \frac{d\zeta}{w(\zeta)(\zeta/z_n - 1)} + \int_{e_1}^z \frac{\zeta}{w(\zeta)} d\zeta - \int_{e_1}^z \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \left[-\frac{w(\mathbf{z}_n)}{z_n} \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)(\zeta/z_n - 1)} + \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{\zeta}{w(\zeta)} dz \right] / \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)}.$$

Отсюда

$$L_n(z) \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} = \frac{w(\mathbf{z}_n)}{z_n} \left[- \int_{e_1}^z \frac{d\zeta}{w(\zeta)(\zeta/z_n - 1)} \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} + \int_{e_1}^z \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{d\zeta}{w(\zeta)(\zeta/z_n - 1)} \right] + \int_{e_1}^z \frac{\zeta}{w(\zeta)} d\zeta \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{dz}{w(z)} - \oint_{\mathbf{a}_1} \frac{\zeta}{w(\zeta)} d\zeta \int_{e_1}^z \frac{d\zeta}{w(\zeta)}.$$

В правой части от n зависит лишь выражение в квадратных скобках и множитель перед ним. Выражение в квадратных скобках есть $O(1/z_n)$ равномерно по $z \in D^\varepsilon$ и при $z_n \rightarrow \infty$. С учетом $w(\mathbf{z}_n)/z_n = O(z_n)$, $z_n \rightarrow \infty$, и при $\rho(z, z_n) > 1/n$ получаем аналогично предыдущему случаю, что функция $|\exp\{L_n(z)\}|$ оценивается снизу как $|\exp\{L_n(z)\}| > K_3/n$, где K_3 – некая постоянная.

Объединяя рассуждения при $|z_n| \leq C$ и $|z_n| > C$, получаем требуемую равномерную сходимость $T_n(z)I_{D_n} \rightrightarrows 0$, $n \in \Lambda^\varepsilon$. Следовательно, получаем

$$[f_n(z) - f(z)]I_{D_n} \rightrightarrows 0, \quad \text{где } n \in \Lambda^\varepsilon.$$

4.3. Докажем, что при $n \in \Lambda^\varepsilon$ в круге $K_n^{1/n}$ содержится полюс f_n . Предположим противное. Из (4.2) следует

$$q(z)f_n(z) - q(z)f(z) = -w(z) \frac{2}{1 - T_n(z)}, \quad (4.6)$$

откуда с учетом интерполяции функции $\tilde{f}$ в точке β_n и голоморфности f_n в $K_n^{1/n}$ имеем

$$\int_{\partial K_n^{1/n}} \frac{q_n(t)f_n(t) - q(t)f(t)}{t - \beta_n} dt = q(\beta_n)\tilde{f}(\beta_n) - q(\beta_n)f(\beta_n) = -2w(\beta_n). \quad (4.7)$$

В силу доказанного в п. 4.2 и (4.6) левая часть (4.7) сходится к нулю, в то время как правая часть отделена от нуля. Получаем противоречие.

Докажем теперь, что при некоторой убывающей к нулю последовательности $\{\rho_n\}$ круг $K_n^{\rho_n}$, начиная с некоторого n , содержит произвольную A -точку функции f_n , $A \in \mathbb{C}$. Воспользуемся принципом аргумента. Пусть l_n – произвольный замкнутый контур, содержащий круг $K_n^{\rho_n}$ и содержащийся в области D^ε . Имеем вдоль l_n :

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg[f_n(z) - A] = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg[f(z) - A] + \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \left[1 + \frac{f_n(z) - f(z)}{f(z) - A} \right]. \quad (4.8)$$

В силу голоморфности функции f в D^ε первое слагаемое в правой части (4.8) равно количеству A -точек функции f во внутренности l_n и, следовательно, неотрицательно. Для доказательства теоремы осталось показать, что для каждого n существует контур l_n , при котором второе слагаемое, начиная с некоторого n , равномерно по

всем $A \in \overline{\mathbb{T}}$ равно нулю. Действительно, в этом случае левая часть (4.8) неотрицательна. Так как f_n имеет внутри l_n по крайней мере один полюс, то получаем, что там же содержится по крайней мере одна A -точка аппроксимации.

Для доказательства равенства

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg \left[1 + \frac{f_n(z) - f(z)}{f(z) - A} \right] = 0 \quad (4.9)$$

на некотором контуре l_n достаточно показать, что на том же контуре выполняется неравенство

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z) - A|. \quad (4.10)$$

Функция f ограничена в D^ε , $|f| < M$. Пусть $|A| > 2M$. Тогда $|f - A|$ равномерно ограничено снизу, а $|f_n(z) - f(z)|$ – в силу результатов раздела 2, равномерно на контуре l_n сходится к нулю. Получаем (4.10).

Пусть $|A| \leq 2M$. Тогда A принадлежит компакт и можно воспользоваться леммой из раздела 1. Из нее следует, что множество

$$\{z : |f(z) - A| \leq |f_n(z) - f(z)|\}, \quad \text{где } |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0, \quad n \in \Lambda^\varepsilon,$$

содержится в ограниченном числе кругов со сходящимися к нулю радиусами r_n . Если число кругов оценить сверху константой s и взять в качестве ρ_n в доказываемой теореме sr_n , получим существование необходимого контура l_n в $K_n^{\rho_n}$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность С. П. Суетину за постановку задачи и внимание к работе, а В. И. Буслаеву за замечания, способствующие улучшению текста работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Stahl, “The convergence of Padé approximants to functions with branch points”, *J. Approx. Theory*, **91**:2, (1997), 139–204.
- [2] H. Stahl, “Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), 1996, Special issue, 121–193.
- [3] H. Stahl, “Spurious poles in Padé approximation”, *J. Comput. Appl. Math.*, **99**:1–2, (1998), 511–527.
- [4] С. П. Суетин, “О сходимости чебышёвских непрерывных дробей для эллиптических функций”, *Матем. сб.*, **194**:12, (2003), 63–92.
- [5] С. П. Суетин, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций”, *Матем. сб.*, **191**:9, (2000), 81–114.
- [6] С. П. Суетин, “Об интерполяционных свойствах диагональных аппроксимаций Паде эллиптических функций”, *УМН*, **59**:4, (2004), 201–202.
- [7] Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*. Ч. 1. Основы теории. Ч. 2. Обобщения и приложения, Мир, М., 1986.
- [8] J. Gammel, W. Marshall, L. Morgan, “An application of Padé approximants to Heisenberg ferromagnetism and antiferromagnetism”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **275**:1361, (1963), 257–270.
- [9] В. А. Ильина, П. К. Силаев, *Численные методы для физиков-теоретиков*, Ч. 1, ИКИ, М, Ижевск, 2003.
- [10] S. Dumas, *Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues*, Thesis, Zürich, 1908, 59 pp.

- [11] В. И. Буслаев, “О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **193**:6, (2002), 25–38.
- [12] Д. В. Христофоров, “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде для эллиптических функций”, *Матем. сб.*, **200**:6, (2009), 143–160.
- [13] Э. И. Зверович, “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях”, *УМН*, **26**:1, (1971), 113–179.
- [14] О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980.

Д. В. Христофоров

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kharden@gmail.com

Поступило

31.03.2009

Исправленный вариант

29.10.2009